

## DS-変形の基本定理

横山 和夫 (上智大学)

DS-diagram における基本的な定理である DS-diagram の基本変形の基本定理の証明が  
いたので報告します。

まず, DS-diagram の基本変形の基本定理を述べておく。

**定理 1 (DS-diagram の基本変形の基本定理)**

$M_1, M_2$ ; closed 3-manifolds

$\Sigma_i = \Sigma(M_i)$ ;  $M_i$  の DS-diagram

(1) もしも  $\Sigma_2$  が, 有限回の基本変形で  $\Sigma_1$  から得られた DS-diagram とすると,  $M_1 \cong M_2$

(2)  $M_1 \cong M_2$  ならば,  $\Sigma_2$  は, 有限回の基本変形で  $\Sigma_1$  から得られる。

DS-diagram の基本変形とは, 次のようであった。

**定義 1 (DS-diagram の基本変形)**

DS-diagram の基本変形 I とは次の図 1 の変形である。

DS-diagram の基本変形 II とは次の図 2 の変形である。

(14)

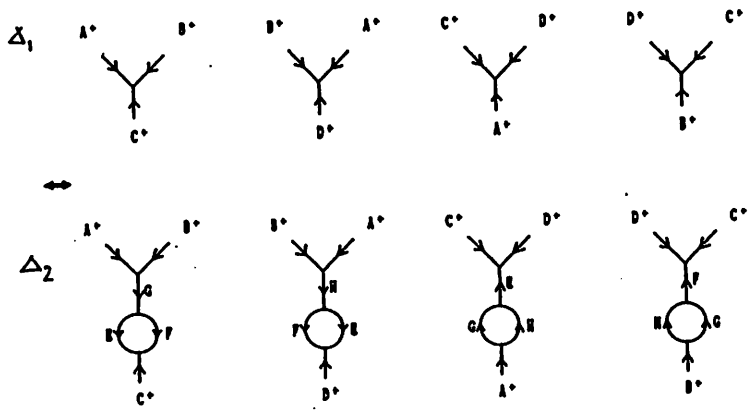
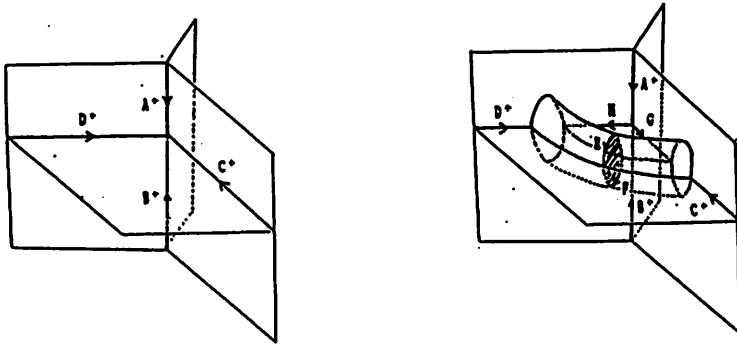


图 1 基本变形 I

乙

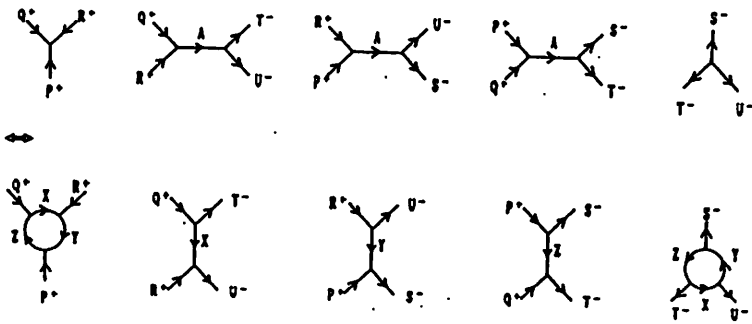
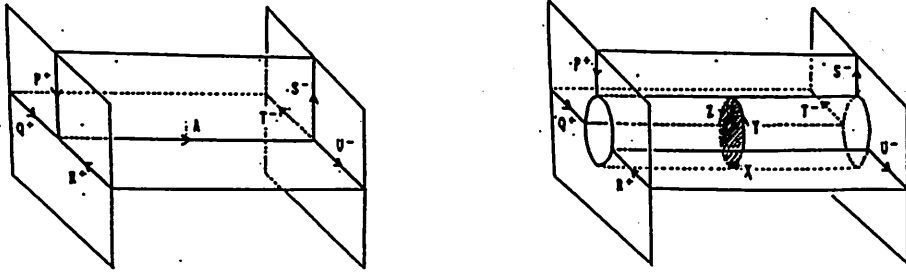


图 2 基本变形 II

(16)

次の定理が [6] において、証明された。

命題 1 任意の *DS-diagram*  $\Sigma$  に対して、 $\exists \Sigma'$ ; *E-cycle* 付き *DS-diagram*  
s.t.  $\Sigma'$  は有限回の基本変形で  $\Sigma$  から得られる。

また、石井 [5] によって、

命題 2 (石井)

$M_1, M_2$ ; *closed 3-manifolds*

$\Sigma_i = \Sigma(M_i)$ ;  $M_i$  から *flow spine* で得られる *DS-diagram* (*E-cycle* 付き *DS-diagram*)

$M_1 \cong M_2$  ならば、 $\Sigma_2$  は、有限回の *regular move* または *surgery move* で  $\Sigma_1$  から得られる。

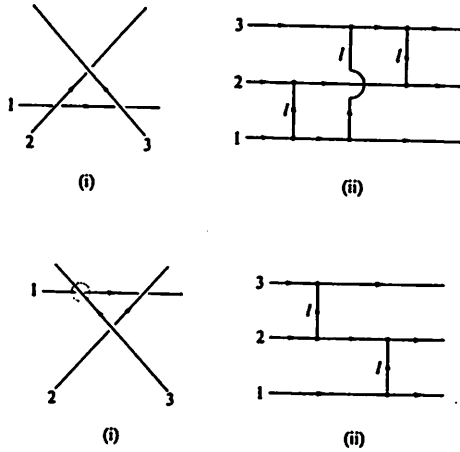
が示されている。

定義 2 *regular move* とは

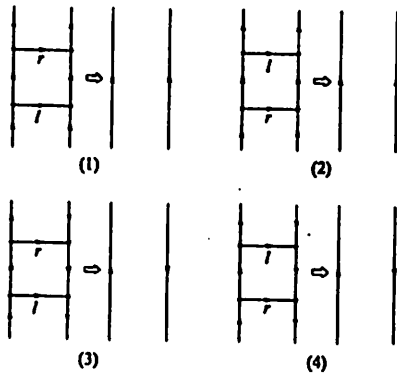
(1) the first *regular move*

(2) the second *regular move*

があり、*regular move* は、次の図に示される変形である。詳しくは、石井 [5] 参照。



☒ 3 : regular deformation of type I



☒ 4 regular deformation of type II

regular move は 明らかに DS-diagram の基本変形の有限列で得られる。

singular move とは closed orbit  $c$  の正則近傍である solid torus(solid Klein bottle) の中の心棒  $c$  の flow を反対向きにしそれに合うように solid torus(solid Klein bottle) の中の flow を変えたものである。詳しくは, 石井 [5] 参照。

従って 2 つの flow を比較してそれらから作られる DS-diagram がお互いに DS-diagram の基本変形で移り合う事を言えばよい。

すなわち,

補題 1 *singular move* は DS-diagram の基本変形の有限列で得られる。

示すせばよい。

### 向き付け可能な場合

一度には説明が難しいのでまず  $S^2 \times S^1$  について説明し、そのあとで本ものの solid torus の話を述べる。

まず  $S^2 \times S^1$  について, flow spin を作ってみよう。

まず, 普通に flow を流した時,

この時, non-singular flow ( $S^1$  の方向に並行に進む flow) on  $S^2 \times S^1$  に対して normal pair をなす compact local section  $\Sigma$  は

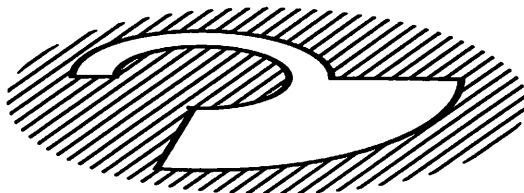


図 5: local section for flow of  $S^2 \times S^1$

次に, 中心の flow を反対に流した時,  
local section  $\Sigma$  は

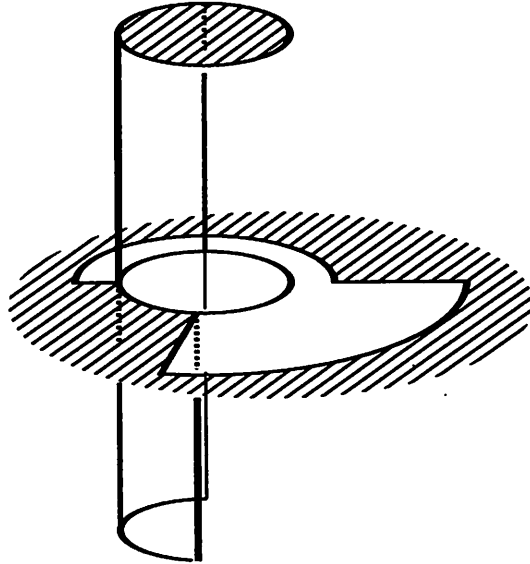
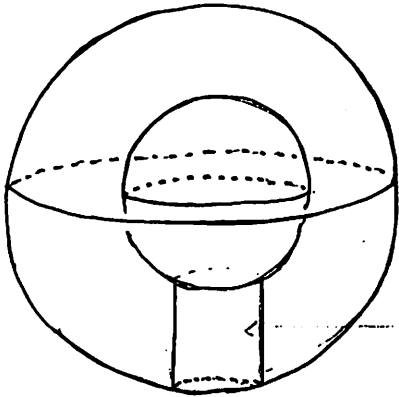


図 6: local section for opposite flow of  $S^2 \times S^1$

これに対する DS-diagram は、次の図 7 のように、spine を作ると、求められ、次の図 8 のようになる。

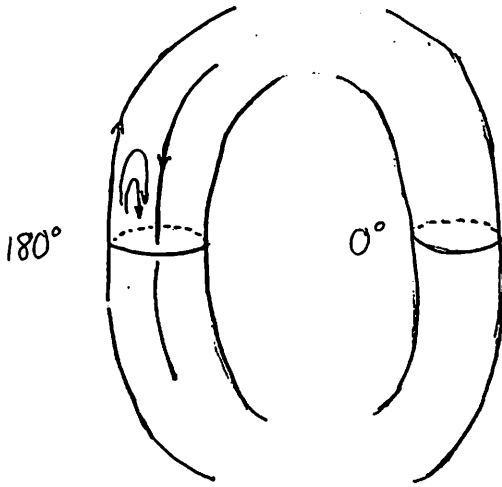
(20)



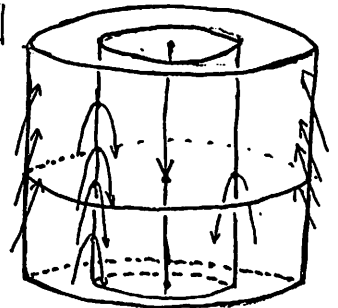
$$S^2 \times I / (x, 1) \sim (x, 0)$$

$$D^2 \times I / (x, 1) \sim (x, 0)$$

$$D^2 = \{ (a, b) \mid a^2 + b^2 \leq 1 \}$$



柱状



$$D^2 \times \{0\} \sim D^2 \times \{1\}$$

180°

flowの極(大)点  $D' = \{ (a, b) \mid a^2 + b^2 \leq \frac{1}{4} \} \subset D$  とすると  $\partial D' \times S^1$  にあるようになっている。よって flowは

となっているとす。



90°

180°



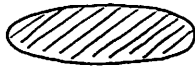
270°



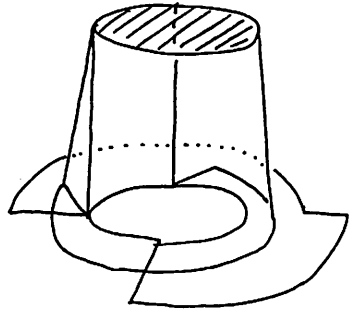
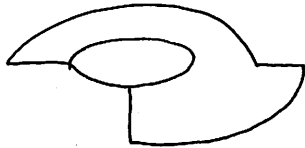


flowによるspineの作成

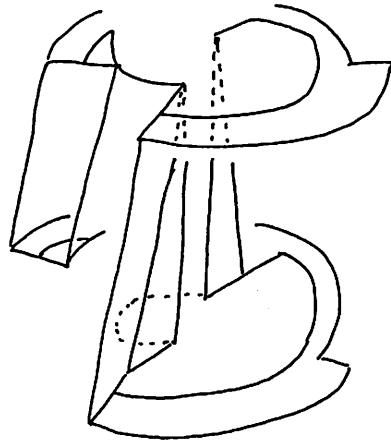
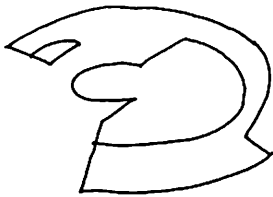
90°



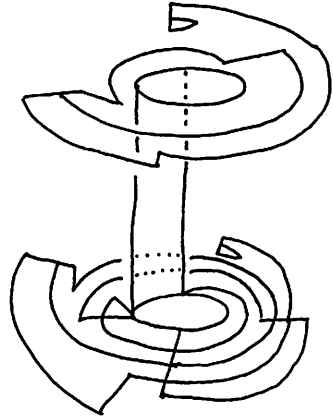
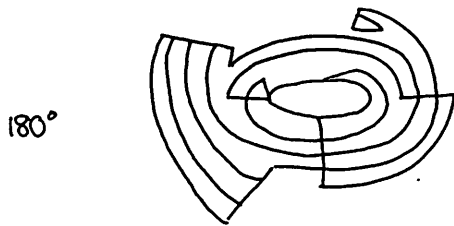
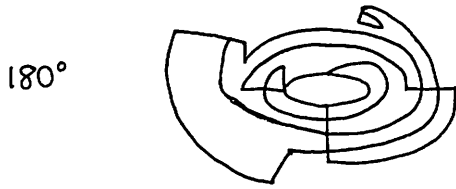
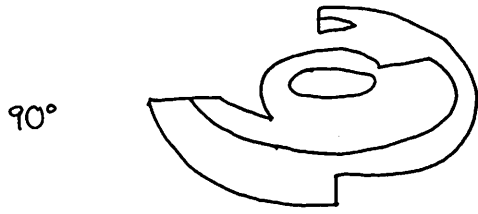
180°



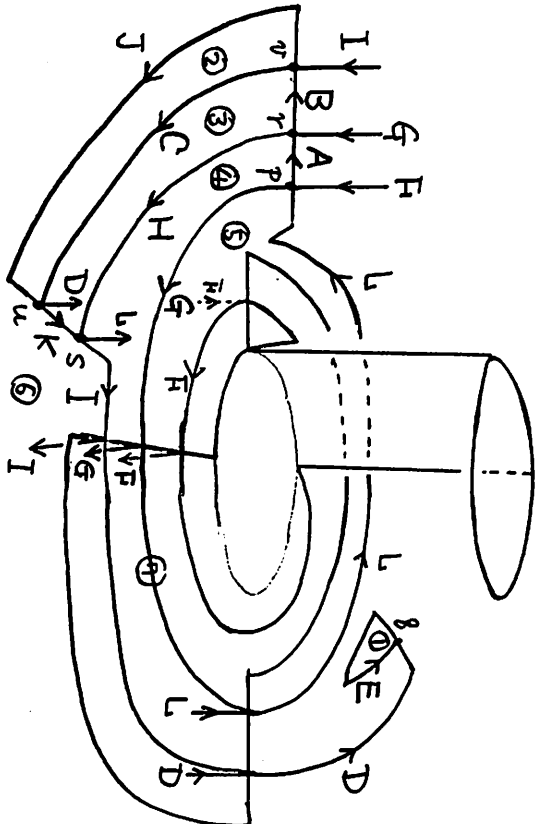
270°



(22)

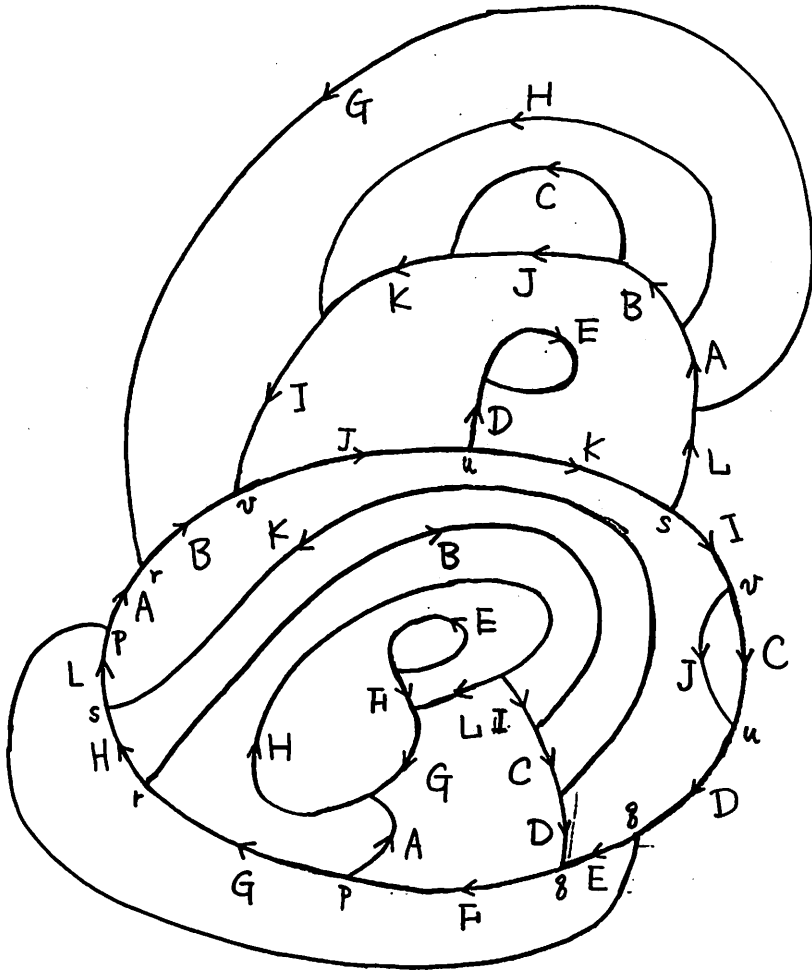


180°の所を詳しく書き edge に名前をつける



(24)

DS-diagram



☒ 8

次に、前に説明した solid torus について、  
local section  $\Sigma$  は

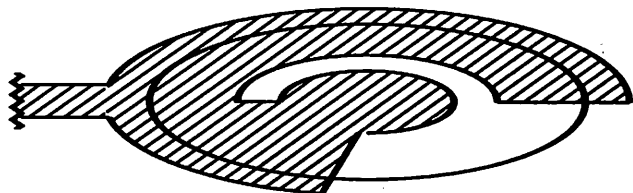


図 9: local section for flow of solid torus

さらに、solid torus の心棒だけ flow を反対に流した時、local section  $\Sigma$  は

(26)

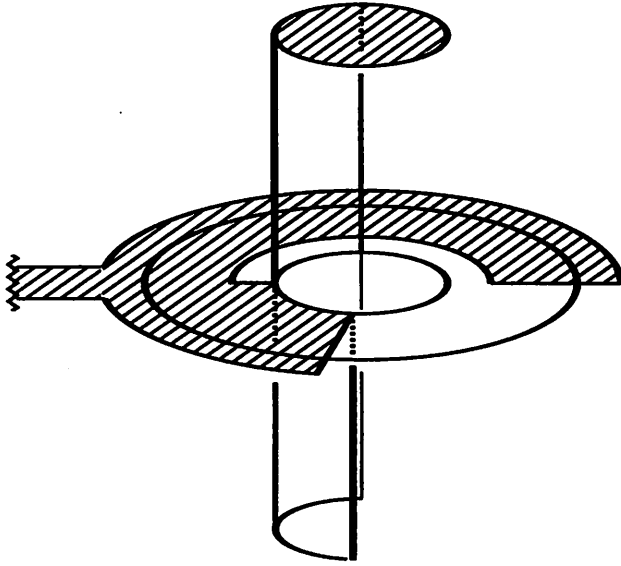


図 10: local section for opposite flow of solid torus

である。

この時、これらに対する DS-diagram は、上を参考にして、spine を作ると、求められ、次の図 11, 12 のようになる。

この DS-diagram (図 12) は次の変形によって、次の図の様に变形され、また 図 11 の DS-diagram も 次の図の様に变形されるので、向き付け可能のとき、証明できた。

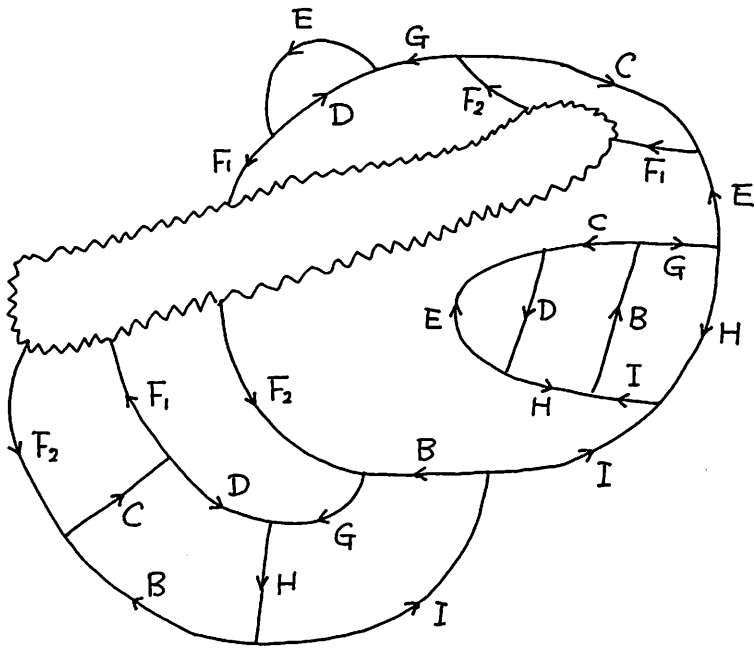


图 11 : DS-diagram (I)

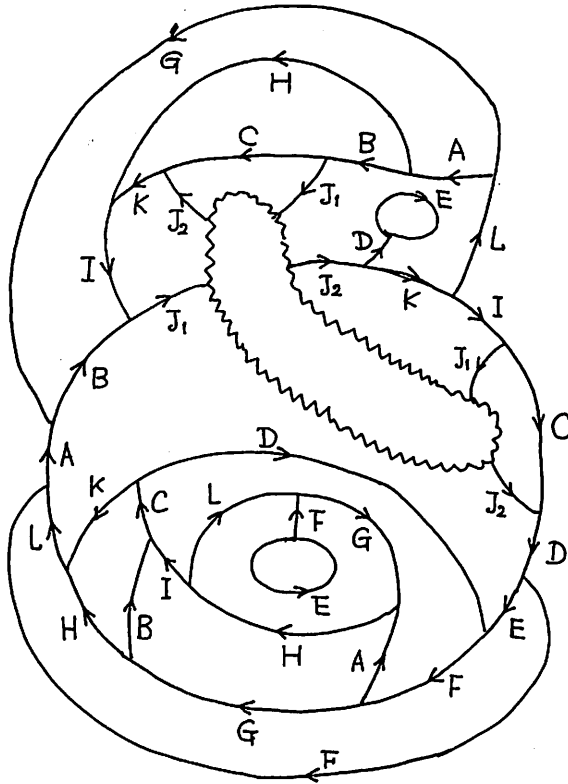
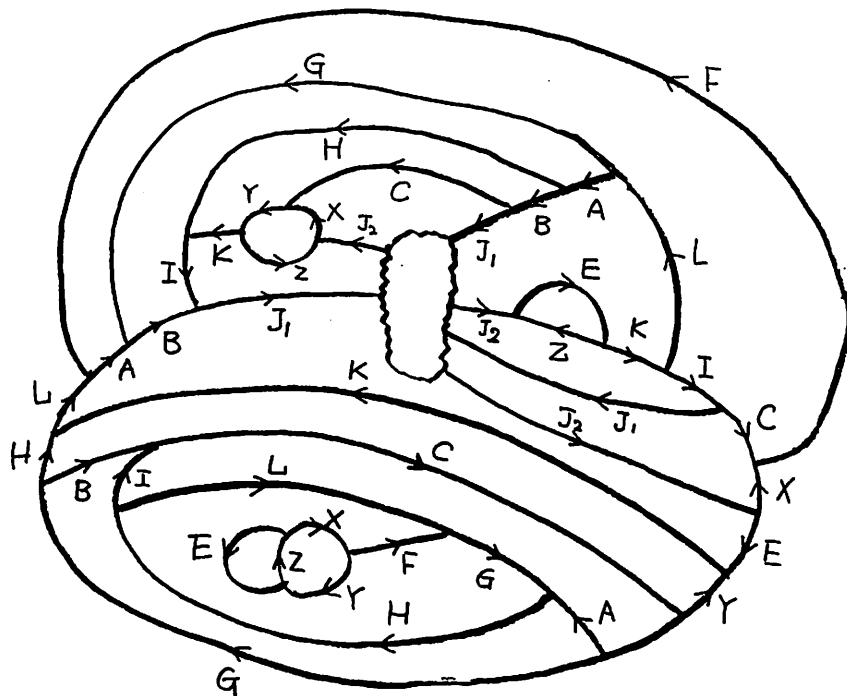


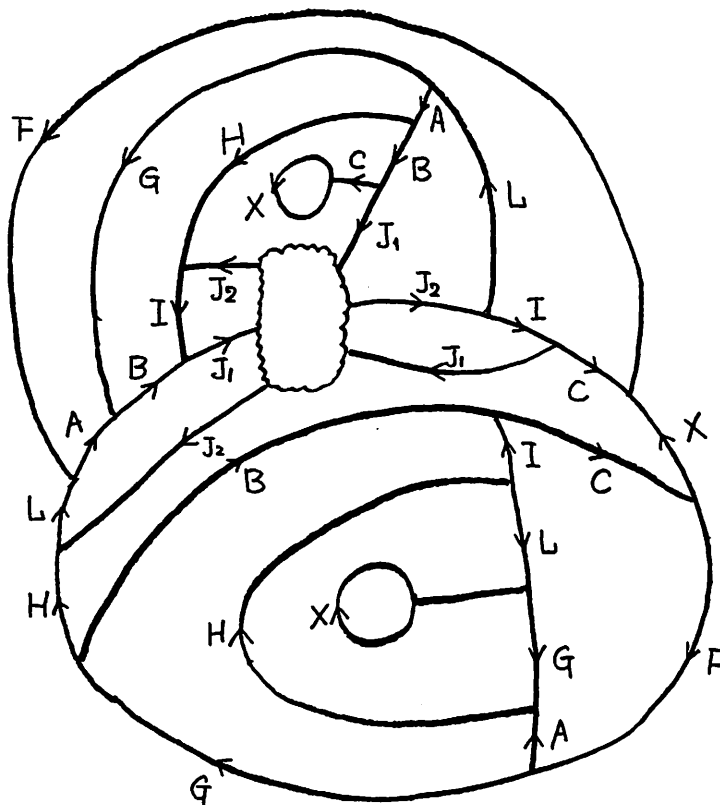
图 12B 的 DIS 图 (2)



$\Rightarrow$   
 $\Theta$

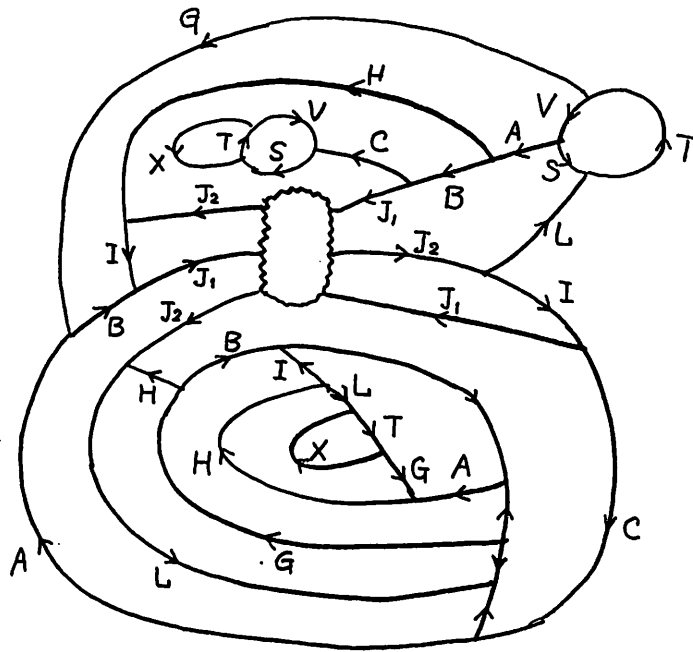


$\Rightarrow$   
 $\Xi$

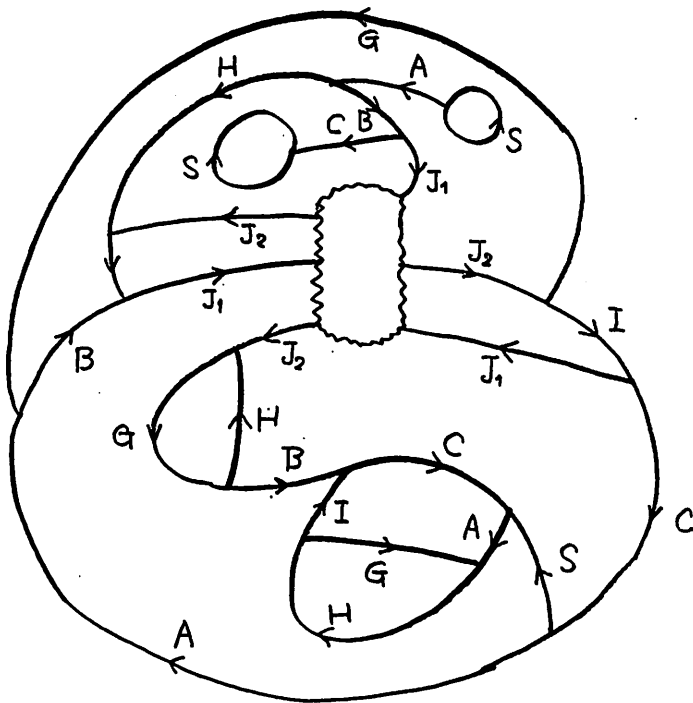


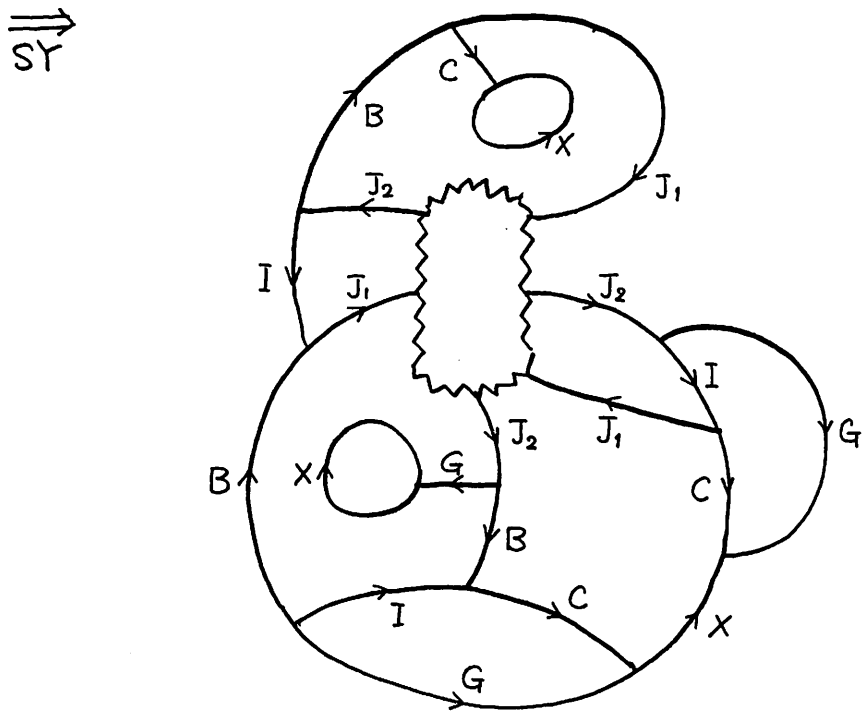
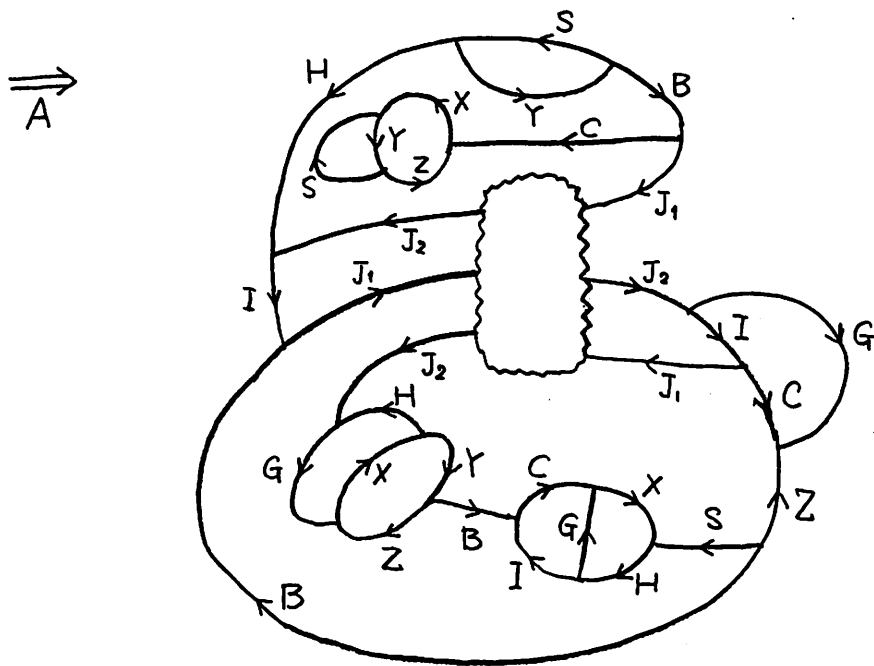
(30)

$\Rightarrow$   
II



$\Rightarrow$   
XT





(32)

$\Rightarrow$   
 $ICG^{-1}$

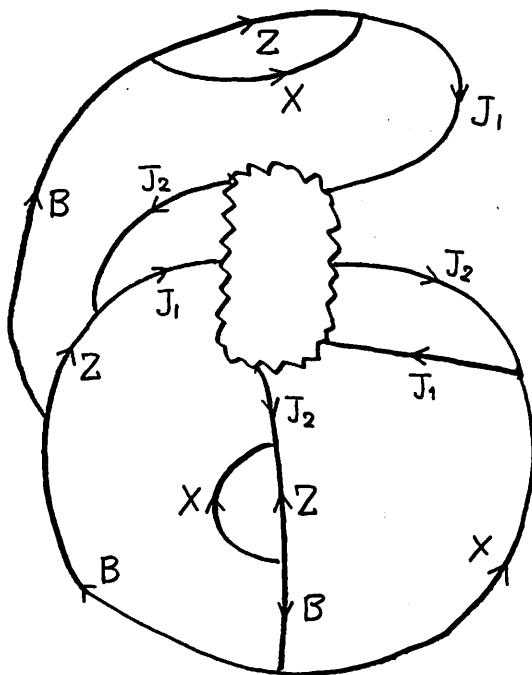
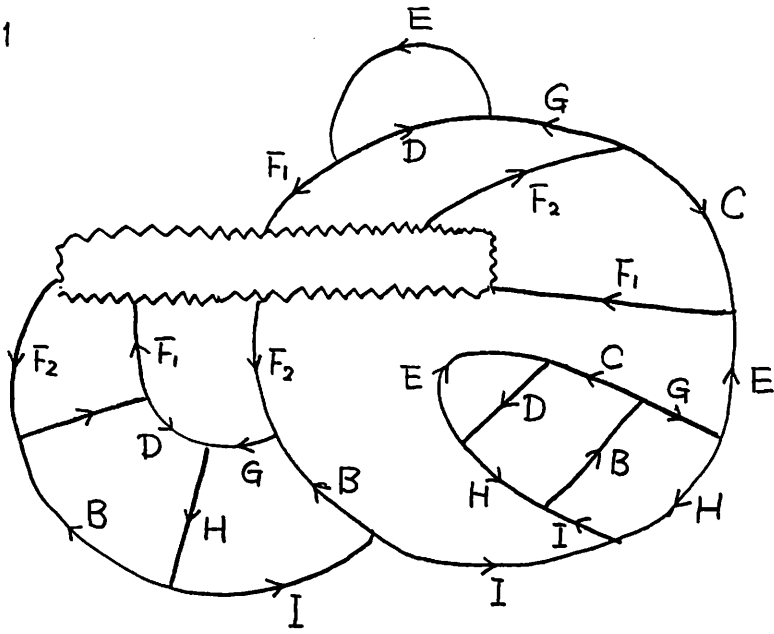
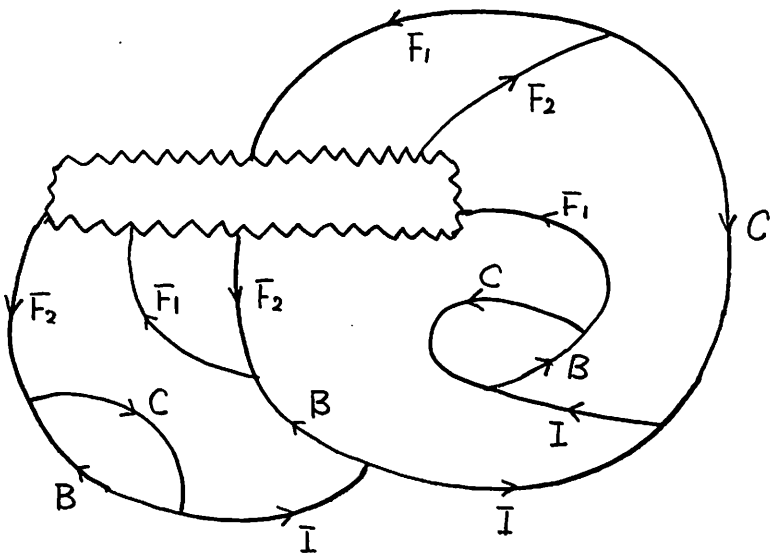


图 11



⇒



(34)

## 向き付け不可能な場合

一度には説明が難しいのでまず  $S^2 \times S^1$  について説明し、そのあとで本ものの solid Klein bottle の話を述べる。

まず  $S^2 \times_r S^1$  について, flow spin を作ってみよう。

まず, 普通に flow を流した時,

この時, non-singular flow ( $S^1$  の方向に並行に進む flow) on  $S^2 \times_r S^1$  に対して normal pair をなす compact local section  $\Sigma$  は

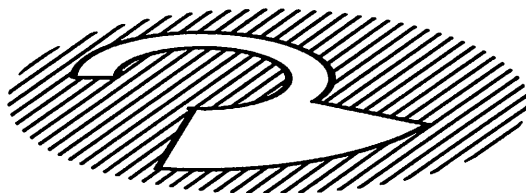


図 13: local section for flow of  $S^2 \times_r S^1$

次に, 中心の flow を反対に流した時,  
local section  $\Sigma$  は

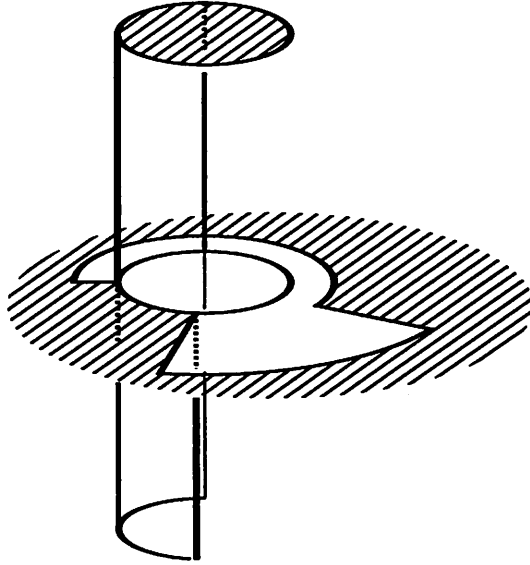
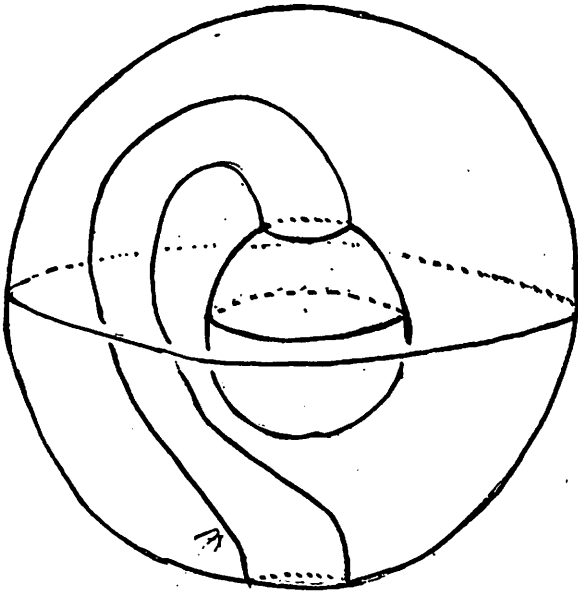


図 14: local section for opposite flow of  $S^2 \times_r S^1$

これに対する DS-diagram は、次の図 15 のように、spine を作ると、求められ、次の図 16 のようになる。

(36)



solid Klein bottle

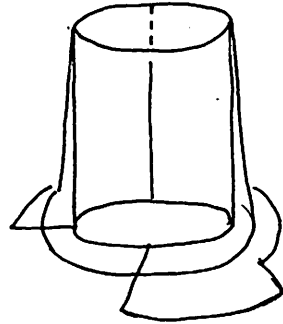
$$\begin{array}{ccc} f: S^2 & \rightarrow & S^2 \\ \psi & & \psi \\ x & \mapsto & -x \end{array}$$

$$S^2 \times I / (x, 0) \sim (f(x), 1)$$

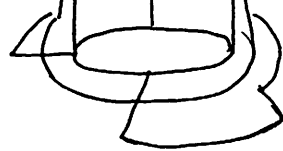
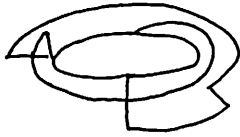


fake surface の作成

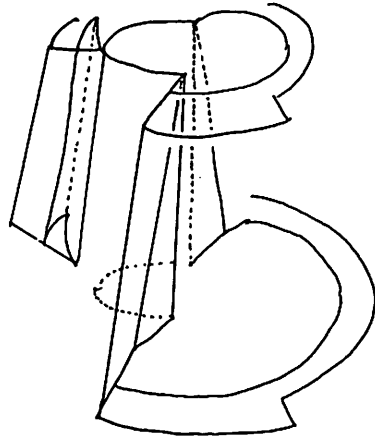
90°



180°



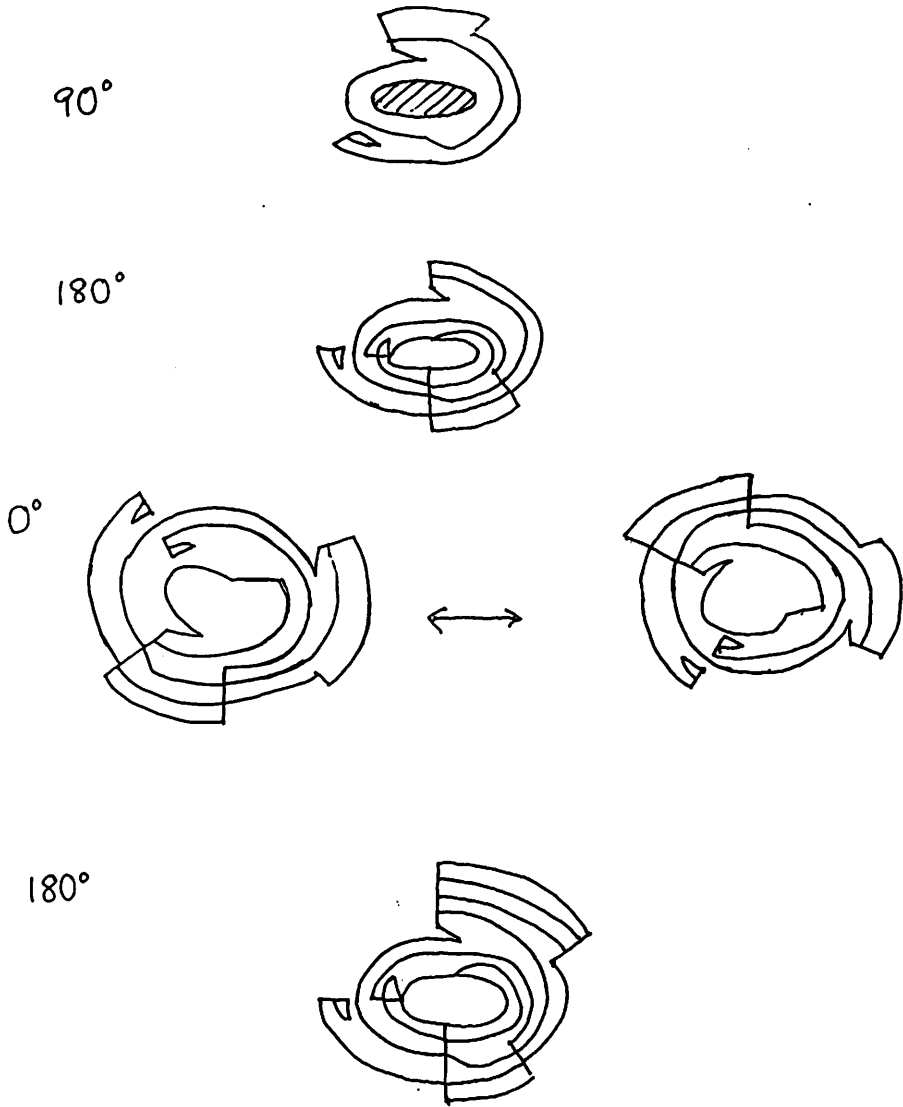
270°



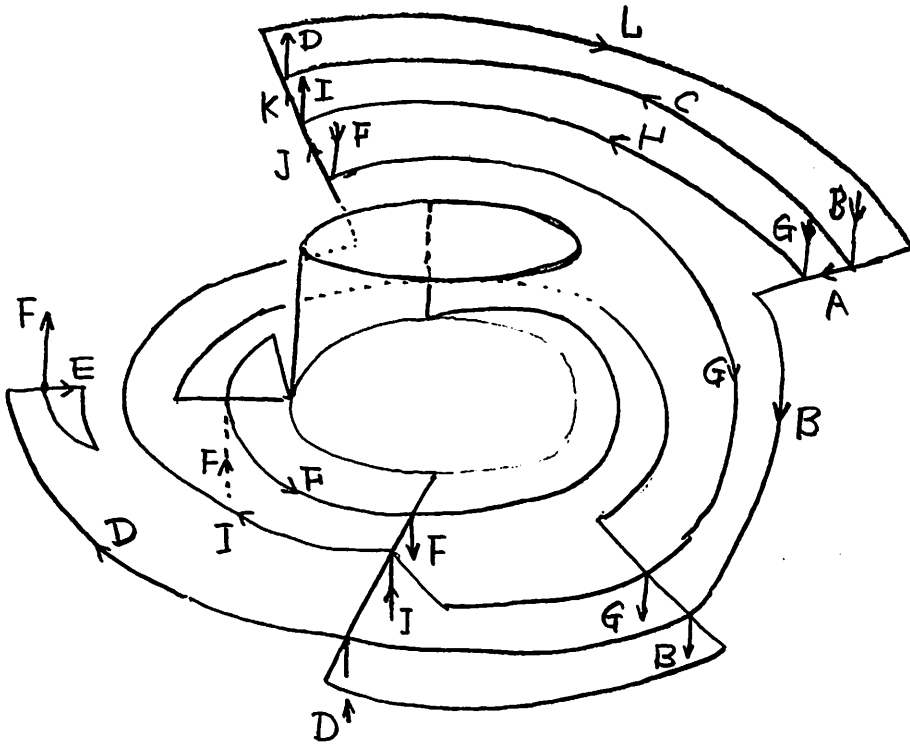
0°



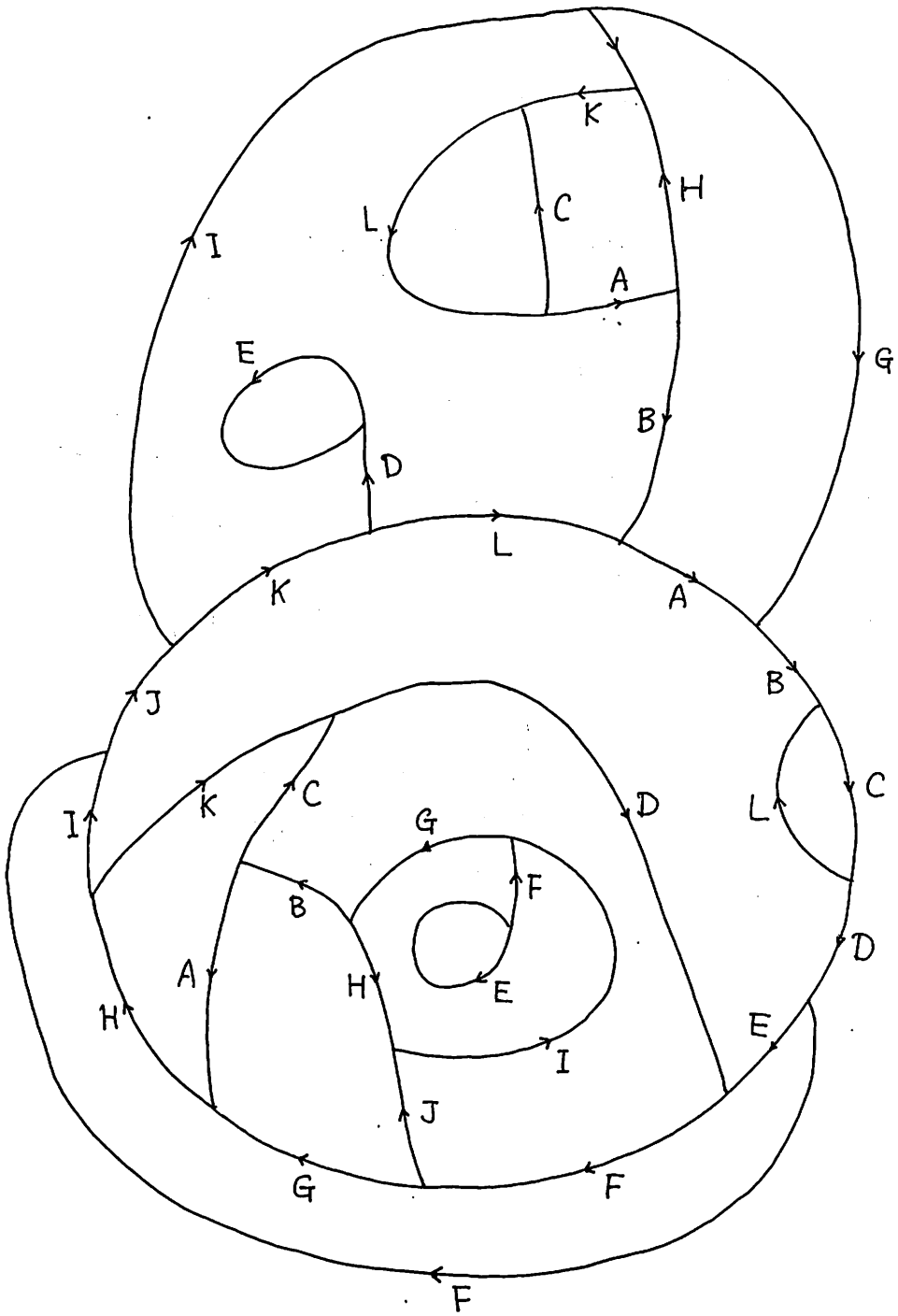
(38)



180°の所を詳しく書き edge に名前をつけると



(40)

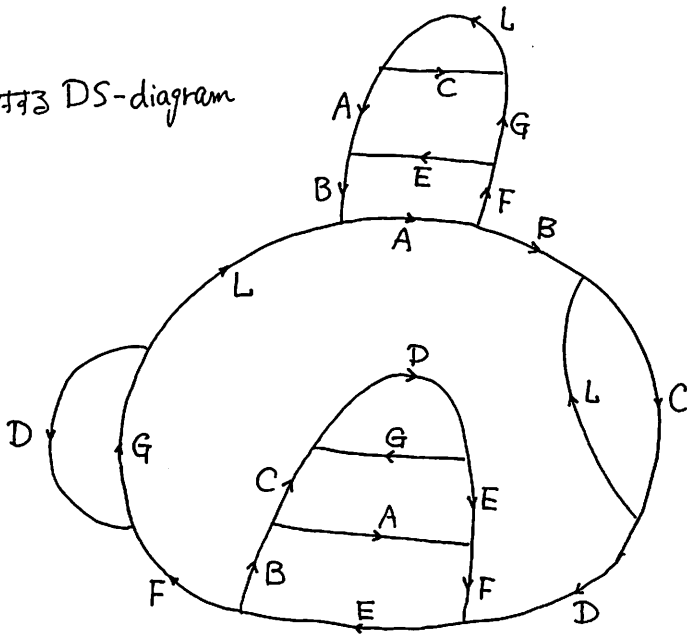


☒ 16

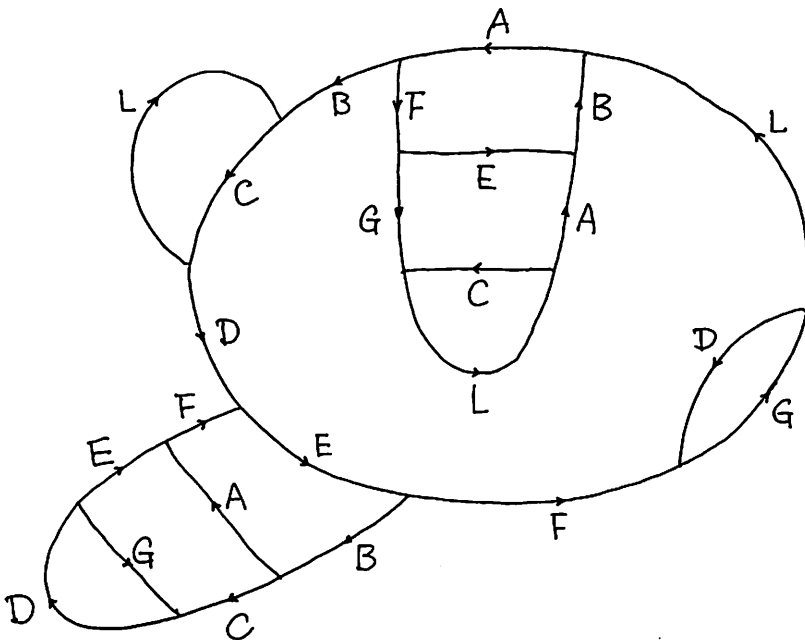
28

参考

図13に対応する DS-diagram



→



(42)

次に、前に説明した solid Klein bottle について、  
local section  $\Sigma$  は

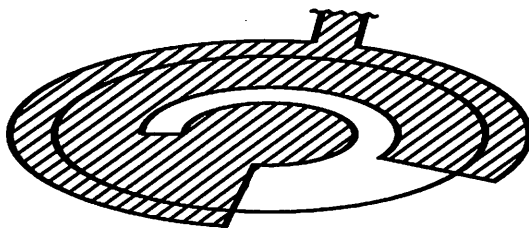


図 17: local section for flow of solid Klein bottle

さらに、solid Klein bottle の心棒だけ flow を反対に流した時、local section  $\Sigma$  は

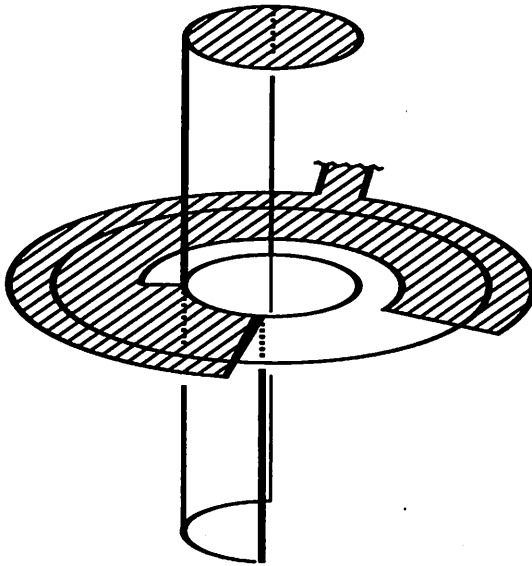


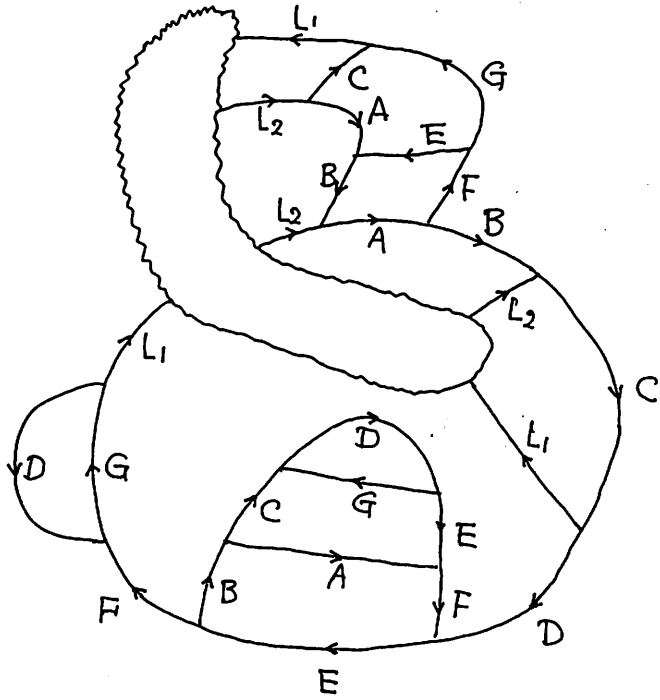
図 18: local section for opposite flow of solid Klein bottle

である。

この時、これらに対する DS-diagram は、上を参考にして、spine を作ると、求められ、次の図 19, 20 のようになる。

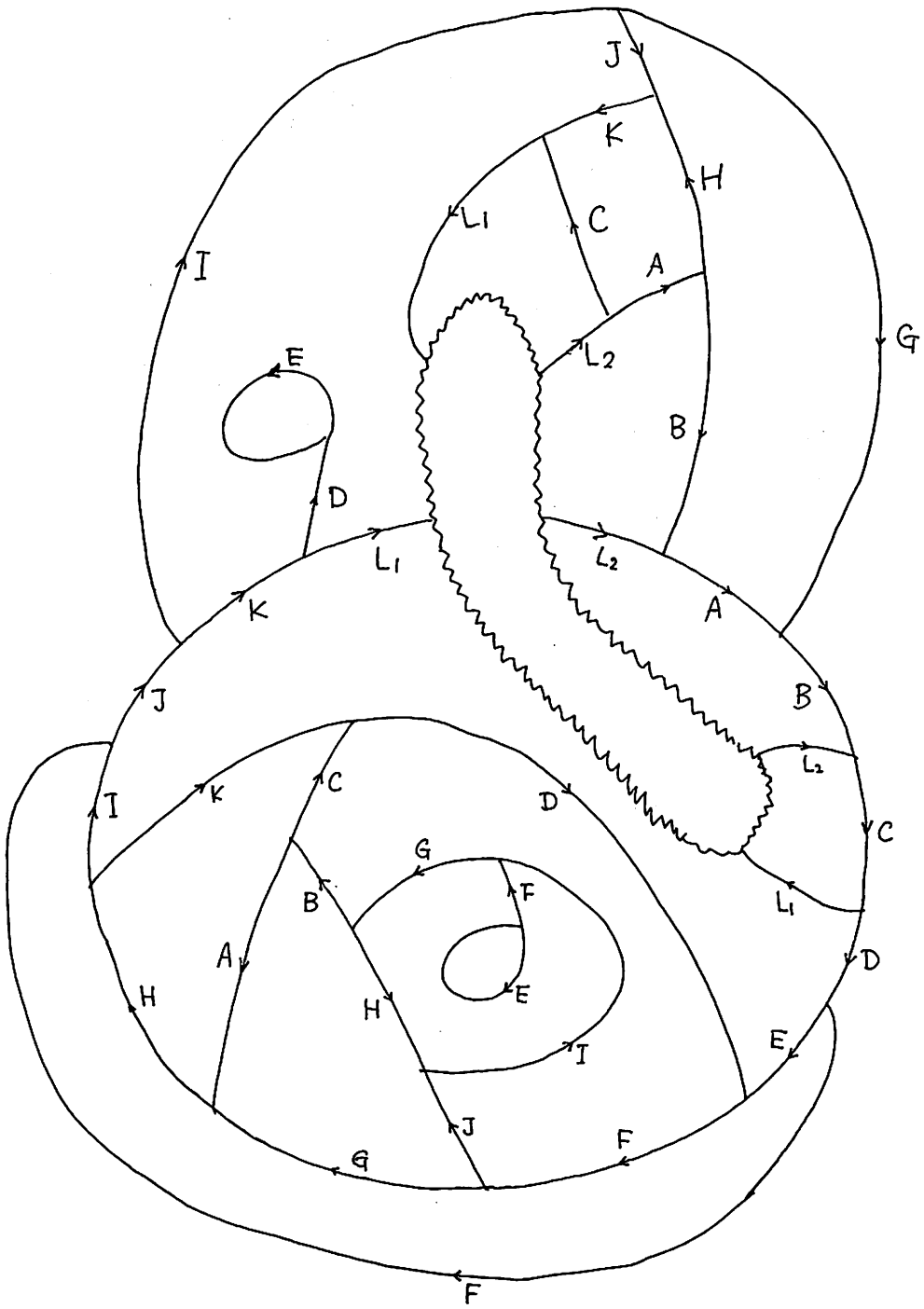
この DS-diagram (図 20) は次の変形によって、次の図の様に变形され、また 図 19 の DS-diagram も 次の図の様に变形されるので、証明できた。

(44)



□ 19

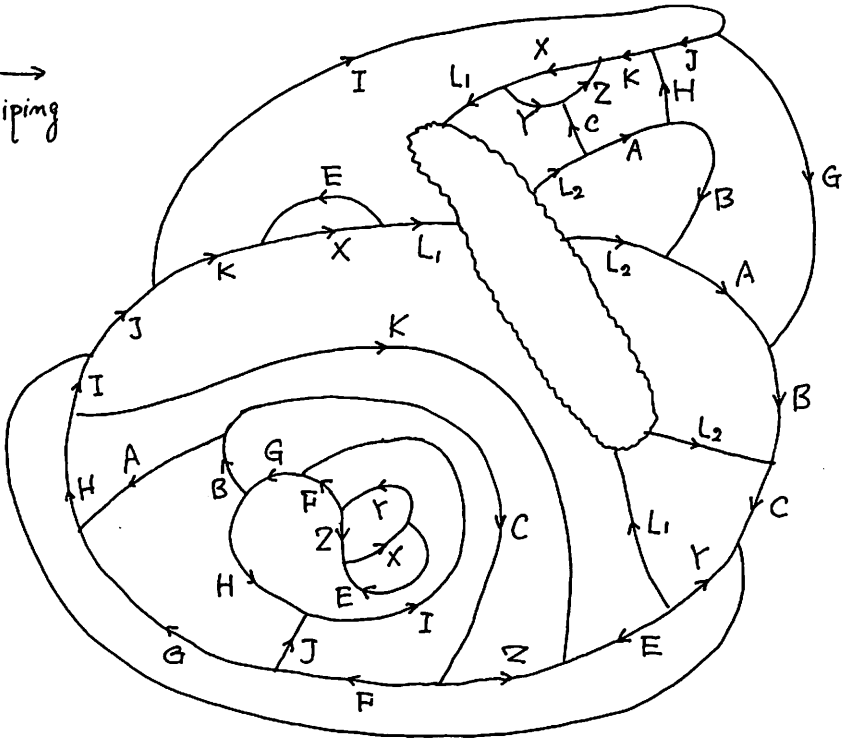




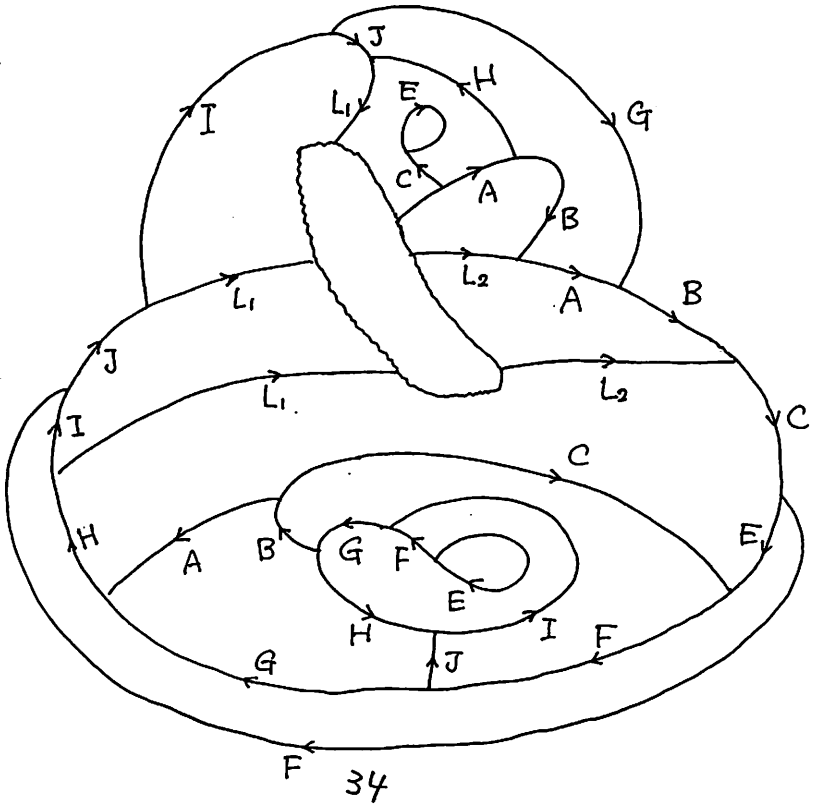
20  
33

(46)

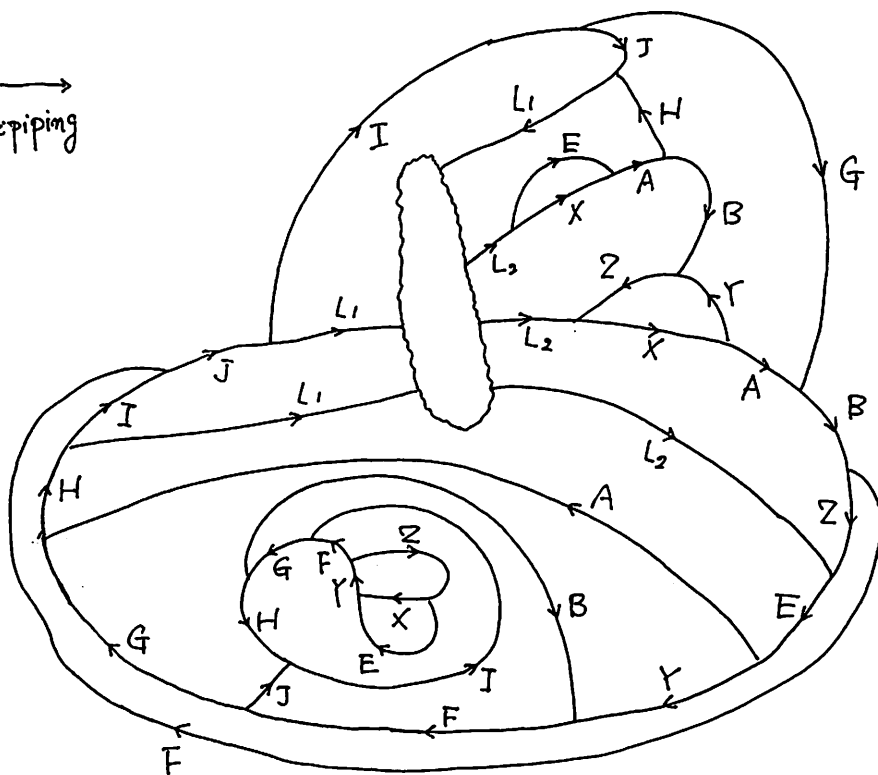
→  
Dzipping



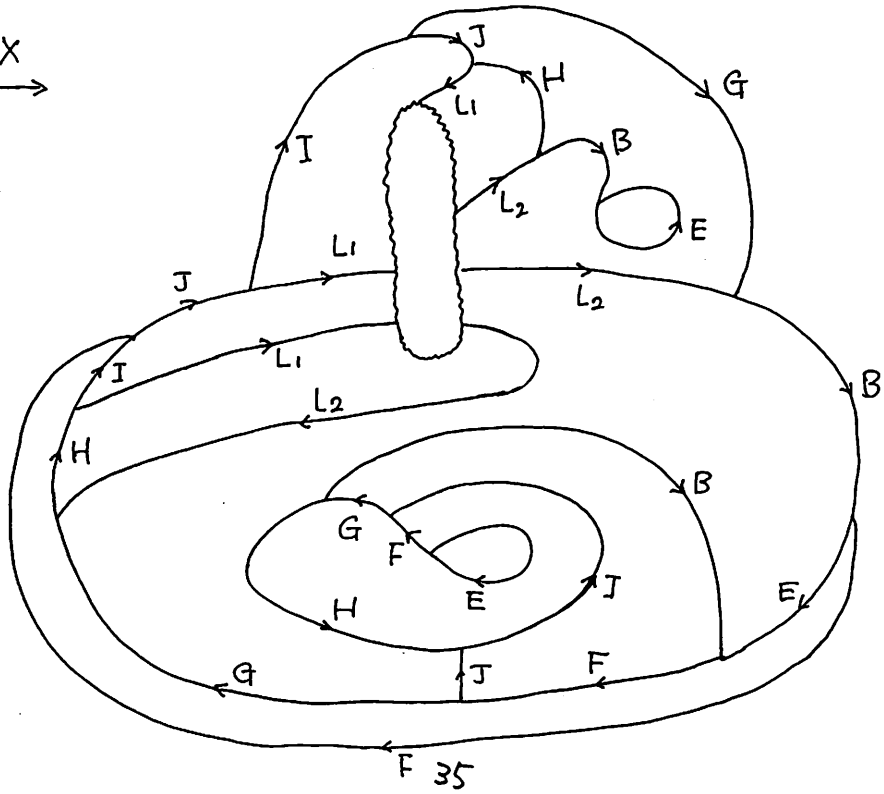
EX →



→  
Crippling



EX  
→



(48)

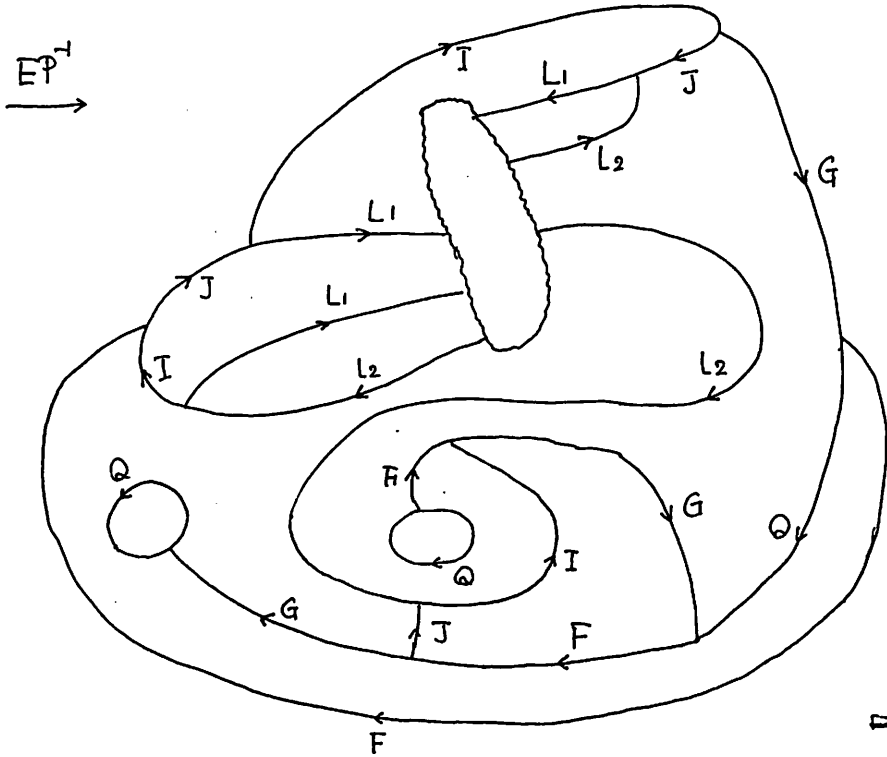
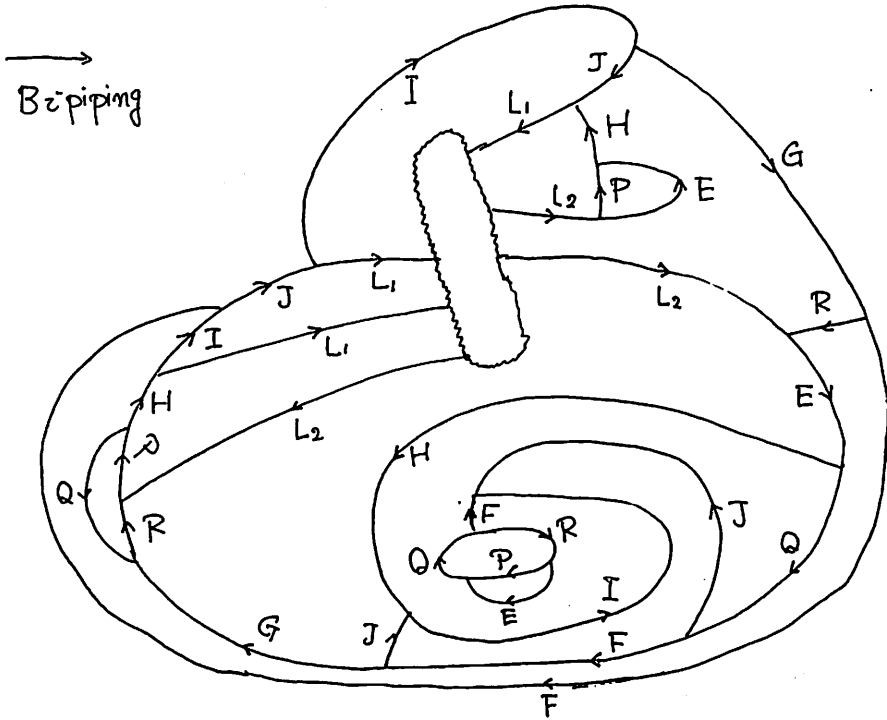
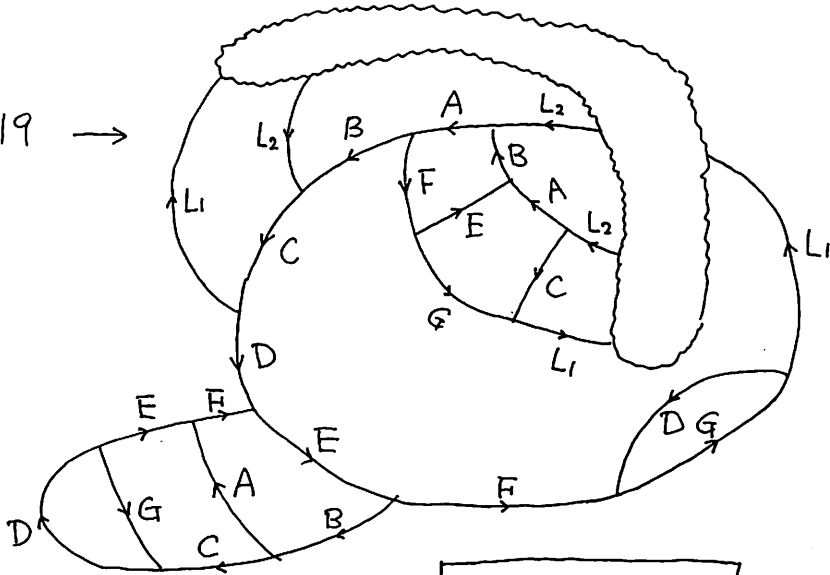
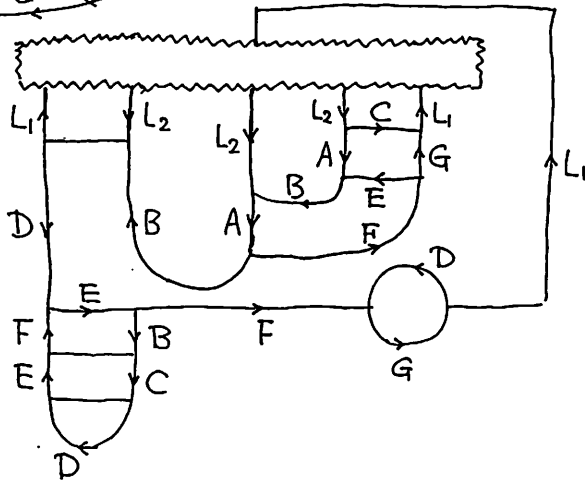


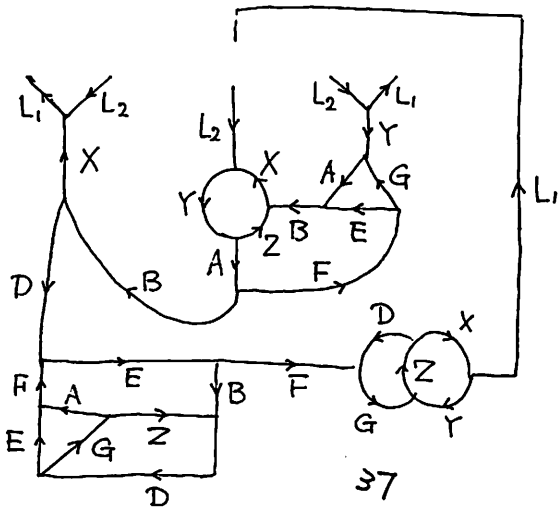
図19 →



(書き直した)

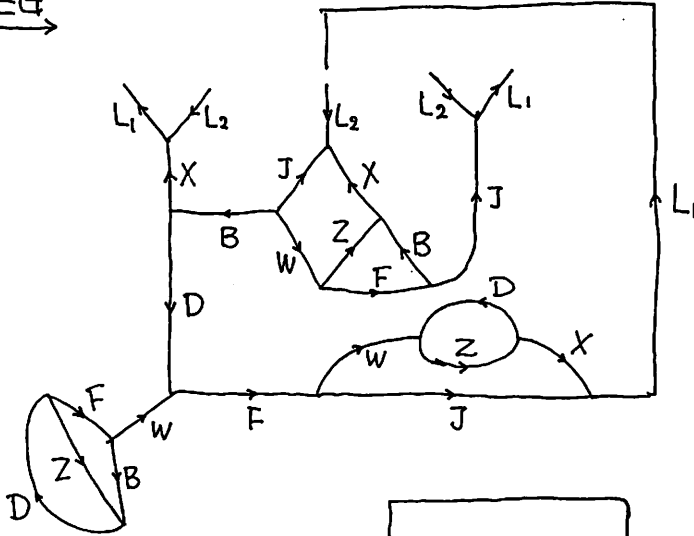


→  
Czipping

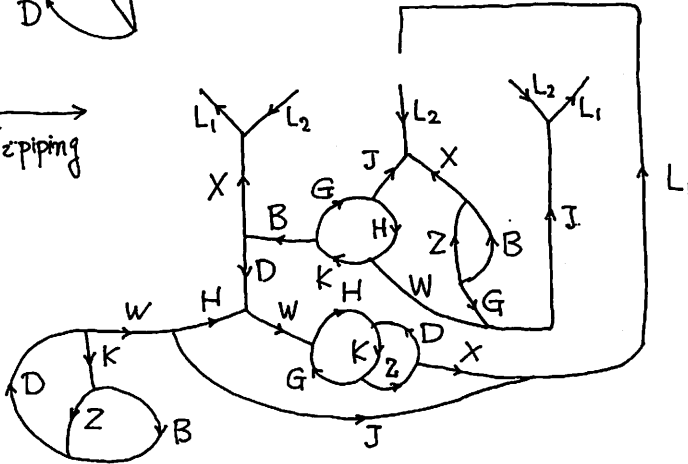


(50)

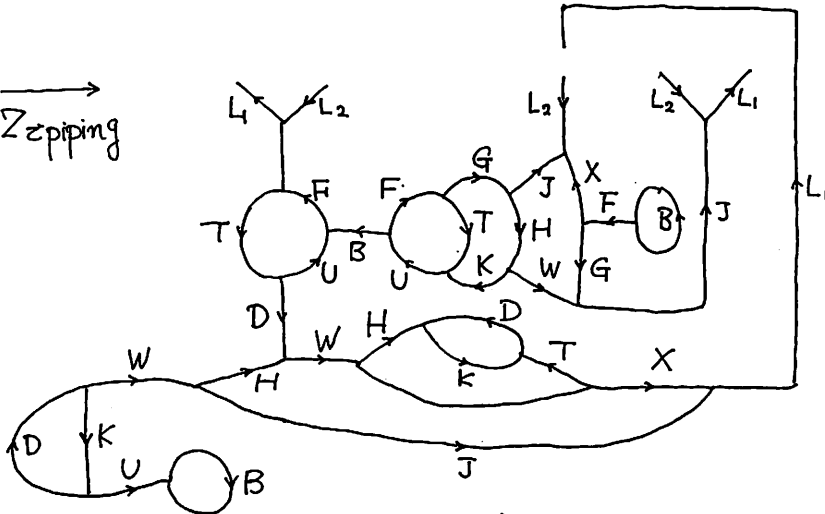
AEG



$H_2$  zipping



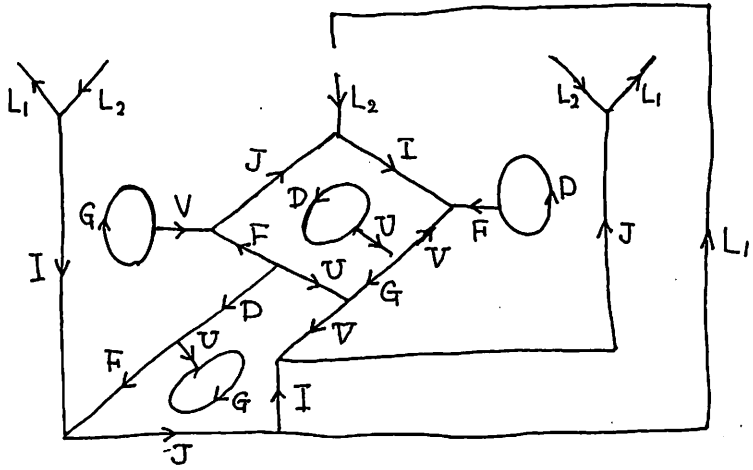
$Z$  zipping



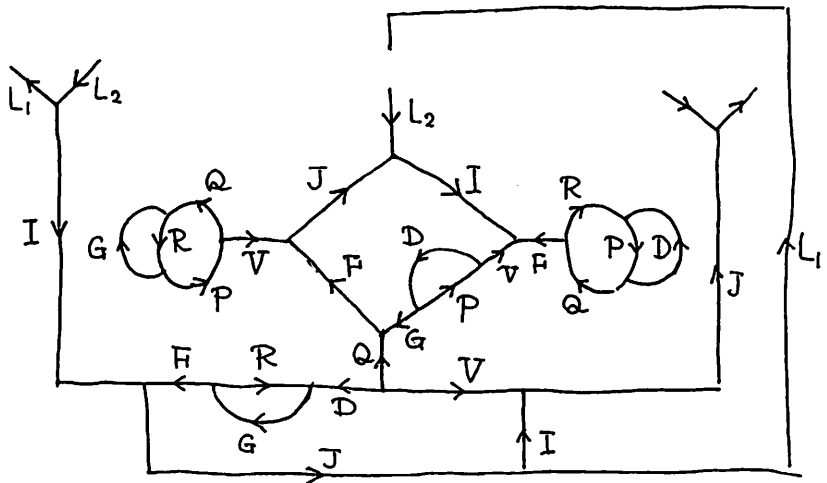


(52)

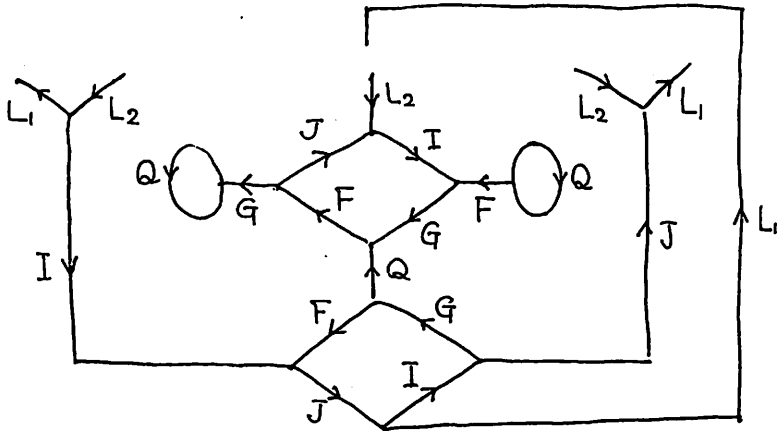
$BC^{-1}$



Upiping



PD





## 参考文献

## 参考文献

- [1] H. Ikeda, "Acyclic fake sufraces" *Topology*, 10(1971), 9-36.
- [2] H. Ikeda, "Identification maps on the 2-sphere" *Kobe J. Math.*, 2(1985), 163-167.
- [3] H. Ikeda and Y. Inoue,  
"Invitation to DS-diagrams" *Kobe J. Math.*, 2(1985), 169-186.
- [4] I. Ishii, "Flows and spines" *Tokyo J. Math.*, 9(1986), 505-525.
- [5] I. Ishii, "Moves of flow-spines and topological invariants of 3-manifolds" *Tokyo J. Math.*, 15(1992), 297-312.
- [6] H. Ikeda, M. Yamashita and K. Yokoyama "Reformation of a DS-diagram to one with E-cycle" *to appear*