

Extended DS diagram とその変形

横山 和夫 (上智大学)

1 拡張 DS diagram の定義と Notation

2-球面 S^2 上の hoop(vertex を含まない loop) も含む 3-regular graph G (連結は仮定しない) を考える。

$S^2 - G$ の連結成分は、一般に (open) planar surface であるが (G が連結でないので (open) 2-cell 以外も存在する), このとき, G の vertex の集合を $V(G)$, edge (hoop も edge とする) の集合を $E(G)$ で表す。

定義 1 (extended DS diagram)

$\Delta = (S^2, G, f)$ が extended DS diagram であるとは, (略して ES) であるとは, 以下の条件をみたすこととする。

S^2 は 2-球面, G は上の 3-regular graph である。 f は S^2 からある closed fake surface P への全射な局所同相写像で, 次を満たす。

- (1) $f|_{V(G)} : V(G) \rightarrow V(P)$ は, pointwise に 4 対 1
- (2) $f|_{E(G)} : E(G) \rightarrow E(P)$ は, pointwise に 3 対 1
- (3) $f|_{S^2-G} : S^2 - G \rightarrow F(P)$ は, pointwise に 2 対 1

但し, fake surface P に対して, 3rd singularity の集合を $V(P)$, 2nd singularity の集合を $E(P)$, それ以外の点の集合を $F(P)$ で表す。

- (4) $F(P)$ の各成分 X に対して, $f^{-1}(X)$ は 2 つの成分をもつ。

注意:

- (1) P は自動的に連結である。
- (2) $\partial B^3 = S^2$ なる 3-球体 B^3 を考えると, B^3/f は, 3次元閉多様体になるが, それを $M(\Delta)$ で表す。明らかに, $P = S^2/f$ とかける。

次に ラベル付きグラフの定義に移るが, 正式なものは 河野君 (当箱根セミナー 2001) の次の定義を採用する。

定義 2 (ラベル付きグラフ) $L = (S^2, G, g)$ がラベル付きグラフであるとは, 以下の条件を満たすこととする。 S^2, G は上の定義と同じとする。 g は $U(G)$ (G の S^2 における正則近傍) から fake surface T_g への全射な局所同相写像で, 次をみたすものとする。

- (1) $g|_{V(G)} : V(G) \rightarrow V(T_g)$ は, pointwise に 4 対 1

- (2) $g|_{E(G)} : E(G) \rightarrow E(T_g)$ は, pointwise に 3 対 1
- (3) $g|_{U(G)-G} : S^2 - G \rightarrow F(T_g)$ は, pointwise に 2 対 1
- (4) $F(T_g)$ の各成分 X に対して, $g^{-1}(X)$ は 2 つの成分をもつ。

しかし, ここではもっと泥臭く構成的な方法での定義も述べておこう。今定義した上のラベル付きグラフと同じであることを確認して下さい。

2次元球面 S^2 上の同じ 3-regular graph G を考え, $\mathcal{D} = (F, E, V)$ を考える。ここに, V は graph G の頂点 (vertex) の集合 $V(G)$, E は G の edge の集合 $E(G)$, F は $S^2 - G$ の連結成分の集合である。 S^2 を 3次元球体 B^3 の境界とみて, 向きが定まっているとする。

そして, F の元には ラベル (向きとラベル) と boundary walk が定まっていて, E の元には ラベル (向きとラベル) と boundary が定まっていて, V の元には ラベル (向きとラベル) が定まっているものとする。ラベルということ向き付きラベルと向きのないラベルを適当に使うことにする (考えれば分かると思われるので)。ここに, F の元の boundary walk とは, 次のような E の元のラベルの列の family のことである。

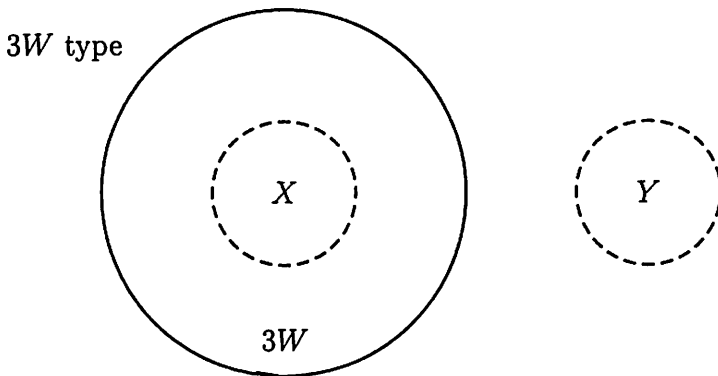
$$e_{11}^{\varepsilon_{11}} e_{12}^{\varepsilon_{12}} \cdots e_{1s_1}^{\varepsilon_{1s_1}}, e_{21}^{\varepsilon_{21}} e_{22}^{\varepsilon_{22}} \cdots e_{2s_2}^{\varepsilon_{2s_2}}, \dots, e_{p1}^{\varepsilon_{p1}} e_{p2}^{\varepsilon_{p2}} \cdots e_{ps_p}^{\varepsilon_{ps_p}}$$

(ここに $e_{ij}^{\varepsilon_{ij}}$ は E の元のラベルで, $\varepsilon_{ij} = \pm$ であって, $\varepsilon = -1$ とは向きが逆のものであることを表す。)

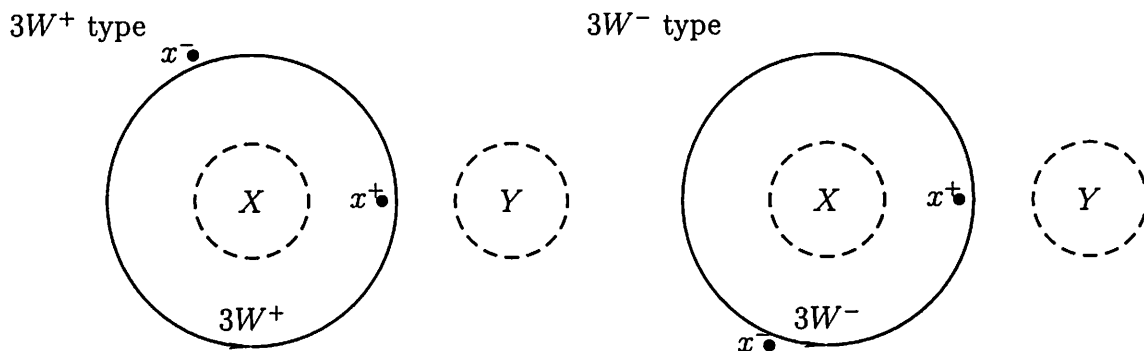
このとき, 次の条件をみたすとする。

- (1) F の元は 同じラベルをもつものがちょうど 2 つある。
- (2) E の元は 同じラベルをもつものがちょうど 3 つあるとする, 但し, hoop は 同じラベルをもつ hoop がちょうど 3 つあるか, 1 つの hoop で $3W^+$, または $3W^-$ というラベルをもつものが 1 つあるかのいずれかである。ここに, $3W^+$, $3W^-$ は次の図である。(河野氏の箱根セミナー記録 2001 を参照して下さい。)

まず, $3W$ type とは,



で, $3W^+$ と $3W^-$ は次の図である。



左の図も 右の図も 点 x^+ と 点 x^- が張り合わされている

(3) V の元は 同じラベルをもつものがちょうど 4 つある。

(4) (compatible)

(a) f_1 と f_2 を同じラベルをもつ異なる F の元 (すなわち f_1 のラベルと f_2 のラベルは同じ) とすると, f_1 と f_2 の boundary walk は (次の意味で) 同じである。

f_1 の boundary walk を

$$e_{11}^{\epsilon_{11}} e_{12}^{\epsilon_{12}} \cdots e_{1s_1}^{\epsilon_{1s_1}}, e_{21}^{\epsilon_{21}} e_{22}^{\epsilon_{22}} \cdots e_{2s_2}^{\epsilon_{2s_2}}, \dots, e_{p1}^{\epsilon_{p1}} e_{p2}^{\epsilon_{p2}} \cdots e_{ps_p}^{\epsilon_{ps_p}}$$

f_2 の boundary walk を

$$e'_{11} \epsilon'_{11} e'_{12} \epsilon'_{12} \cdots e'_{1t_1} \epsilon'_{1t_1}, e'_{21} \epsilon'_{21} e'_{22} \epsilon'_{22} \cdots e'_{2t_2} \epsilon'_{2t_2}, \dots, e'_{q1} \epsilon'_{q1} e'_{q2} \epsilon'_{q2} \cdots e'_{qs_q} \epsilon'_{qs_q}$$

とすると, $p = q$ で 1 から p , 1 から $q (= p)$ の順序を適当にいれかえれば,

$$s_1 = t_1, s_2 = t_2, \dots, s_p = t_p$$

で, さらに各列に対して, cyclic permutation のちがいを除いて (向きとラベルが一致している)。

(b) e_1, e_2, e_3 を同じラベルをもつ異なる hoop でない E の元とし, $\partial e_1 = v_{11} - v_{10}$, $\partial e_2 = v_{21} - v_{20}$, $\partial e_3 = v_{31} - v_{30}$, とすると, $v_{11} = v_{21} = v_{31}$, $v_{10} = v_{20} = v_{30}$ (ラベルとして) ある。

この定義により, 同じラベルは同じとみることにより, G から 4-regular graph G' への写像

$$g : G \rightarrow G'$$

が次のように定められる。

(1) $V(G) \rightarrow V(G')$ は 4 対 1 に定まり

(2) これを $E(G)$ に拡張できる。

さらに, $U(G)$ (G の S^2 での正則近傍) に拡張でき, さらに S^2 まで拡張できる。このようにしてできた polyhedron $g(S^2)$ が fake surface になるとき, ラベル付きグラフという。

そして, ES および ラベル付きグラフの同値関係は (河野氏と同じく) 次のように定める。

定義 3 (1) 2 つの ES $\Delta = (S^2, G, f)$ と $\Delta' = (S^2, G', f')$ が同値であるとは,

$$\exists F : S^2 \rightarrow S^2 \text{ 同相写像}$$

$$\exists H : P \rightarrow P' \text{ 同相写像}$$

$$s.t. f' \cdot F = H \cdot f$$

を満たす。

(2) 2 つの ラベル付きグラフ $L = (S^2, G, g)$ と $L' = (S^2, G', g')$ が同値であるとは,

$$\exists F : U(G) \rightarrow U(G') \text{ 同相写像}$$

$$\exists H : T_g \rightarrow T_{g'} \text{ 同相写像}$$

$$s.t. g' \cdot F = H \cdot g$$

を満たす。

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{F} & S^2 \\ \downarrow f & & \downarrow f' \\ P & \xrightarrow{H} & P' \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} U(G) & \xrightarrow{F} & U(G') \\ \downarrow g & & \downarrow g' \\ T_g & \xrightarrow{H} & T_{g'} \end{array}$$

さて, ここで Extended DS diagram $\Delta = (S^2, G, f)$ が与えられたら, G の適当な正則近傍 $U(G)$ を選び, $G = f|_{U(G)}$ とすると, (S^2, G, g) はラベル付きグラフになる。このラベル付きグラフを $L(\Delta)$ と表す。

河野氏により次が示されている。

定理 1

2つの $ES \Delta = (S^2, G, f)$ と $\Delta' = (S^2, G', f')$ が同じラベル付きグラフを決めるとき、つまり $L(\Delta) \equiv L(\Delta')$ となるとき、 $M(\Delta)$ と $M(\Delta')$ は同相、すなわち

$$M(\Delta) \cong M(\Delta')$$

である。

証明は [補足] (河野氏による) 参照。

2 extended DS diagram の基本変形

Δ_1 を Extended DS diagram とする。このとき 図 1 のような変形を elementary ex-Deformation of type I という。

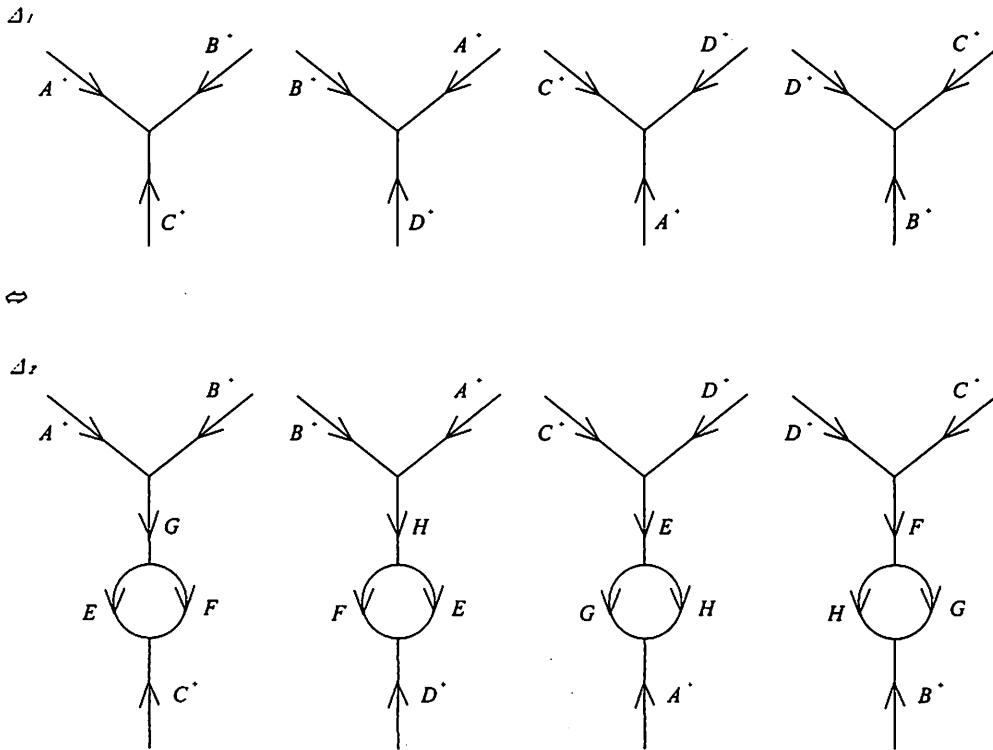


図 1: ex-Deformation of type I

参考までに この変形を Polyhedron で表すと次の図 2 のようになる。

Δ_1 に elementary ex-Deformation of type I を施して得られた Δ_2 も Extended DS diagram である。逆の操作を I^- と表し、これも elementary ex-Deformation of type I ということもある。

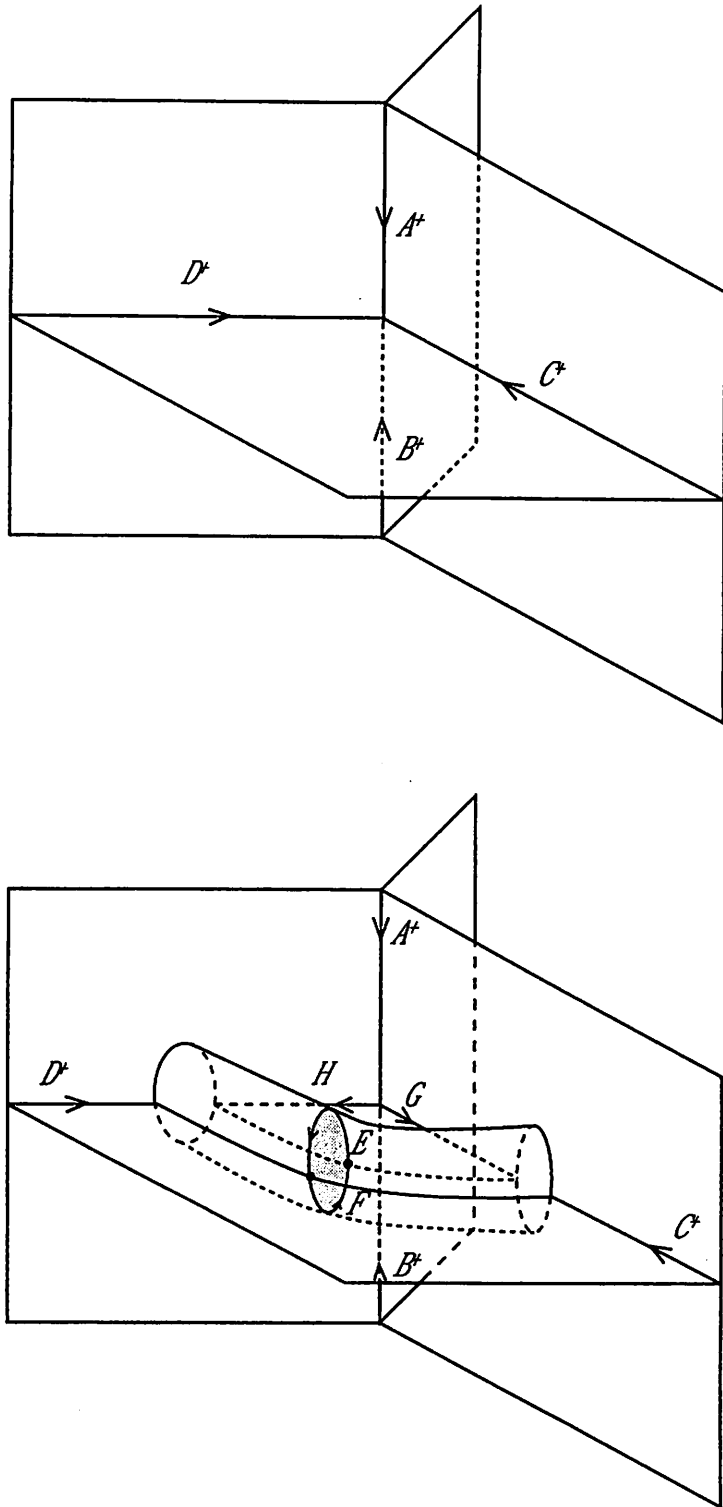


图 2: ex-Deformation of type I - polyhedron

Δ_1 を Extended DS diagram とする。このとき 図 3 のような変形を elementary ex-Deformation of type II という。

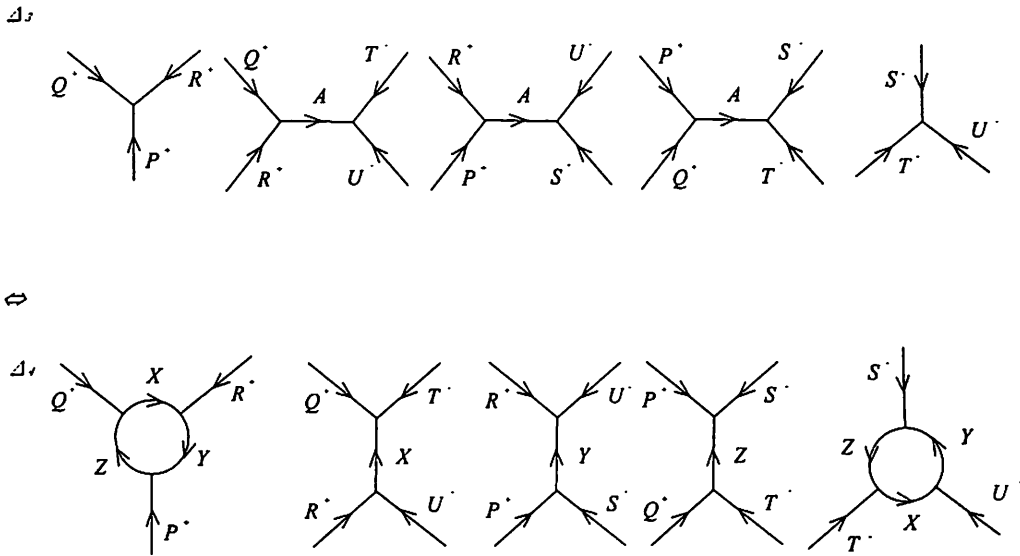


図 3: ex-Deformation of type II

この変形を Polyhedron で表すと次の図 4 のようになる。

Δ_1 に elementary ex-Deformation of type II を施して得られた Δ_2 も Extended DS diagram である。逆の操作を II^- と表し、これも elementary ex-Deformation of type II ということもある。

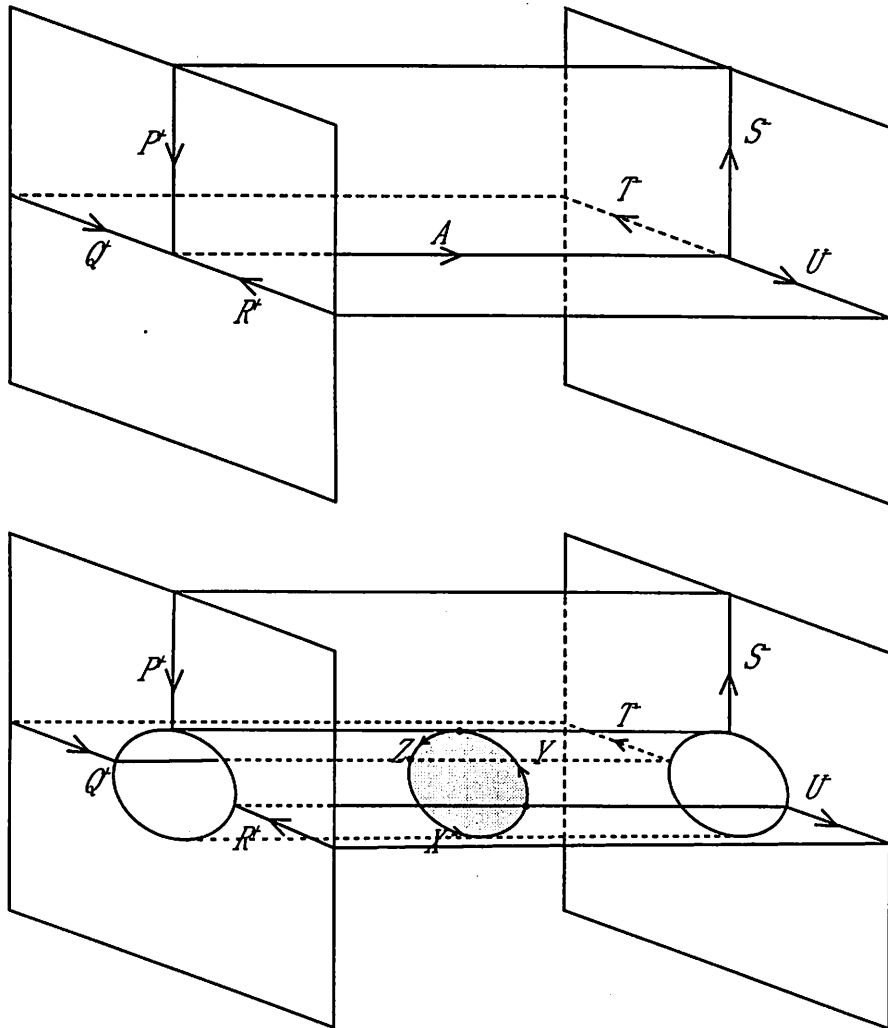


图 4: ex-Deformation of type II - polyhedron

定義 4

2つの Extended DS diagram Δ_1, Δ_2 が ex-DS isomorphic であるとは, elementary ex-Deformation of type I^\pm, II^\pm の有限回で お互いに移り合えるときをいう。

DS-diagram の変形との違いは, piping するときに, 禁止条件がないということ, すなわち, open 2-cell であることを保たなくてもよいことである。したがって次の図 5 のような変形も含む。(Polyhedron による変形のみをかく。)

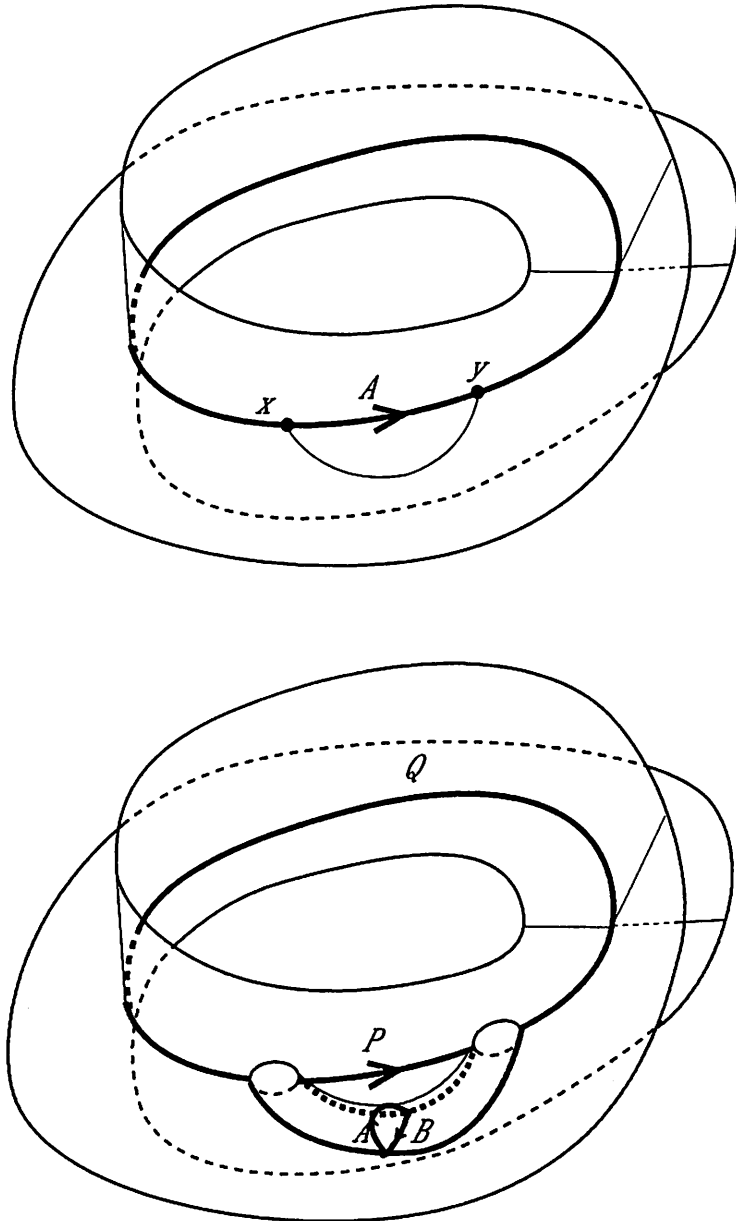


图 5: ex-Deformation of type I(special) - polyhedron

このとき、次の主定理が成り立つ。

定理 2

M_1, M_2 を 2 つの閉 3 次元多様体, Δ_1, Δ_2 をそれぞれ, M_1 から定まる *DS diagram*, M_2 から定まる *DS diagram* とする。

このとき, M_1 と M_2 が同相である必要十分条件は, Δ_1 と Δ_2 が *ex-DS isomorphic* であることである。

3 主定理の証明の概要

次の命題を使う。

命題 1

任意の *DS diagram* Δ に対して, Δ と *DS-isomorphic* な *DS diagram with E-cycle* Σ が存在する。

これは参考文献 1 を参照。

命題 2

M_1, M_2 を 2 つの閉 3 次元多様体, Σ_1 を M_1 から得られる *DS diagram with E-cycle*, Σ_2 を M_2 から得られる *DS diagram with E-cycle* とするとき, M_1 と M_2 が同相ならば, 次の 2 種類の変形の有限列で, Σ_1 から Σ_2 が得られる。

(1) *regular move I, II*

(2) *surgery move*

これらは参考文献 2 を参照。

注 1 *regular move I* で ES が生じるが, 実は, 例外になっている $3W^\pm$ なる例は出て来ない。

注 2 *Extended DS diagram with E-cycle* とは, E-cycle 付き *Extended DS diagram* のことを意味する。

石井の命題の *move* が *ex-Deformation* の有限列で得られることは箱根セミナー記録 1996 の横山『DS 変形の基本定理』を参照して下さい。

すなわち, Δ_1, Δ_2 を定理 2 の *DS diagram* とすると, E-cycle を付けるまでは, *DS diagram* の変形で, E-cycle 付き *DS diagram* にかえ, 石井氏の *regular move* で (*regular move I* で) *ex-DS diagram* になることがある。しかし E-cycle が付いていることは崩さないで, 例外となる $3W^\pm$ の type は出て来ない。

[補 足] 河野氏による定理 1 の証明

いくつかの補題を証明しながら定理を証明しよう。

補題 1 $ES \Sigma = (S, G, f)$ に対し $L(\Sigma)$ は 2-type のラベルを持たない。

証明 ラベル $2C$ をもつ edge はその両側が identify されざるを得ない。このとき残りのラベル C を持つ edge はその両側で identify されるので、これは f が local homeomorphism であることに反する。 ■

$ES \Sigma = (S, G, f)$ が与えられると、 $S - G$ 上の free involution τ が以下の様に決まる： $p \in S - G$ に対し $f^{-1}f(p) = \{p, p'\}$ とするとき、 $\tau(p) = p'$ とする。この Σ から決まる involution を $\tau(\Sigma)$ という記号で表わす。

グラフ G の regular neighborhood $U(G)$ を 1 つ固定し、 f を同値の範囲で取り換えて、 $U(G) - G$ が $\tau(\Sigma)$ で不変になるようにする。 $\tau(\Sigma)$ を $S - \overset{\circ}{U}(G)$ に制限したのも同じ記号で表す。 $U(G)$ に block bundle の構造を入れ、 f を同値の範囲で更に取り換えて、(レベルもこめて) block bundle の構造を保っているようにする。以下出てくる f, f' などの identification map はこの条件を満たしているものと仮定する。

(1-) ラベル付きグラフ (S, G, g) が与えられると $U(G)$ の block bundle の構造から $\partial U(G)$ がラベル付けられていると考えることができる。ただし、3-type のラベルの付いている edge は 3 つの block の境界になっているものとする。 G の edge は $\partial U(G)$ 上に対応する edge を 2 つもつがその edge 同士を twin と呼ぶことにする。

この free involution $\tau(\Sigma)$ は 1) $L(\Sigma)$ のラベル付けと compatible, つまり $\tau(\Sigma)$ は $\partial U(G)$ 上ラベル付き edge を向きも含め同じラベル付きの edge に写す 2) $\tau(\Sigma)$ は twin edge 同士を写さない、の 2 つの性質を持っている。

逆に (1-) ラベル付きグラフ $L = (S, G, g)$ に対し $S - \overset{\circ}{U}(G)$ 上の free involution τ が存在して、

1) τ は L のラベル付けと compatible で 2) τ は twin edge 同士を写さないとする。この involution を L と compatible な free involution と呼ぶ。このときある $ES \Sigma = (S, G, f)$ が存在して、 $L = L(\Sigma)$ かつ $\tau = \tau(\Sigma)$ となっている。このことを補題の形で述べておく。

補題 2 $ES \Sigma = (S, G, f)$ に対し $\tau(\Sigma)$ は $L(\Sigma)$ と compatible な free involution である。逆にラベル付きグラフ $L = (S, G, g)$ に対し L と compatible な free involution τ が存在するとき、 $ES \Sigma = (S, G, f)$ が存在して、 $L = L(\Sigma), \tau = \tau(\Sigma)$ が成立する。

F_1, F_2 を同相な surface で $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ を満たすものとし、 τ を F_1 から F_2 への同相写像とする。 $\overset{\circ}{F}_2$ 内の loop c に対し T_c を c に沿った Dehn twist とする。

τ_1 を $\tau_1(x) = \begin{cases} \tau(x) & (x \notin \tau^{-1}(U(c))) \\ T_c\tau(x) & (x \in \tau^{-1}(U(c))) \end{cases}$ とする。 τ, τ_1 を $F = F_1 \cup F_2$ 上の involution になるように拡張しておく。この変形を「 c に沿った基本 Dehn 変形」と呼び、 τ_1 は τ から c に沿った基本 Dehn 変形で得られるという。ES $\Sigma = (S, G, f)$ に対し $\tau = \tau(\Sigma)$ を考える。 $S - \overset{\circ}{U}(G)$ のある成分 F_1 に対し $F_2 = \tau(F_1)$ とする。 $\overset{\circ}{F}$ 内に loop c をとり $\tau|_{F_1 \cup F_2}$ から c に沿った基本 Dehn 変形で得られる involution を τ_1 とする。 $F_1 \cup F_2$ の部分は τ_1 それ以外は τ で与えられる involution を τ' とすると τ' は $L = L(\Sigma)$ と compatible な free involution になっている。

ラベル付グラフ $L(\Sigma)$ とこの involution τ' に対し、補題 2 より、ES $\Sigma' = (S, G, f')$ で $L(\Sigma) = L(\Sigma')$, $\tau' = \tau(\Sigma')$ となるものが存在する。このとき $M(\Sigma')$ は $M(\Sigma)$ から $f(c)$ に沿った ± 1 Dehn surgery で得られる。

また c は B で proper な 2-disc D を張っている。 $f(c)$ は $M(\Sigma)$ で 2-disc $f(D)$ を張るので、 $f(c)$ は trivial knot である。trivial knot に沿った Dehn surgery は多様体を変えないので $M(\Sigma) \cong M(\Sigma')$ が成立する。これらを補題の形で書いておく。

補題 3 2つの ES $\Sigma = (S, G, f)$ と $\Sigma' = (S, G, f')$ を考える。

c を $S - U(G)$ 内の loop とする。 $\tau' = \tau(\Sigma')$ が $\tau = \tau(\Sigma)$ から c 沿った基本 Dehn 変形で得られるとき、 $M(\Sigma')$ は $M(\Sigma)$ から $f(c)$ に沿った Dehn surgery で得られる。逆に $M(\Sigma')$ は $M(\Sigma)$ から $f(c)$ に沿った Dehn surgery で得られるならば、 $\tau' = \tau(\Sigma')$ は $\tau = \tau(\Sigma)$ から c に沿った基本 Dehn 変形で得られる。

このとき特に $M(\Sigma') \cong M(\Sigma)$ が成立する。

以上により次の命題を示せば定理が証明できる。

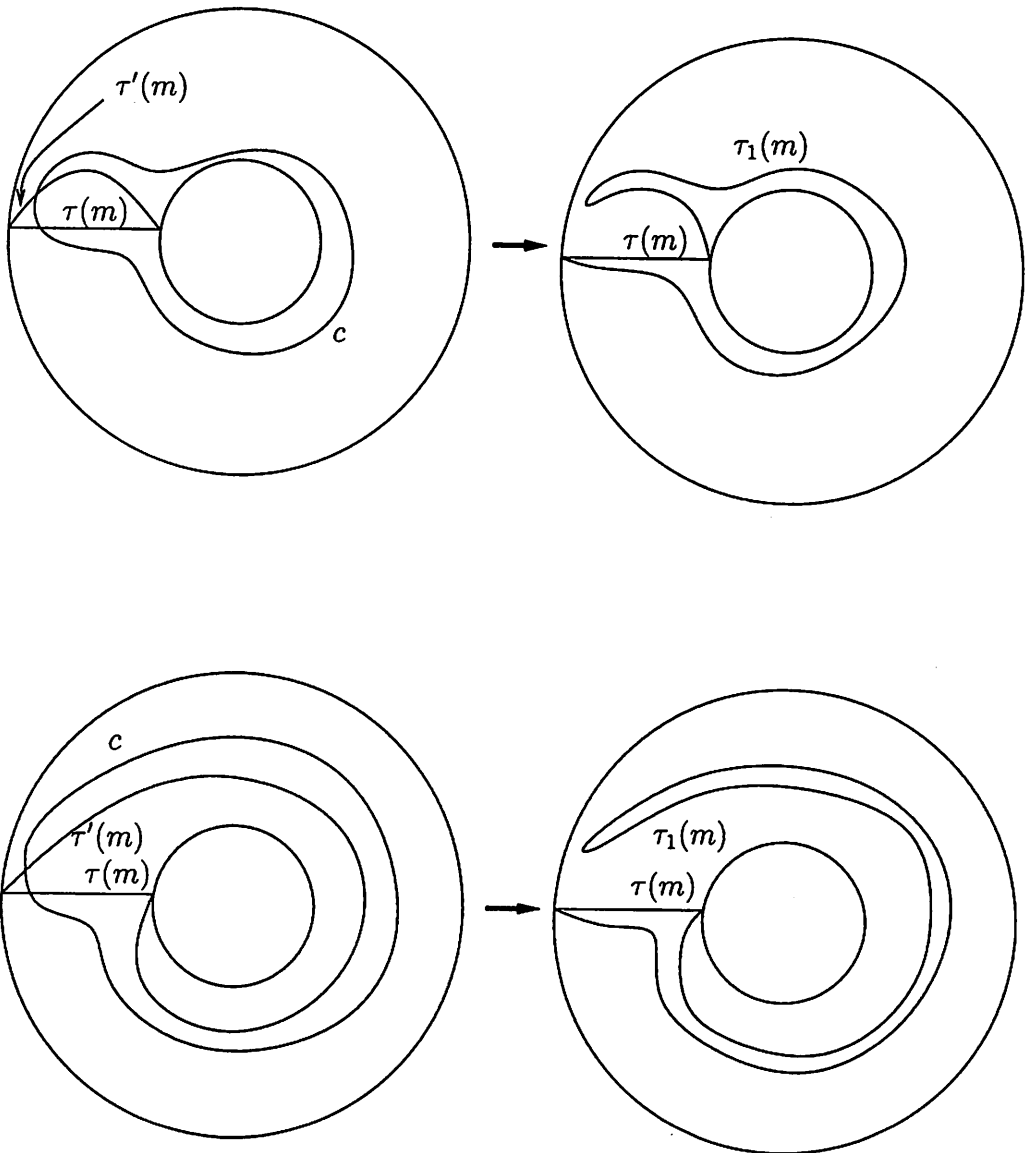
命題 3 F_1, F_2 を planer surface with boundary で τ, τ' を $\tau(F_1) = F_2$ を満たす $F = F_1 \cup F_2$ 上の free involution で $\tau|_{\partial F} = \tau'|_{\partial F}$ を満たすとす。このとき τ は τ' から有限回の基本 Dehn 変形で得られる。ここで isotopic (rel ∂) な homeomorphism は同じと見ている。

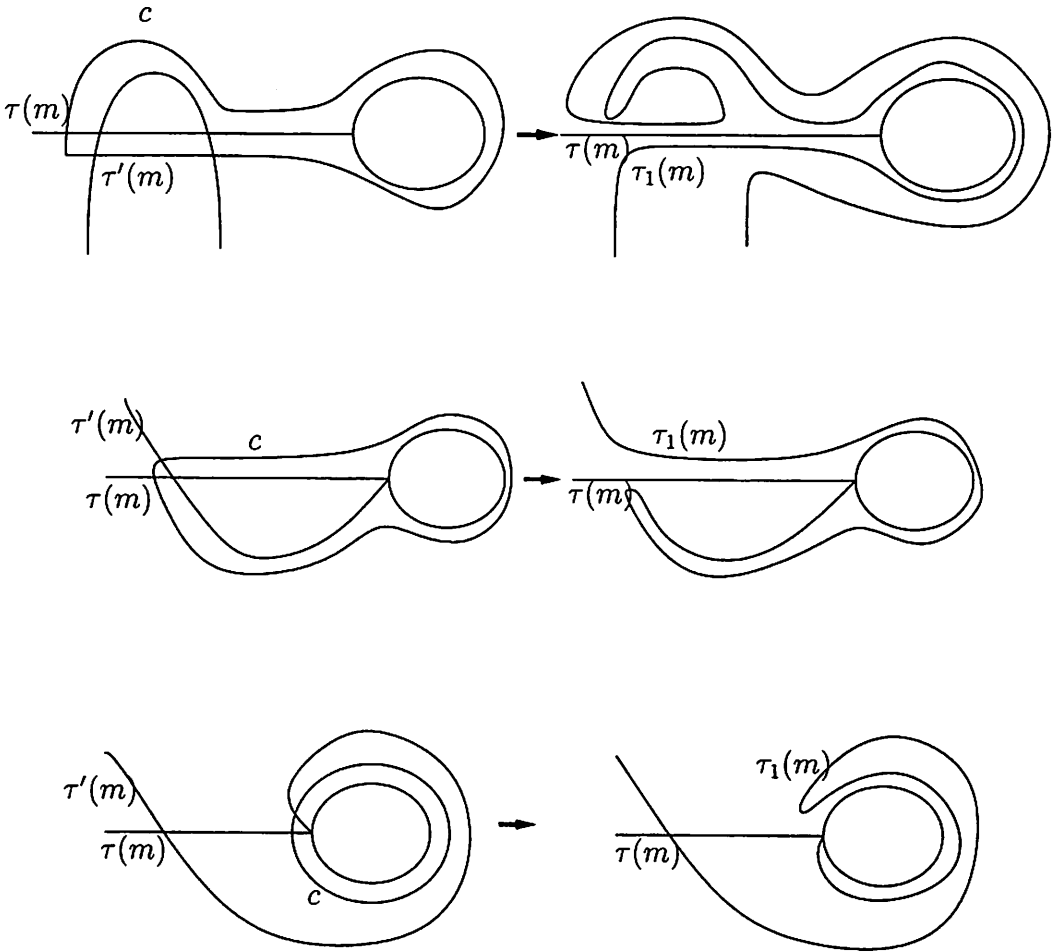
証明 $\#(\partial F_1)$ (∂F_1 の component の数) についての帰納法で示す。

- (1) $\#(\partial F_1) = 1$ のとき、 F_1 は disc なので τ, τ' は isotopic。よって成立する。
- (2) $\#(\partial F_1) < n$ のとき成立を仮定する。今 $\#(\partial F_1) = n$ とする。 F_1 上に proper な arc m をとる。
 (2-0) $\tau(m) \cap \tau'(m)$ が 2 点で $\tau(m)$ と $\tau'(m)$ が isotopic (rel ∂) のとき：isotopy で変形することにより $\tau(m) = \tau'(m)$ と仮定できる。 $F'_1 = F_1 - \overset{\circ}{U}(m)$, $F'_2 = \tau(F'_1)$ に対し帰納法の仮定を適応すれば事により、 τ, τ' に関しても成立することが分かる。

(2-1) $\tau(m) \cap \tau'(m)$ が 2 点のとき：図 3,3 の c に沿って τ' に対し基本 Dehn 変形を行う。この結果できる involution を τ_1 とする (以下同じ)。図 3 の場合は更に図 3 の c にそって基本 Dehn 変形を行うことにより, (2-0) の場合に帰着できる。

(2-2) $\tau(m \cap \tau'(m))$ が 3 点以上のとき：図 3 の様な部分が存在したとすると, 図 3 の変形で intersection を減らす事ができる。よって intersection は同じ向きで起こっているとしてよい。このとき intersection が 3 点以上であれば, 図 3 または図 3 の様な部分が存在するのでやはり intersection を減らすことが出来る。





参考文献

- (1) H. Ikeda, M. Yamashita & K. Yokoyama "Remodeling a DS-diagram into one with E-cycle", Tokyo Jour. Math., vol. 23(2000), pp 113-135
- (2) I. Ishii "Flows and spines", Tokyo Jour. Math., vol. 9(1986), pp 505-525