Complete Classification of periodic maps on compact surfaces

横山和夫
(上智大 理工)

§1 Introduction

compact surface M 上の <u>period n の periodic map</u> とは M から M の上への同相写像 f で $f^n = id$ (恒等写像) かつ $f^k \neq id$ ($1 \leq {}^\forall k < n$) をみたすものをいう。M 上の periodic map f と M' 上の periodic map f' が <u>同値である</u> とは ${}^\exists h : M \to M'$ (同相写像) s.t. $f'h = hf$ をみたすときをいう。

$$P_n = \left\{ (f, M) \;;\; \begin{array}{l} M \text{ は compact surface} \\ f \text{ は } M \text{ 上の period } n \text{ の periodic map} \end{array} \right\}$$

とおく。$(f, M) \in P_n$ に対して

$$S_k(f) = \{ x \in M \;;\; f^k(x) = x \text{ かつ } f^i(x) \neq x \;\; (1 \leq {}^\forall i < k) \}$$

$$S(f) = \bigcup_{k=1}^{n-1} S_k(f) \quad (\text{すなわち } = \{ x \in M \;;\; 1 \leq {}^\exists k < n,\ f^k(x) = x \})$$

とおき $S(f)$ を f の <u>singular set</u> という。

Whyburn [2] によって $S(f)$ の連結成分は

(i) M の内部 $\mathring{M}$ の孤立点

(ii) $\mathring{M}$ の simple closed curve (simple loop)

(iii) M 上の proper simple arc

のいずれかであるので

$$S^0(f) = \{ x \in S(f) \;;\; x \text{ は (i) } \mathring{M} \text{ の孤立点} \}$$

$$S^1(f) = S(f) - S^0(f) \quad \text{すなわち } x \text{ は (ii) か (iii) の場合}$$

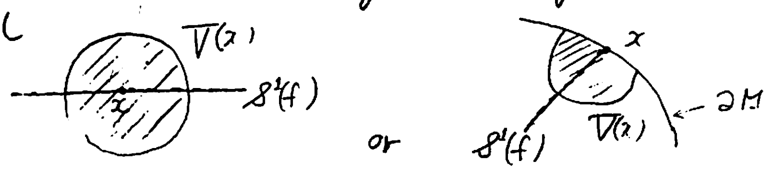
とおく。

この時 $\mathcal{S}^1(f)=\phi$ の時は [3] と [4] によって分類はなされているので ここでは $\mathcal{S}^1(f)\neq\phi$ の時の P_n の(同値類による)分類を与える。

§2. Reducing theorem

ここでは $\mathcal{S}^1(f)\neq\phi$ なる P_n の元 (f,M) に対して Reducing operation なる操作を定義して $\mathcal{S}^1(f)=\phi$ の場合に帰着できることを示す。

x が $\mathcal{S}^1(f)$ の元とすると orbit space M/f が compact surface であることを使えば x の equivalent neighborhood $V(x)$ が存在し



になっている。それ故

<u>Prop 2.1</u> (i) $\mathcal{S}^1(f)\neq\phi$ ならば n は even
(ii) $x\in\mathcal{S}^1(f) \longrightarrow x\in\mathcal{S}_{n/2}(f)$

次に Reducing operation を定めるが、2つの場合に分けて定める。はじめに $M-\mathcal{S}^1(f)$ が連結でない場合を考える。

まず次のような集合を考える。

$P_m^* = \{(f_*, M_*, S_*)$; 次の条件(i)(ii)(iii)をみたす$\}$

条件(i) M_* は compact connected surface

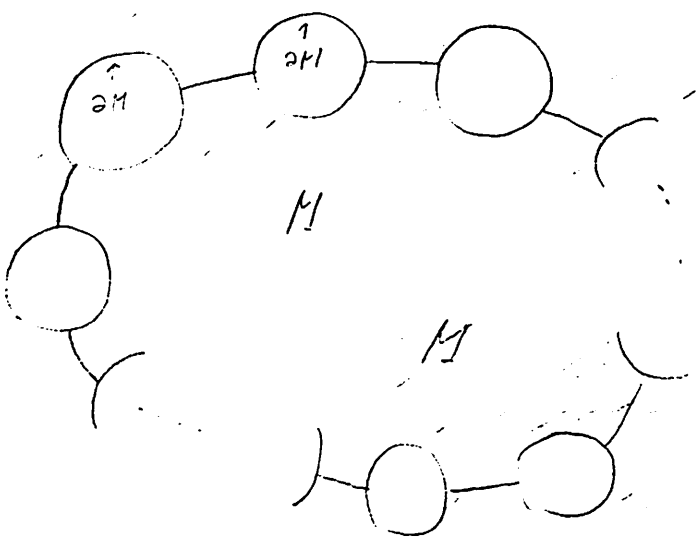
(ii) S_* は ∂M_* 上の simple loop または simple arc からなる部分集合

(iii) f_* は M_* 上の period m の periodic map であって $\mathcal{S}(f_*)=\phi$ で $f_*(S_*)=S_*$ をみたす

<u>Lemma 2.1</u> P_n の元 (f,M) が $\mathcal{S}^1(f)\neq\phi$, $M-\mathcal{S}^1(f)$ が連結でないとき $M-\mathcal{S}^1(f)$ はちょうど2つの連結成分から

なり，この1つを M_* とすると $f(M_*) = \overline{M - M_*}$ がなりたつ．かつ $\frac{n}{2}$ は odd である．$f_* = f^2|_{M_*}$ とおくと (f_*, M_*, S_*) は $\mathcal{P}^*_{\frac{n}{2}}$ の元である。ここに $S_* = \mathcal{S}^1(f) \cap M_*$。したがって $\mathcal{S}^1(f)$ の元として 1-sided loop，1-sided 亜-set はこの場合存在しない。

<u>Notation</u> $\mathcal{S}^1(f)$ の arc は次のようになっている



この時 $\partial M \cup \mathcal{S}^1(f)$ の連結成分を <u>亜-set</u> という

$M - \mathcal{S}^1(f)$ が連結のとき

☆ M が orientable のとき orbit space M/f は non-orientable

M_* を $M - \mathcal{S}^1(f)$ の natural compactification，$S_* = M - (M - \mathcal{S}^1(f))$ とおき $f_* : M_* \longrightarrow M_*$ を

$x \in M - S_*$ のとき $f_*(x) = f(x)$

$x \in S_*$ のとき $\lim x_i = x$ なる点列 $\{x_i\} \subset M - S_*$ をとり $f_*(x) = \lim f(x_i)$ と定める．

すると

<u>Lemma 2.2</u> $(f_*, M_*, S_*) \in \mathcal{P}^*_n$ である．

Def 2.1 $(f,M)\in P_n$ で $S^1(f)\neq\phi$ のとき Lemma 1.2 または Lemma 1.3 によって構成される (f_*, M_*, S_*) を $RD(f,M)$ とあらわし (f,M) より <u>reducing operation</u> によってえられるという。

次に reducing operation によって同値関係が得られることを示す。このために P_m^* に同値関係を定める。

Def. 2.2

(f_*, M_*, S_*), $(f_*', M_*', S_*')\in P_m^*$ に対して
$\exists H : (M_*, S_*)\longrightarrow(M_*', S_*')$, 同相写像
s.t. $f_*'H = Hf_*$
のとき (f_*, M_*, S_*) と (f_*', M_*', S_*') は <u>S−同値</u> という。
$(f_*, M_*, S_*)\underset{*}{\sim}(f_*', M_*', S_*')$ と表わす。

Lemma 2.3

$(f,M), (f',M')\in P_n$ s.t. $M-S^1(f)$, $M'-S^1(f')$ は連結でない。
に対して $RD(f,M)=(f_*, M_*, S_*)$, $RD(f',M')=(f_*', M_*', S_*')$
とおくとき $(f,M)\sim(f',M') \Longleftrightarrow (f_*, M_*, S_*)\underset{*}{\sim}(f_*', M_*', S_*')$

(proof) $\Rightarrow$ は明らか

($\Leftarrow$) $\exists H : (M_*, S_*)\longrightarrow(M_*', S_*')$, 同相写像 s.t. $f_*'h = hf_*$.
ので $h: M\longrightarrow M$ を

$$h(x) = H(x) \quad (x\in M_*)$$
$$h(x) = f'^{\frac{n}{2}} H f^{\frac{n}{2}}(x) \quad (x\in \overline{M-M_*})$$

と定めると $(f,M)\sim(f',M')$ となる。

Lemma 2.4

$(f,M), (f',M')\in P_n$ s.t. $S^1(f)\neq\phi$, $S^1(f')\neq\phi$, $M-S^1(f)$ は連結
$M'-S^1(f')$ は連結
に対して $RD(f,M)=(f_*, M_*, S_*)$, $RD(f',M')=(f_*', M_*', S_*')$
とおくとき $(f,M)\sim(f',M') \Longleftrightarrow (f_*, M_*, S_*)\underset{*}{\sim}(f_*', M_*', S_*')$

次に我々は P_m^* の元から P_n の元で $S^1 \neq \phi$ なるものを構成しよう。
M_* を compact connected surface, S_* を ∂M_* 上の simple loop or simple arc からなる subset とする。そして f_* を (M_*, S_*) から (M_*, S_*) の上への同相写像で $f_*^m = id$, $f_*^j \neq id\ (1 \leq j < m)$, $f_*(S_*) = S_*$ をみたすものとする。その時 M_* の copy M_*' と $i : M_* \longrightarrow M_*'$ (同相写像) をとり, $M' = M_* \underset{j}{\cup} M_*'$ (但し $j = i|_{S_*}$) とおく。
その時 M' 上の map f' を

$$f'(x) = i f_*^{\frac{m+1}{2}}(x) \qquad x \in M_*$$
$$= f_*^{\frac{m+1}{2}} i (x) \qquad x \in M_*'$$

と定めると

<u>Lemma 2.5</u> $(f', M') \in P_{2m}$ であって $S^1(f') = S_*$ かつ $M' - S^1(f')$ は連結でない。さらに $RD(f', M') = (f_*', M_*', S_*')$ とおくと $(f_*', M_*', S_*') \simeq (f_*, M_*, S_*)$ である。

上と同様な M_*, S_*, f_* をとる。そして $x, y \in M_*$ に対して

$$x \sim y \overset{def}{\iff} \begin{cases} x = y \text{ or } x = f^{\frac{m}{2}}(y) & (x, y \in S_*) \\ x = y & (\text{その他}) \end{cases}$$

と定めて $M' = M_*/\sim$ とおくと M' は compact surface である。
$q : M_* \longrightarrow M' = M_*/\sim$ を quotient map とするとき M' 上の写像 f' を $\forall x \in M'$ に対して $\exists x_* \in M_*$ $q(x_*) = x$ をとり

$$f'(x) = q f_*(y) \quad \text{とおく.}$$

すると f' は well-defined で

<u>Lemma 2.6</u> $(f', M') \in P_m$ であって $S^1(f') = S_*$ かつ $M' - S^1(f')$ は連結である。さらに $RD(f', M') = (f_*', M_*', S_*')$ とおくと $(f_*', M_*', S_*') \simeq (f_*, M_*, S_*)$ である

§3. 同値類の決定

X_g を genus g の orientable surface

∂X_g は (i) ℓ コの $\hat{d}_j$ は $\hat{d}_j \cap S^1 = \phi$

(ii) g コの $\hat{d}_u$ は $\hat{d}_u \subset S^1$

(iii) $t(v)$ コの $\hat{d}_w^{(v)}$ は $\hat{d}_w^{(v)} \cap S^1$ は v 本 arc である

からなるものとする。$(v = 1, 2, \cdots, r)$ $S^1 = p(\mathcal{S}^1(f))$ $(p : M/f \to X)$

そして $a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_g, b_g, d_1, d_2, \cdots, d_\ell, d_1^\circ, d_2^\circ, \cdots, d_g^\circ$

$d_1^{(1)}, d_2^{(1)}, \cdots, d_{t(1)}^{(1)}, d_1^{(2)}, d_2^{(2)}, \cdots, d_{t(2)}^{(2)}, \cdots, d_1^{(r)}, d_2^{(r)}, \cdots, d_{t(r)}^{(r)}$

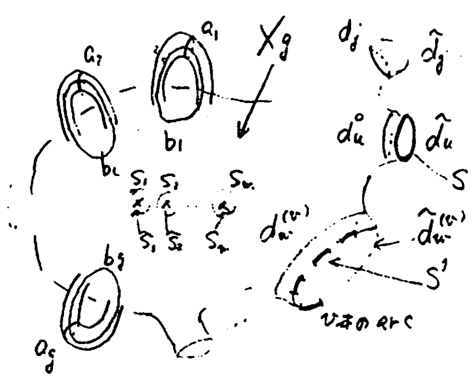
を次のように X_g 上にとる.

$a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_g, b_g$ は genus を定める meridian longitude system

$d_1, d_2, \cdots, d_\ell$ は $\hat{d}_j$ に対応する loop

$d_1^\circ, d_2^\circ, \cdots, d_g^\circ$ は $\hat{d}_u$ に対応する loop

$d_1^{(v)}, d_2^{(v)}, \cdots, d_{t(v)}^{(v)}$ は $\hat{d}_w^{(v)}$ に対応する loop.



さらに $S^\circ = p(\mathcal{S}^\circ(f))$ の各点 $\hat{S}_k$ に対して loop S_k をとる

$S = S^1 \cup S^\circ$ とおく.

X_{2g+1}^- を genus $2g+1$ の non-orientable surface とするとき

X_{2g+1}^- は X_g に 1つの disk をぬいて möbius strip をはったものと

見ると a: 上と同じ loop に もう1つ möbius strip に対応する

simple loop 1つ を加えておくとする.

同様に genus $2g+2$ の non-orientable surface $X_{\overline{2g+2}}$ は X_g に 2つの disk をとり 各々に möbius strip をはりつけたものと見なす。そしてそれらに対応する simple loop を c_1, c_2 とする。

この時 我々は

<u>Def 3.1</u>　1次元整係数ホモロジー群 $H_1(X-S^0)$ から order n の巡回群 $\mathbb{Z}_n$ の上への準同型 ω で $\omega(s_k)\neq 0$ $(k=1,2,\cdots,m)$ をみたすもの全てを集めたものを $[H_1(X-S^0);\mathbb{Z}_n]^*$ と表わす。($X = X_g$, $X_{\overline{2g+1}}$ or $X_{\overline{2g+2}}$, $a_i, b_i, d_j, s_k, \cdots$ 等で homology class をも表わすことにする)。

$\omega_1, \omega_2 \in [H_1(X-S^0);\mathbb{Z}_n]^*$ に対して ω_1 と ω_2 が <u>A-同値</u> とは $\exists h : (X,S) \longrightarrow (X,S)$ (同相写像) s.t. $\omega_1 h_* = \omega_2$ のときをいう。但し $h_* = h|_{X-S^0}$ から induce された $H_1(X-S^0)$ の automorphism を表わす。そして $\omega_1 \underset{A}{\sim} \omega_2$ と表わす。

P_n の元 (f,M) のうち $\mathcal{S}^1(f)\neq\phi$, $M-\mathcal{S}^1(f)$ 連結 をみたすものを $\hat{P}_n$ と表わし、$RD(f,M) = (f_*, M_*, S_*)$ とおくとき $\boxed{\hat{P}_n(X,S)}$ によって次の条件をみたすものを表わす

① $(f,M) \in \hat{P}_n$

② $M/f\ (= M_*/f_*)$ が X と homeomorphic

③ $p_* : M_* \longrightarrow X$ を natural quotient map とするとき $S^1 = p(S_*)$, $S^0 = p(\mathcal{S}^0(f_*))$, $S = S^1 \cup S^0$ になる。さらに p_* は S^0 を branched set とする n-fold cyclic branched covering になっている。

また

$(f,M) \in P_n$ のうち $\mathcal{S}^1(f)\neq\phi$, $M-\mathcal{S}^1(f)$ は連結でない をみたすものを P_n^2 と表わし $RD(f,M) = (f_*, M_*, S_*)$ とおくとき $\boxed{P_n^2(X,S)}$ によって次の条件をみたすものを表わす。

① $(f,M) \in P_n^2$　② $M/f\ (= M_*/f_*)$ が X と 同相

③ natural quotient map $p_* : M_* \longrightarrow X$ は $p_*(\mathcal{S}^0(f_*)) = S^1$ を branched set とする n-fold cyclic branched cover で $S = S^0 \cup S^1$.

但し $p_*(S_k) = S^1$.

その時

<u>Prop 3.1</u>

① $\hat{P}_n(X,S)$ から $[H_1(X-S^0);\mathbb{Z}_n]^*$ への単射が存在する。
また $\hat{P}_n(X,S)/\sim$ から $[H_1(X-S^0),\mathbb{Z}_n]^*/\widetilde{\mathcal{A}}$ への単射も induce される。

② $P_n^2(X,S)$ から $[H_1(X-S^0);\mathbb{Z}_{n/2}]^*$ への単射が存在し、それは
$P_n^2(X,S)/\sim$ から $[H_1(X-S^0);\mathbb{Z}_{n/2}]^*/\widetilde{\mathcal{A}}$ への単射を induce する。

次に $\omega \in [H_1(X-S^0);\mathbb{Z}_n]^*$ を次のように integer (mod n) の system で表現する。

$$\{a_1,b_1,a_2,b_2,\dots,a_g,b_g\left\{\begin{matrix} c \\ \text{または} \\ c_1,\ c_2\end{matrix}\right\},d_1,d_2,\dots,d_\rho,d_1^0,d_2^0,\dots,d_g^0,d_1^{(1)},d_2^{(1)},\dots,d_{t(1)}^{(1)},d_1^{(2)},d_2^{(2)},\dots,d_{t(2)}^{(2)},\dots\dots,d_1^{(r)},d_2^{(r)},\dots,d_{t(r)}^{(r)},s_1,s_2,\dots,s_m\}$$

が $H_1(X-S^0)$ の generating system であった。それの ω による値をそれぞれ

$$\omega(a_i)=\alpha_i,\quad \omega(b_i)=\beta_i \qquad (1\le i\le g)$$
$$\omega(c)=\gamma \ \text{ or } \ \omega(c_1)=\gamma_1,\ \omega(c_2)=\gamma_2$$
$$\omega(d_j)=\delta_j \qquad \omega(d_u^0)=\eta_u,\quad (1\le j\le \rho,\ 1\le u\le g)$$
$$\omega(d_w^{(v)})=\lambda_w^{(v)} \qquad (1\le v\le r,\ 1\le w\le t(v))$$
$$\omega(s_k)=\theta_k \qquad (1\le k\le m)$$

とするとき $(\alpha,\beta,\gamma|\gamma_1,\gamma_2|,\delta,\eta,\lambda^{(1)},\lambda^{(2)},\dots,\lambda^{(r)},\theta)$
$=(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,\dots,\alpha_g,\beta_g,\gamma|\gamma_1,\gamma_2|,\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_\rho,\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_g,\lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\dots,$
$\lambda_{t(1)}^{(1)},\lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},\dots,\lambda_{t(2)}^{(2)},\dots\dots,\lambda_1^{(r)},\lambda_2^{(r)},\dots,\lambda_{t(r)}^{(r)},\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_m)$

で ω を表現する。

すると次の条件をみたす。

(1) $\left.\begin{matrix}2\gamma\\2\gamma_1+2\gamma_2\end{matrix}\right\}+\delta_1+\delta_2+\dots+\delta_\rho+\eta_1+\eta_2+\dots+\eta_g+\lambda_1^{(1)}+\lambda_2^{(1)}+\dots+\lambda_{t(1)}^{(1)}$
$+\lambda_1^{(2)}+\lambda_2^{(2)}+\dots+\lambda_{t(2)}^{(2)}+\dots\dots+\lambda_1^{(r)}+\lambda_2^{(r)}+\dots+\lambda_{t(r)}^{(r)}+\theta_1+\theta_2+\dots$
$+\theta_m \equiv 0 \pmod{n}$

(2) g.c.d $\{\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,\dots,\alpha_g,\beta_g\left|\begin{matrix}\gamma\\ \gamma_1,\gamma_2\end{matrix}\right|\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_\rho,\eta_1,\eta_2,$
$\dots,\eta_g,\lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\dots,\lambda_{t(1)}^{(1)},\lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},\dots\dots,\lambda_{t(2)}^{(2)},\dots\dots,\lambda_1^{(r)},$
$\lambda_2^{(r)},\dots,\lambda_{t(r)}^{(r)},\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_m,n\} = 1$

(0) $\theta_k \ne 0 \quad (1\le k\le m)$

X が X_g, X^-_{2g+1}, X^-_{2g+2} の場合についてこれぞれ上の integer の system を $Z_n(g;l,g,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)$, $Z^-_n(2g+1;l,g,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)$, $Z^-_n(2g+2;l,g,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)$ で表わす。

すなわち

$Z_n(g;l,g,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)$ のときは δ,δ_1,δ_2 はなし

$Z^-_n(2g+1,l,g,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)$ のときは δ

$Z^-_n(2g+2,l,g,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)$ のときは δ_1,δ_2

をそれぞれ $\left\{\begin{matrix}\delta \\ \delta_1,\delta_2\end{matrix}\right\}$ のところに使っている。

すると $[H_1(X-S^0);\mathbb{Z}_n]^*$ の $\mathcal{A}$-同値に対応して $Z_n(g;l,g,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)$ etc. に同値類を自然に定められるので、$\mathcal{P}_n(X,S)$ や $\mathcal{P}^2_n(X,S)$ の同値類の決定には $[H_1(X-S^0);\mathbb{Z}_n]^*$ ($n=n$ or $\frac{n}{2}$) の $\mathcal{A}$-同値類を決めればいいが、それは $Z_n(g;l,g,t(1),t(2)\cdots t(r),m)$ … etc. の同値類を決めればよい。これは [3] [4] と同様に $X=X_g$, or X^-_i の homeotopy の生成元を使って決定できる。

$$\left|\begin{array}{l}\mathcal{P}_n(X,S)\text{ の同値類}\longrightarrow[H_1(X-S^0);\mathbb{Z}_n]^*\text{ の }\mathcal{A}\text{-同値類}\\ \quad\longrightarrow Z_n(\quad)\text{ or }Z^-_n(\quad)\text{ の同値類}\end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l}\mathcal{P}^2_n(X,S)\text{ の同値類}\longrightarrow[H_1(X-S^0),\mathbb{Z}_{n/2}]^*\text{ の }\mathcal{A}\text{-同値類}\\ \quad\longrightarrow Z_{n/2}(\quad)\text{ or }Z^-_{n/2}(\quad)\text{ の同値類}\\ \quad(\text{この場合は }\tfrac{n}{2}\text{ は odd by Lemma 5.1})\end{array}\right.$$

[3] の場合と同様に $Z_n(g;l,g,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)$ のときには次のような η-同値を定めておく。

Definition 3.2 (I) An element $(\delta, \eta, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \cdots, \lambda^{(r)}, \theta) = (\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_\ell, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_q, \lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \cdots, \lambda_{t(1)}^{(1)}, \lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}, \cdots, \lambda_{t(2)}^{(2)}, \cdots\cdots \lambda_1^{(r)}, \lambda_2^{(r)}, \cdots, \lambda_{t(r)}^{(r)}, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)$ of $Z_n(0;\ell,q,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)$ is <u>η-equivalent</u> to an element $(\tilde{\delta}, \tilde{\eta}, \tilde{\lambda}^{(1)}, \tilde{\lambda}^{(2)}, \cdots, \tilde{\lambda}^{(r)}, \tilde{\theta}) = (\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2, \cdots, \tilde{\delta}_\ell, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, \cdots, \tilde{\eta}_q, \tilde{\lambda}_1^{(1)}, \tilde{\lambda}_2^{(1)}, \cdots, \tilde{\lambda}_{t(1)}^{(1)}, \tilde{\lambda}_1^{(2)}, \tilde{\lambda}_2^{(2)}, \cdots, \tilde{\lambda}_{t(2)}^{(2)}, \cdots\cdots, \tilde{\lambda}_1^{(r)}, \tilde{\lambda}_2^{(r)}, \cdots, \tilde{\lambda}_{t(r)}^{(r)}, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \cdots, \tilde{\theta}_m)$ of $Z_n(0;\ell,q,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)$, denoted by $(\delta, \eta, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \cdots, \lambda^{(r)}, \theta) \underset{\eta}{\sim} (\tilde{\delta}, \tilde{\eta}, \tilde{\lambda}^{(1)}, \tilde{\lambda}^{(2)}, \cdots, \tilde{\lambda}^{(r)}, \tilde{\theta})$, iff

(i) $(\delta, \eta, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \cdots, \lambda^{(r)}, \theta) = (\tilde{\delta}, \tilde{\eta}, \tilde{\lambda}^{(1)}, \tilde{\lambda}^{(2)}, \cdots, \tilde{\lambda}^{(r)}, \tilde{\theta})$ or

(ii) (a) if $\delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_j = 0 < \delta_{j+1}$ and $\tilde{\delta}_1 = \tilde{\delta}_2 = \cdots = \tilde{\delta}_{j'} = 0 < \tilde{\delta}_{j'+1}$ then $j = j'$ and moreover $n - \delta_\ell = \tilde{\delta}_{j+1}$, $n - \delta_{\ell-1} = \tilde{\delta}_{j+2}$, $\cdots$, $n - \delta_{\ell-i+1} = \tilde{\delta}_{j+i}$, $\cdots$, $n - \delta_{j+1} = \tilde{\delta}_\ell$,

(b) if $\eta_1 = \eta_2 = \cdots = \eta_u = 0 < \eta_{u+1}$ and $\tilde{\eta}_1 = \tilde{\eta}_2 = \cdots = \tilde{\eta}_{u'} = 0 < \tilde{\eta}_{u'+1}$ then $u = u'$ and moreover $n - \eta_q = \tilde{\eta}_{u+1}$, $n - \eta_{q-1} = \tilde{\eta}_{u+2}, \cdots$, $n - \eta_{q-i+1} = \tilde{\eta}_{u+i}$, $\cdots$, $n - \eta_{u+1} = \tilde{\eta}_q$,

(c) for any integer v ($1 \leq v \leq r$), if $\lambda_1^{(v)} = \lambda_2^{(v)} = \cdots = \lambda_{w(v)}^{(v)} = 0 < \lambda_{w(v)+1}^{(v)}$ and $\tilde{\lambda}_1^{(v)} = \tilde{\lambda}_2^{(v)} = \cdots = \tilde{\lambda}_{w(v)'}^{(v)} = 0 < \tilde{\lambda}_{w(v)'+1}^{(v)}$ then $w(v) = w(v)'$ and moreover $n - \lambda_{t(v)}^{(v)} = \tilde{\lambda}_{w(v)+1}^{(v)}$, $n - \lambda_{t(v)-1}^{(v)} = \tilde{\lambda}_{w(v)+2}^{(v)}$, $\cdots$, $n - \lambda_{t(v)-i+1}^{(v)} = \tilde{\lambda}_{w(v)+i}^{(v)}$, $\cdots$, $n - \lambda_{w(v)+1}^{(v)} = \tilde{\lambda}_{t(v)}^{(v)}$,

and (d) $n - \theta_m = \tilde{\theta}_1$, $n - \theta_{m-1} = \tilde{\theta}_2$, $\cdots$, $n - \theta_{m-i+1} = \tilde{\theta}_i$, $\cdots$, $n - \theta_1 = \tilde{\theta}_m$.

(II) An element $(1,0,0,0,\cdots,0,0,\delta,\eta,\lambda^{(1)},\lambda^{(2)},\cdots,\lambda^{(r)},\theta) = (1,0,0,0,\cdots,0,0,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_q,\lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\cdots,\lambda_{t(1)}^{(1)},\lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},\cdots,\lambda_{t(2)}^{(2)},\cdots\cdots,\lambda_1^{(r)},\lambda_2^{(r)},\cdots,\lambda_{t(r)}^{(r)},\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$ of $Z_n(g;\ell,q,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)$ is <u>η-equivalent</u> to an element $(1,0,0,0,\cdots,0,0,\tilde{\delta},\tilde{\eta},\tilde{\lambda}^{(1)},\tilde{\lambda}^{(2)},\cdots,\tilde{\lambda}^{(r)},\tilde{\theta}) = (1,0,0,0,\cdots,0,0,\tilde{\delta}_1,\tilde{\delta}_2,\cdots,\tilde{\delta}_\ell,\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2,\cdots,\tilde{\eta}_q,\tilde{\lambda}_1^{(1)},\tilde{\lambda}_2^{(1)},\cdots,\tilde{\lambda}_{t(1)}^{(1)},\tilde{\lambda}_1^{(2)},\tilde{\lambda}_2^{(2)},\cdots,\tilde{\lambda}_{t(2)}^{(2)},\cdots\cdots,\tilde{\lambda}_1^{(r)},\tilde{\lambda}_2^{(r)},\cdots,\tilde{\lambda}_{t(r)}^{(r)},\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2,\cdots,\tilde{\theta}_m)$ of $Z_n(g;\ell,q,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)$, denoted by

$$(1,0,0,0,\cdots,0,0,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_q,\lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\cdots,\lambda_{t(1)}^{(1)},\lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},\cdots,\lambda_{t(2)}^{(2)},\cdots\cdots\lambda_1^{(r)},\lambda_2^{(r)},\cdots,\lambda_{t(r)}^{(r)},\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m) \underset{\eta}{\frown} (1,0,0,0,\cdots,0,0,\tilde{\delta}_1,\tilde{\delta}_2,\cdots,\tilde{\delta}_\ell,\tilde{\eta}_1,\tilde{\eta}_2,\cdots,\tilde{\eta}_q,\tilde{\lambda}_1^{(1)},\tilde{\lambda}_2^{(1)},\cdots,\tilde{\lambda}_{t(1)}^{(1)},\tilde{\lambda}_1^{(2)},\tilde{\lambda}_2^{(2)},\cdots,\tilde{\lambda}_{t(2)}^{(2)},\cdots\cdots\tilde{\lambda}_1^{(r)},\tilde{\lambda}_2^{(r)},\cdots,\tilde{\lambda}^{(r)},\tilde{\theta},\tilde{\theta},\cdots,\tilde{\theta}),$$

iff $(\delta,\eta,\lambda^{(1)},\lambda^{(2)},\cdots,\lambda^{(r)},\theta) \underset{\eta}{\frown} (\tilde{\delta},\tilde{\eta},\tilde{\lambda}^{(1)},\tilde{\lambda}^{(2)},\cdots,\tilde{\lambda}^{(r)},\tilde{\theta})$.

さて X_g のとき すなわち orientable case に [3] と同様にして ([3] の Prop 3 による homeotopy group を使って) $Z_{n/2}(g;\ell,q,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)$ と $Z_n(g;\ell,q,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)$ の同値類の代表系を求める (Theorems 3.1 と Theorem 3.2)。

そして次に X_{2g+1} (non-orientable で genus が odd) のとき [4] の Prop.2.2 における homeotopy group を使って $\bar{Z}_{n/2}(2g+1;\ell,q,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)$ ($n/2$ は odd であることを使って) の同値類の代表系を求める (Theorem 3.3)。また $\bar{Z}_n(2g+1;\ell,q,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)$ の同値類の代表系を求める (Theorem 3.6)。

最後に X_{2g+2} (non-orientable で genus が even) のとき [4] の Prop 3.2 における homeotopy group を使って $\bar{Z}_{n/2}(2g+2,\ell,q,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)$ の同値類の代表系を求める (Theorem 3.4 と $2g+2=2$ のときの Theorem 3 5)。また $\bar{Z}_n(2g+2;\ell,q,t(1),$

$t(2), \cdots, t(r), m)$ の同値類の代表系を求める（Theorem 3.7）。
但し $g=0$ すなわち $2g+2=2$ のときは全く異なるので Theorem 3.8
として別にあげておく。（X_2^- のときのみ irregular）

Theorem 3.1 <u>A complete set of equivalence classes of</u> $Z_{n/2}(g;\ell,q,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)$ <u>is represented by</u> ;

(1) $\mathcal{Z}_{n/2}(g;\ell,q,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)$ =

$$\left\{\begin{array}{l}
(1,0,0,0,\cdots,0,0,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_q,\ \lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\cdots,\lambda_{t(1)}^{(1)},\\
\quad \lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},\cdots,\lambda_{t(2)}^{(2)},\cdots,\lambda_1^{(r)},\lambda_2^{(r)},\cdots,\lambda_{t(r)}^{(r)},\theta_1,\theta_2,\cdots,\ \theta_m);\\
\quad 0\le\delta_1\le\delta_2\le\cdots\le\delta_\ell<\frac{n}{2},\quad 0\le\eta_1\le\eta_2\le\cdots\le\eta_q<\frac{n}{2},\\
\quad 0\le\lambda_1^{(v)}\le\lambda_2^{(v)}\le\cdots\le\lambda_{t(v)}^{(v)}<\frac{n}{2}\quad (v=1,2,\cdots,r),\quad 1\le\theta_1\le\theta_2\le\cdots\le\theta_m<\frac{n}{2},\\
\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_\ell+\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_q+\lambda_1^{(1)}+\lambda_2^{(1)}+\cdots+\lambda_{t(1)}^{(1)}+\lambda_1^{(2)}+\lambda_2^{(2)}+\cdots\\
\quad +\lambda_{t(2)}^{(2)}+\cdots\cdots+\lambda_1^{(r)}+\lambda_2^{(r)}+\cdots\ \lambda_{t(r)}^{(r)}+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m\equiv 0\pmod{\frac{n}{2}}
\end{array}\right\}$$

if $g\ge 1$,

(2) $\mathcal{Z}_{n/2}(0;\ell,q,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)$ =

$$\left\{\begin{array}{l}
(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_q,\ \lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\cdots,\lambda_{t(1)}^{(1)},\lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},\cdots,\\
\quad \lambda_{t(2)}^{(2)},\cdots,\lambda_1^{(r)},\lambda_2^{(r)},\cdots,\lambda_{t(r)}^{(r)},\theta_1,\theta_2,\cdots,\ \theta_m);\\
\quad 0\le\delta_1\le\delta_2\le\cdots\le\delta_\ell<\frac{n}{2},\quad 0\le\eta_1\le\eta_2\le\cdots\le\eta_q<\frac{n}{2},\\
\quad 0\le\lambda_1^{(v)}\le\lambda_2^{(v)}\le\cdots\le\lambda_{t(v)}^{(v)}<\frac{n}{2}\quad (v=1,2,\cdots,r),\quad 1\le\theta_1\le\theta_2\le\cdots\le\theta_m<\frac{n}{2},\\
\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_\ell+\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_q+\lambda_1^{(1)}+\lambda_2^{(1)}+\cdots+\lambda_{t(1)}^{(1)}+\lambda_1^{(2)}+\lambda_2^{(2)}+\cdots\\
\quad +\lambda_{t(2)}^{(2)}+\cdots\cdots+\lambda_1^{(r)}+\lambda_2^{(r)}+\cdots\ \lambda_{t(r)}^{(r)}+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m\equiv 0\pmod{\frac{n}{2}},\\
\mathrm{g.c.d.}(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_q,\ \lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\cdots,\lambda_{t(1)}^{(1)},\lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},\\
\quad \cdots,\lambda_{t(2)}^{(2)},\cdots,\lambda_1^{(r)},\lambda_2^{(r)},\cdots,\lambda_{t(r)}^{(r)},\theta_1,\theta_2,\cdots,\ \theta_m,\ \frac{n}{2}) = 1
\end{array}\right\}$$

Theorem 3.2 <u>A complete set of equivalence classes of</u> $Z_n(g;\ell,q,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)$ <u>is represented by</u> ;

(1) $\mathcal{Z}_n(g;\ell,q,t(1),t(2),\cdots,t(r),m) =$

$$\left\{\begin{array}{l}(1,0,0,0,\cdots,0,0,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_q,\ \lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\cdots,\lambda_{t(1)}^{(1)},\\ \quad\lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},\cdots,\lambda_{t(2)}^{(2)},\cdots,\lambda_1^{(r)},\lambda_2^{(r)},\cdots,\lambda_{t(r)}^{(r)},\theta_1,\theta_2,\cdots,\ \theta_m);\\ \quad 0\le\delta_1\le\delta_2\le\cdots\le\delta_\ell< n,\quad 0\le\eta_1\le\eta_2\le\cdots\le\eta_q< n,\\ \quad 0\le\lambda_1^{(v)}\le\lambda_2^{(v)}\le\cdots\le\lambda_{t(v)}^{(v)}< n\quad (v=1,2,\cdots,r),\quad 1\le\theta_1\le\theta_2\le\cdots\le\theta_m< n,\\ \delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_\ell+\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_q+\lambda_1^{(1)}+\lambda_2^{(1)}+\cdots+\lambda_{t(1)}^{(1)}+\lambda_1^{(2)}+\lambda_2^{(2)}+\cdots\\ \quad+\lambda_{t(2)}^{(2)}+\cdots\cdots+\lambda_1^{(r)}+\lambda_2^{(r)}+\cdots\ \lambda_{t(r)}^{(r)}+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m\equiv 0\pmod n\end{array}\right\}$$

if $g\ge 1$,

(2) $\mathcal{Z}_n(0;\ell,q,t(1),t(2),\cdots,t(r),m) =$

$$\left\{\begin{array}{l}(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_q,\ \lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\cdots,\lambda_{t(1)}^{(1)},\lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},\cdots,\\ \quad\lambda_{t(2)}^{(2)},\cdots,\lambda_1^{(r)},\lambda_2^{(r)},\cdots,\lambda_{t(r)}^{(r)},\theta_1,\theta_2,\cdots,\ \theta_m);\\ \quad 0\le\delta_1\le\delta_2\le\cdots\le\delta_\ell< n,\quad 0\le\eta_1\le\eta_2\le\cdots\le\eta_q< n,\\ 0\le\lambda_1^{(v)}\le\lambda_2^{(v)}\le\cdots\le\lambda_{t(v)}^{(v)}< n\quad (v=1,2,\cdots,r),\quad 1\le\theta_1\le\theta_2\le\cdots\le\theta_m< n,\\ \delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_\ell+\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_q+\lambda_1^{(1)}+\lambda_2^{(1)}+\cdots+\lambda_{t(1)}^{(1)}+\lambda_1^{(2)}+\lambda_2^{(2)}+\cdots\\ \quad+\lambda_{t(2)}^{(2)}+\cdots\cdots+\lambda_1^{(r)}+\lambda_2^{(r)}+\cdots\ \lambda_{t(r)}^{(r)}+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m\equiv 0\pmod n,\\ \text{g.c.d.}(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_q,\ \lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\cdots,\lambda_{t(1)}^{(1)},\lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},\\ \quad\cdots,\lambda_{t(2)}^{(2)},\cdots,\lambda_1^{(r)},\lambda_2^{(r)},\cdots,\lambda_{t(r)}^{(r)},\theta_1,\theta_2,\cdots,\ \theta_m,\ n\} = 1\end{array}\right\}$$

Theorem 3.3 <u>A complete set of equivalence classes of</u> $Z^{-}_{n/2}(2g+1;\ell,q,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)$ <u>is represented by</u> ;

(1) $\mathcal{Z}^{-}_{n/2}(2g+1;\ell,q,t(1),t(2),\cdots,t(r),m) =$

$$\left\{\begin{array}{l}(1,0,0,0,\cdots,0,0,\gamma,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_q,\ \lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\cdots,\lambda_{t(1)}^{(1)},\\ \quad\lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},\cdots,\lambda_{t(2)}^{(2)},\cdots,\lambda_1^{(r)},\lambda_2^{(r)},\cdots,\lambda_{t(r)}^{(r)},\theta_1,\theta_2,\cdots,\ \theta_m)\ ;\\ \quad 0\le\delta_1\ \le\delta_2\le\ \cdots\ \le\delta_\ell<\frac{n}{4},\ \ 0\le\eta_1\le\eta_2\le\ \cdots\ \le\eta_q<\frac{n}{4}\ ,\\ \quad 0\le\lambda_1^{(v)}\le\lambda_2^{(v)}\le\cdots\le\lambda_{t(v)}^{(v)}<\frac{n}{4}\ \ (v=1,2,\cdots,r),\ \ 1\le\theta_1\le\theta_2\le\cdots\le\theta_m<\frac{n}{4}\ ,\\ 2\gamma+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_\ell+\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_q+\lambda_1^{(1)}+\lambda_2^{(1)}+\cdots+\lambda_{t(1)}^{(1)}+\lambda_1^{(2)}+\lambda_2^{(2)}+\cdots\\ \quad+\lambda_{t(2)}^{(2)}+\cdots+\lambda_1^{(r)}+\lambda_2^{(r)}+\cdots\ \lambda_{t(r)}^{(r)}+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m\equiv 0\pmod{\frac{n}{2}}\end{array}\right\}$$

if $g\ge 1$,

(2) $\mathcal{Z}^{-}_{n/2}(1;\ell,q,t(1),t(2),\cdots,t(r),m) =$

$$\left\{\begin{array}{l}(\gamma,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_q,\ \lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\cdots,\lambda_{t(1)}^{(1)},\ \lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},\\ \quad\cdots,\lambda_{t(2)}^{(2)},\cdots,\lambda_1^{(r)},\lambda_2^{(r)},\cdots,\lambda_{t(r)}^{(r)},\theta_1,\theta_2,\cdots,\ \theta_m);\\ \quad 0\le\delta_1\ \le\delta_2\le\ \cdots\ \le\delta_\ell<\frac{n}{4},\ \ 0\le\eta_1\le\eta_2\le\ \cdots\ \le\eta_q<\frac{n}{4}\ ,\\ \quad 0\le\lambda_1^{(v)}\le\lambda_2^{(v)}\le\cdots\le\lambda_{t(v)}^{(v)}<\frac{n}{4}\ \ (v=1,2,\cdots,r),\ \ 1\le\theta_1\le\theta_2\le\cdots\le\theta_m<\frac{n}{4}\ ,\\ 2\gamma+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_\ell+\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_q+\lambda_1^{(1)}+\lambda_2^{(1)}+\cdots+\lambda_{t(1)}^{(1)}+\lambda_1^{(2)}+\lambda_2^{(2)}+\cdots\\ \quad+\lambda_{t(2)}^{(2)}+\cdots+\lambda_1^{(r)}+\lambda_2^{(r)}+\cdots\ \lambda_{t(r)}^{(r)}+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m\equiv 0\pmod{\frac{n}{2}}\ ,\\ \text{g.c.d.}(\ \gamma,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_q,\ \lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\cdots,\lambda_{t(1)}^{(1)},\lambda_1^{(2)},\\ \quad\lambda_2^{(2)},\cdots,\lambda_{t(2)}^{(2)},\cdots,\lambda_1^{(r)},\lambda_2^{(r)},\cdots,\lambda_{t(r)}^{(r)},\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m,\ \frac{n}{2}\ )=1\end{array}\right\}$$

Theorem 3.4 <u>A complete set of equivalence classes of</u> $Z^{-}_{n/2}(2g+2;\ell,q,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)$, $g \geq 1$, <u>is represented by</u> ;

$$\mathcal{Z}^{-}_{n/2}(2g+2;\ell,q,t(1),t(2),\cdots,t(r),m) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (1,0,0,0,\cdots,0,0,\gamma_1,\gamma_2,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_q,\ \lambda^{(1)}_1,\lambda^{(1)}_2,\cdots, \\ \quad \lambda^{(1)}_{t(1)},\ \lambda^{(2)}_1,\lambda^{(2)}_2,\cdots,\lambda^{(2)}_{t(2)},\cdots,\lambda^{(r)}_1,\lambda^{(r)}_2,\cdots,\lambda^{(r)}_{t(r)},\theta_1,\theta_2,\cdots,\ \theta_m)\ ; \\ \quad \gamma_1=0,\quad 0\leq\delta_1 \leq\delta_2\leq \cdots \leq\delta_\ell < \frac{n}{4},\quad 0\leq\eta_1\leq\eta_2\leq \cdots \leq\eta_q < \frac{n}{4}\ , \\ \quad 0\leq\lambda^{(v)}_1\leq\lambda^{(v)}_2\leq\cdots\leq\lambda^{(v)}_{t(v)} < \frac{n}{4}\quad (v=1,2,\cdots,r),\quad 1\leq\theta_1\leq\theta_2\leq\cdots\leq\theta_m < \frac{n}{4}\ , \\ 2\gamma_2+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_\ell+\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_q+\lambda^{(1)}_1+\lambda^{(1)}_2+\cdots+\lambda^{(1)}_{t(1)}+\lambda^{(2)}_1+\lambda^{(2)}_2+\cdots \\ \quad +\lambda^{(2)}_{t(2)}+\cdots+\lambda^{(r)}_1+\lambda^{(r)}_2+\cdots\ \lambda^{(r)}_{t(r)}+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m \equiv 0 \pmod{\frac{n}{2}} \end{array} \right\}$$

Theorem 3.5 <u>A complete set</u> $\mathcal{Z}^{-}_{n/2}(2;\ell,q,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)$ <u>of equivalence classes of</u> $Z^{-}_{n/2}(2;\ell,q,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)$ <u>is represented by</u> ;

$$\left\{ \begin{array}{l} (\gamma_1,\gamma_2,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_q,\ \lambda^{(1)}_1,\lambda^{(1)}_2,\cdots,\lambda^{(1)}_{t(1)},\ \lambda^{(2)}_1,\lambda^{(2)}_2, \\ \quad \cdots,\lambda^{(2)}_{t(2)},\cdots,\lambda^{(r)}_1,\lambda^{(r)}_2,\cdots,\lambda^{(r)}_{t(r)},\theta_1,\theta_2,\cdots,\ \theta_m)\ ; \\ \quad 0\leq\delta_1 \leq\delta_2\leq \cdots \leq\delta_\ell < \frac{n}{4},\quad 0\leq\eta_1\leq\eta_2\leq \cdots \leq\eta_q < \frac{n}{4}\ , \\ \quad 0\leq\lambda^{(v)}_1\leq\lambda^{(v)}_2\leq\cdots\leq\lambda^{(v)}_{t(v)} < \frac{n}{4}\quad (v=1,2,\cdots,r),\quad 1\leq\theta_1\leq\theta_2\leq\cdots\leq\theta_m < \frac{n}{4}\ , \\ \quad 0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 < \frac{n}{2}\ ,\quad 0 \leq \gamma_1 \leq \left[\frac{\alpha}{2}\right] = \frac{\alpha-1}{2}\ ,\quad \gamma_1+\gamma_2 \leq \frac{n}{2}\ , \\ 2\gamma_1+2\gamma_2+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_\ell+\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_q+\lambda^{(1)}_1+\lambda^{(1)}_2+\cdots+\lambda^{(1)}_{t(1)}+\lambda^{(2)}_1+\lambda^{(2)}_2+ \\ \quad \cdots+\lambda^{(2)}_{t(2)}+\cdots+\lambda^{(r)}_1+\lambda^{(r)}_2+\cdots\ \lambda^{(r)}_{t(r)}+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m \equiv 0 \pmod{\frac{n}{2}}\ , \\ \mathrm{g.c.d.}(\ \gamma_1,\gamma_2,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_q,\ \lambda^{(1)}_1,\lambda^{(1)}_2,\cdots,\lambda^{(1)}_{t(1)}, \\ \quad \lambda^{(2)}_1,\lambda^{(2)}_2,\cdots,\lambda^{(2)}_{t(2)},\cdots,\lambda^{(r)}_1,\lambda^{(r)}_2,\cdots,\lambda^{(r)}_{t(r)},\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m,\ \frac{n}{2}\ ) = 1 \end{array} \right\}$$

<u>where</u> $\alpha = \mathrm{g.c.d.}(\ \gamma_1+\gamma_2,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_q,\ \lambda^{(1)}_1,\lambda^{(1)}_2,\cdots,\lambda^{(1)}_{t(1)},\lambda^{(2)}_1,\lambda^{(2)}_2,\cdots,\lambda^{(2)}_{t(2)},\cdots,\lambda^{(r)}_1,\lambda^{(r)}_2,\cdots,\lambda^{(r)}_{t(r)},\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m,\ \frac{n}{2}\ )$.

Theorem 3.6 <u>A complete set of equivalence classes of</u> $Z_n^-(2g+1,\ell,q,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)$ <u>is represented by disjoint union</u> $\mathcal{Z}_n^-(2g+1;\ell,q,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)$ <u>of the following sets</u> ;

(1) $\mathcal{Z}_n^-(2g+1;\ell,q,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)_1^0 =$

$$\left\{\begin{array}{l}(1,0,0,0,\cdots,0,0,\gamma,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_q,\ \lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\cdots,\lambda_{t(1)}^{(1)},\\ \quad\lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},\cdots,\lambda_{t(2)}^{(2)},\cdots,\lambda_1^{(r)},\lambda_2^{(r)},\cdots,\lambda_{t(r)}^{(r)},\theta_1,\theta_2,\cdots,\ \theta_m)\ ;\\ \quad 0\le\delta_1\ \le\delta_2\le\ \cdots\ \le\delta_\ell<\frac{n}{2},\quad 0\le\eta_1\le\eta_2\le\ \cdots\ \le\eta_q<\frac{n}{2}\ ,\\ \quad 0\le\lambda_1^{(v)}\le\lambda_2^{(v)}\le\cdots\le\lambda_{t(v)}^{(v)}<\frac{n}{2}\quad(v=1,2,\cdots,r),\quad 1\le\theta_1\le\theta_2\le\cdots\le\theta_m<\frac{n}{2}\ ,\\ 2\gamma+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_\ell+\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_q+\lambda_1^{(1)}+\lambda_2^{(1)}+\cdots+\lambda_{t(1)}^{(1)}+\lambda_1^{(2)}+\lambda_2^{(2)}+\cdots\\ \quad+\lambda_{t(2)}^{(2)}+\cdots\cdots+\lambda_1^{(r)}+\lambda_2^{(r)}+\cdots\ \lambda_{t(r)}^{(r)}+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m\equiv 0\pmod n\end{array}\right\}$$

$\mathcal{Z}_n^-(2g+1;\ell,q,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)_1^* =$

$$\left\{\begin{array}{l}(1,0,0,0,\cdots,0,0,\gamma,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_q,\ \lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\cdots,\lambda_{t(1)}^{(1)},\\ \quad\lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},\cdots,\lambda_{t(2)}^{(2)},\cdots,\lambda_1^{(r)},\lambda_2^{(r)},\cdots,\lambda_{t(r)}^{(r)},\theta_1,\theta_2,\cdots,\ \theta_m)\ ;\\ \quad \delta_\ell=\frac{n}{2}\ ,\ \ \eta_q=\frac{n}{2}\ ,\ \ \lambda_{t(v)}^{(v)}=\frac{n}{2}\ \ (\ 1\le\ ^\exists v\le r\ )\ \ \text{or}\ \ \theta_m=\frac{n}{2}\ ,\\ \quad 0\le\delta_1\ \le\delta_2\le\ \cdots\ \le\delta_\ell\le\frac{n}{2},\quad 0\le\eta_1\le\eta_2\le\ \cdots\ \le\eta_q\le\frac{n}{2}\ ,\quad 0\le\gamma<\frac{n}{2}\ ,\\ \quad 0\le\lambda_1^{(v)}\le\lambda_2^{(v)}\le\cdots\le\lambda_{t(v)}^{(v)}\le\frac{n}{2}\quad(v=1,2,\cdots,r),\quad 1\le\theta_1\le\theta_2\le\cdots\le\theta_m\le\frac{n}{2}\ ,\\ 2\gamma+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_\ell+\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_q+\lambda_1^{(1)}+\lambda_2^{(1)}+\cdots+\lambda_{t(1)}^{(1)}+\lambda_1^{(2)}+\lambda_2^{(2)}+\cdots\\ \quad+\lambda_{t(2)}^{(2)}+\cdots\cdots+\lambda_1^{(r)}+\lambda_2^{(r)}+\cdots\ \lambda_{t(r)}^{(r)}+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m\equiv 0\pmod n\end{array}\right\}$$

$$\mathcal{Z}_n^-(2g+1;\ell,q,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)_2^o =$$

$$\left\{\begin{array}{l}
(2,0,0,0,\cdots,0,0,\gamma,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_q,\ \lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\cdots,\lambda_{t(1)}^{(1)},\\
\quad \lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},\cdots,\lambda_{t(2)}^{(2)},\cdots,\lambda_1^{(r)},\lambda_2^{(r)},\cdots,\lambda_{t(r)}^{(r)},\theta_1,\theta_2,\cdots,\ \theta_m)\ ;\\
\gamma \text{ is odd, } \delta_j \text{ is even, } \eta_q \text{ is even, } \lambda_w^{(v)} \text{is even, } \theta_m \text{ is even,}\\
0\le\delta_1\ \le\delta_2\le\ \cdots\ \le\delta_\ell< \frac{n}{2},\quad 0\le\eta_1\le\eta_2\le\ \cdots\ \le\eta_q< \frac{n}{2}\ ,\\
0\le\lambda_1^{(v)}\le\lambda_2^{(v)}\le\cdots\le\lambda_{t(v)}^{(v)}< \frac{n}{2}\quad (v=1,2,\cdots,r),\quad 1\le\theta_1\le\theta_2\le\cdots\le\theta_m< \frac{n}{2}\ ,\\
2\gamma+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_\ell+\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_q+\lambda_1^{(1)}+\lambda_2^{(1)}+\cdots+\lambda_{t(1)}^{(1)}+\lambda_1^{(2)}+\lambda_2^{(2)}+\cdots\\
\quad +\lambda_{t(2)}^{(2)}+\cdots+\lambda_1^{(r)}+\lambda_2^{(r)}+\cdots\ \lambda_{t(r)}^{(r)}+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m \equiv 0 \pmod n
\end{array}\right\}$$

$$\mathcal{Z}_n^-(2g+1;\ell,q,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)_2^* =$$

$$\left\{\begin{array}{l}
(2,0,0,0,\cdots,0,0,\gamma,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_q,\ \lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\cdots,\lambda_{t(1)}^{(1)},\\
\quad \lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},\cdots,\lambda_{t(2)}^{(2)},\cdots,\lambda_1^{(r)},\lambda_2^{(r)},\cdots,\lambda_{t(r)}^{(r)},\theta_1,\theta_2,\cdots,\ \theta_m)\ ;\\
\delta_\ell = \frac{n}{2}\ ,\quad \eta_q = \frac{n}{2}\ ,\quad \lambda_{t(v)}^{(v)} = \frac{n}{2}\quad (\ 1 \le \exists v \le r\ )\quad \text{or}\quad \theta_m = \frac{n}{2}\ ,\\
\gamma \text{ is odd, } \delta_j \text{ is even, } \eta_q \text{ is even, } \lambda_w^{(v)} \text{is even, } \theta_m \text{ is even,}\\
0\le\delta_1\ \le\delta_2\le\ \cdots\ \le\delta_\ell\le \frac{n}{2},\quad 0\le\eta_1\le\eta_2\le\ \cdots\ \le\eta_q\le \frac{n}{2}\ ,\quad 0 \le \gamma < \frac{n}{2}\ ,\\
0\le\lambda_1^{(v)}\le\lambda_2^{(v)}\le\cdots\le\lambda_{t(v)}^{(v)}\le \frac{n}{2}\quad (v=1,2,\cdots,r),\quad 1\le\theta_1\le\theta_2\le\cdots\le\theta_m\le \frac{n}{2}\ ,\\
2\gamma+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_\ell+\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_q+\lambda_1^{(1)}+\lambda_2^{(1)}+\cdots+\lambda_{t(1)}^{(1)}+\lambda_1^{(2)}+\lambda_2^{(2)}+\cdots\\
\quad +\lambda_{t(2)}^{(2)}+\cdots+\lambda_1^{(r)}+\lambda_2^{(r)}+\cdots\ \lambda_{t(r)}^{(r)}+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m \equiv 0 \pmod n
\end{array}\right\}$$

if $g \ge 1$,

(2) $\sum_n^-(1;\ell,q,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)^0 =$

$$\left\{\begin{array}{l}
(\gamma,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_q,\ \lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\cdots,\lambda_{t(1)}^{(1)},\ \lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},\\
\quad\cdots,\lambda_{t(2)}^{(2)},\cdots,\lambda_1^{(r)},\lambda_2^{(r)},\cdots,\lambda_{t(r)}^{(r)},\theta_1,\theta_2,\cdots,\ \theta_m);\\
\quad 0\le\delta_1\le\delta_2\le\cdots\le\delta_\ell<\frac{n}{2},\quad 0\le\eta_1\le\eta_2\le\cdots\le\eta_q<\frac{n}{2},\\
\quad 0\le\lambda_1^{(v)}\le\lambda_2^{(v)}\le\cdots\le\lambda_{t(v)}^{(v)}<\frac{n}{2}\quad(v=1,2,\cdots,r),\quad 1\le\theta_1\le\theta_2\le\cdots\le\theta_m<\frac{n}{2},\\
2\gamma+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_\ell+\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_q+\lambda_1^{(1)}+\lambda_2^{(1)}+\cdots+\lambda_{t(1)}^{(1)}+\lambda_1^{(2)}+\lambda_2^{(2)}+\cdots\\
\quad+\lambda_{t(2)}^{(2)}+\cdots+\lambda_1^{(r)}+\lambda_2^{(r)}+\cdots\ \lambda_{t(r)}^{(r)}+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m\equiv 0\pmod{n},\\
\text{g.c.d.}(\ \gamma,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_q,\ \lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\cdots,\lambda_{t(1)}^{(1)},\lambda_1^{(2)},\\
\quad\lambda_2^{(2)},\cdots,\lambda_{t(2)}^{(2)},\cdots,\lambda_1^{(r)},\lambda_2^{(r)},\cdots,\lambda_{t(r)}^{(r)},\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m,\ n\ )=1
\end{array}\right\}$$

$\sum_n^-(1;\ell,q,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)^* =$

$$\left\{\begin{array}{l}
(\gamma,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_q,\ \lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\cdots,\lambda_{t(1)}^{(1)},\ \lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},\\
\quad\cdots,\lambda_{t(2)}^{(2)},\cdots,\lambda_1^{(r)},\lambda_2^{(r)},\cdots,\lambda_{t(r)}^{(r)},\theta_1,\theta_2,\cdots,\ \theta_m);\\
\quad\delta_\ell=\frac{n}{2},\quad \eta_q=\frac{n}{2},\quad \lambda_{t(v)}^{(v)}=\frac{n}{2}\quad(\ 1\le\exists v\le r\ )\quad\text{or}\quad\theta_m=\frac{n}{2},\\
\quad 0\le\delta_1\le\delta_2\le\cdots\le\delta_\ell\le\frac{n}{2},\quad 0\le\eta_1\le\eta_2\le\cdots\le\eta_q\le\frac{n}{2},\quad 0\le\gamma<\frac{n}{2},\\
0\le\lambda_1^{(v)}\le\lambda_2^{(v)}\le\cdots\le\lambda_{t(v)}^{(v)}\le\frac{n}{2}\quad(v=1,2,\cdots,r),\quad 1\le\theta_1\le\theta_2\le\cdots\le\theta_m\le\frac{n}{2},\\
2\gamma+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_\ell+\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_q+\lambda_1^{(1)}+\lambda_2^{(1)}+\cdots+\lambda_{t(1)}^{(1)}+\lambda_1^{(2)}+\lambda_2^{(2)}+\cdots\\
\quad+\lambda_{t(2)}^{(2)}+\cdots+\lambda_1^{(r)}+\lambda_2^{(r)}+\cdots\ \lambda_{t(r)}^{(r)}+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m\equiv 0\pmod{n},\\
\text{g.c.d.}(\ \gamma,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_q,\ \lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\cdots,\lambda_{t(1)}^{(1)},\lambda_1^{(2)},\\
\quad\lambda_2^{(2)},\cdots,\lambda_{t(2)}^{(2)},\cdots,\lambda_1^{(r)},\lambda_2^{(r)},\cdots,\lambda_{t(r)}^{(r)},\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m,\ n\ )=1
\end{array}\right\}$$

Theorem 3.7 <u>A complete set of equivalence classes of</u> $Z_n^-(2g+2;\ell,q,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)$, $g \geq 1$, <u>is represented by</u> <u>disjoint union</u> ${}_n^-(2g+2;\ell,q,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)$ <u>of the following sets</u> ;

$$\mathcal{Z}_n^-(2g+2;\ell,q,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)_1^0 =$$

$$\left\{\begin{array}{l}
(1,0,0,0,\cdots,0,0,\gamma_1,\gamma_2,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_q,\lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\cdots,\\
\quad \lambda_{t(1)}^{(1)},\lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},\cdots,\lambda_{t(2)}^{(2)},\cdots,\lambda_1^{(r)},\lambda_2^{(r)},\cdots,\lambda_{t(r)}^{(r)},\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m);\\
\quad \gamma_1=0,\quad 0\leq\delta_1\leq\delta_2\leq\cdots\leq\delta_\ell<\frac{n}{2},\quad 0\leq\eta_1\leq\eta_2\leq\cdots\leq\eta_q<\frac{n}{2},\\
\quad 0\leq\lambda_1^{(v)}\leq\lambda_2^{(v)}\leq\cdots\leq\lambda_{t(v)}^{(v)}<\frac{n}{2}\quad (v=1,2,\cdots,r),\quad 1\leq\theta_1\leq\theta_2\leq\cdots\leq\theta_m<\frac{n}{2},\\
2\gamma_2+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_\ell+\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_q+\lambda_1^{(1)}+\lambda_2^{(1)}+\cdots+\lambda_{t(1)}^{(1)}+\lambda_1^{(2)}+\lambda_2^{(2)}+\cdots\\
\quad +\lambda_{t(2)}^{(2)}+\cdots+\lambda_1^{(r)}+\lambda_2^{(r)}+\cdots\ \lambda_{t(r)}^{(r)}+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m \equiv 0 \pmod{n}
\end{array}\right\}$$

$$\mathcal{Z}_n^-(2g+2;\ell,q,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)_1^* =$$

$$\left\{\begin{array}{l}
(1,0,0,0,\cdots,0,0,\gamma_1,\gamma_2,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_q,\ \lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\cdots,\\
\quad \lambda_{t(1)}^{(1)},\lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},\cdots,\lambda_{t(2)}^{(2)},\cdots,\lambda_1^{(r)},\lambda_2^{(r)},\cdots,\lambda_{t(r)}^{(r)},\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m);\\
\quad \delta_\ell=\frac{n}{2},\quad \eta_q=\frac{n}{2},\quad \lambda_{t(v)}^{(v)}=\frac{n}{2}\quad (1\leq \exists v\leq r)\ \text{ or }\ \theta_m=\frac{n}{2},\\
\quad \gamma_1=0,\quad 0\leq\delta_1\leq\delta_2\leq\cdots\leq\delta_\ell\leq\frac{n}{2},\quad 0\leq\eta_1\leq\eta_2\leq\cdots\leq\eta_q\leq\frac{n}{2},\ 0\leq\gamma_2<\frac{n}{2},\\
\quad 0\leq\lambda_1^{(v)}\leq\lambda_2^{(v)}\leq\cdots\leq\lambda_{t(v)}^{(v)}\leq\frac{n}{2}\quad (v=1,2,\cdots,r),\quad 1\leq\theta_1\leq\theta_2\leq\cdots\leq\theta_m\leq\frac{n}{2},\\
2\gamma_2+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_\ell+\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_q+\lambda_1^{(1)}+\lambda_2^{(1)}+\cdots+\lambda_{t(1)}^{(1)}+\lambda_1^{(2)}+\lambda_2^{(2)}+\cdots\\
\quad +\lambda_{t(2)}^{(2)}+\cdots+\lambda_1^{(r)}+\lambda_2^{(r)}+\cdots\ \lambda_{t(r)}^{(r)}+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m \equiv 0 \pmod{n}
\end{array}\right\}$$

$$\mathcal{Z}_n^-(2g+2;\ell,q,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)_2^0 =$$

$$\left\{\begin{array}{l}
(2,0,0,0,\cdots,0,0,\gamma_1,\gamma_2,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_q,\lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\cdots,\\
\quad \lambda_{t(1)}^{(1)},\lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},\cdots,\lambda_{t(2)}^{(2)},\cdots,\lambda_1^{(r)},\lambda_2^{(r)},\cdots,\lambda_{t(r)}^{(r)},\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m);\\
\quad \gamma_2 \text{ is odd, } \delta_j \text{ is even, } \eta_q \text{ is even, } \lambda_w^{(v)} \text{ is even, } \theta_m \text{ is even,}\\
\quad \gamma_1=1,\ \ 0\le\delta_1\le\delta_2\le\cdots\le\delta_\ell<\frac{n}{2},\ \ 0\le\eta_1\le\eta_2\le\cdots\le\eta_q<\frac{n}{2},\\
\quad 0\le\lambda_1^{(v)}\le\lambda_2^{(v)}\le\cdots\le\lambda_{t(v)}^{(v)}<\frac{n}{2}\ \ (v=1,2,\cdots,r),\ \ 1\le\theta_1\le\theta_2\le\cdots\le\theta_m<\frac{n}{2},\\
2+2\gamma_2+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_\ell+\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_q+\lambda_1^{(1)}+\lambda_2^{(1)}+\cdots+\lambda_{t(1)}^{(1)}+\lambda_1^{(2)}+\lambda_2^{(2)}+\\
\quad \cdots+\lambda_{t(2)}^{(2)}+\cdots+\lambda_1^{(r)}+\lambda_2^{(r)}+\cdots\ \lambda_{t(r)}^{(r)}+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m\equiv 0 \pmod n
\end{array}\right\}$$

$$\mathcal{Z}_n^-(2g+2;\ell,q,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)_2^* =$$

$$\left\{\begin{array}{l}
(2,0,0,0,\cdots,0,0,\gamma_1,\gamma_2,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_q,\lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\cdots,\\
\quad \lambda_{t(1)}^{(1)},\lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},\cdots,\lambda_{t(2)}^{(2)},\cdots,\lambda_1^{(r)},\lambda_2^{(r)},\cdots,\lambda_{t(r)}^{(r)},\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m);\\
\quad \delta_\ell=\frac{n}{2},\ \ \eta_q=\frac{n}{2},\ \ \lambda_{t(v)}^{(v)}=\frac{n}{2}\ \ (1\le {}^{\exists}v\le r)\ \ \text{or}\ \ \theta_m=\frac{n}{2},\\
\quad \gamma_2 \text{ is odd, } \delta_j \text{ is even, } \eta_q \text{ is even, } \lambda_w^{(v)} \text{ is even, } \theta_m \text{ is even,}\\
\quad \gamma_1=0,\ \ 0\le\delta_1\le\delta_2\le\cdots\le\delta_\ell\le\frac{n}{2},\ \ 0\le\eta_1\le\eta_2\le\cdots\le\eta_q\le\frac{n}{2},\ \ 0\le\gamma<\frac{n}{2},\\
\quad 0\le\lambda_1^{(v)}\le\lambda_2^{(v)}\le\cdots\le\lambda_{t(v)}^{(v)}\le\frac{n}{2}\ \ (v=1,2,\cdots,r),\ \ 1\le\theta_1\le\theta_2\le\cdots\le\theta_m\le\frac{n}{2},\\
2+2\gamma_2+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_\ell+\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_q+\lambda_1^{(1)}+\lambda_2^{(1)}+\cdots+\lambda_{t(1)}^{(1)}+\lambda_1^{(2)}+\lambda_2^{(2)}+\\
\quad \cdots+\lambda_{t(2)}^{(2)}+\cdots+\lambda_1^{(r)}+\lambda_2^{(r)}+\cdots\ \lambda_{t(r)}^{(r)}+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m\equiv 0 \pmod n
\end{array}\right\}$$

Theorem 3.8 <u>A complete set of equivalence classes of</u> $Z_n^-(2;\ell,q,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)$ <u>is represented by disjoint union</u> $\mathcal{Z}_n^-(2;\ell,q,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)$ <u>of the following sets</u> ;

$$\mathcal{Z}_n^-(2;\ell,q,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)^0 =$$

$$\left\{\begin{array}{l}(\gamma_1,\gamma_2,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_q,\ \lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\cdots,\lambda_{t(1)}^{(1)},\ \lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},\\ \quad\cdots,\lambda_{t(2)}^{(2)},\cdots,\lambda_1^{(r)},\lambda_2^{(r)},\cdots,\lambda_{t(r)}^{(r)},\theta_1,\theta_2,\cdots,\ \theta_m)\ ;\\ \quad 0\le\delta_1\le\delta_2\le\cdots\le\delta_\ell<\frac{n}{2},\quad 0\le\eta_1\le\eta_2\le\cdots\le\eta_q<\frac{n}{2},\\ \quad 0\le\lambda_1^{(v)}\le\lambda_2^{(v)}\le\cdots\le\lambda_{t(v)}^{(v)}<\frac{n}{2}\quad(v=1,2,\cdots,r),\quad 1\le\theta_1\le\theta_2\le\cdots\le\theta_m<\frac{n}{2},\\ \quad 0\le\gamma_1\le\gamma_2<n\ ,\quad 0\le\gamma_1\le\left[\frac{\alpha}{2}\right],\quad \gamma_1+\gamma_2\le n\ ,\\ 2\gamma_1+2\gamma_2+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_\ell+\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_q+\lambda_1^{(1)}+\lambda_2^{(1)}+\cdots+\lambda_{t(1)}^{(1)}+\lambda_1^{(2)}+\lambda_2^{(2)}+\\ \quad\cdots+\lambda_{t(2)}^{(2)}+\cdots+\lambda_1^{(r)}+\lambda_2^{(r)}+\cdots\ \lambda_{t(r)}^{(r)}+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m\equiv 0\pmod n\ ,\\ \mathrm{g.c.d.}(\ \gamma_1,\gamma_2,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_q,\ \lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\cdots,\lambda_{t(1)}^{(1)},\\ \quad\lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},\cdots,\lambda_{t(2)}^{(2)},\cdots,\lambda_1^{(r)},\lambda_2^{(r)},\cdots,\lambda_{t(r)}^{(r)},\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m,\ n\ )=1\end{array}\right\}$$

$$\mathcal{Z}_n^-(2;\ell,q,t(1),t(2),\cdots,t(r),m)^* =$$

$$\left\{\begin{array}{l}(\gamma_1,\gamma_2,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_q,\ \lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\cdots,\lambda_{t(1)}^{(1)},\ \lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},\\ \quad\cdots,\lambda_{t(2)}^{(2)},\cdots,\lambda_1^{(r)},\lambda_2^{(r)},\cdots,\lambda_{t(r)}^{(r)},\theta_1,\theta_2,\cdots,\ \theta_m)\ ;\\ \quad\delta_\ell=\frac{n}{2}\ ,\quad\eta_q=\frac{n}{2}\ ,\quad\lambda_{t(v)}^{(v)}=\frac{n}{2}\quad(\ 1\le{}^{\exists}v\le r\ )\quad\text{or}\quad\theta_m=\frac{n}{2}\ ,\\ \quad 0\le\delta_1\le\delta_2\le\cdots\le\delta_\ell\le\frac{n}{2},\quad 0\le\eta_1\le\eta_2\le\cdots\le\eta_q\le\frac{n}{2},\\ \quad 0\le\lambda_1^{(v)}\le\lambda_2^{(v)}\le\cdots\le\lambda_{t(v)}^{(v)}\le\frac{n}{2}\quad(v=1,2,\cdots,r),\quad 1\le\theta_1\le\theta_2\le\cdots\le\theta_m\le\frac{n}{2},\\ \quad 0\le\gamma_1\le\gamma_2<\frac{n}{2}\ ,\quad 0\le\gamma_1\le\left[\frac{\alpha}{2}\right],\quad\gamma_1+\gamma_2\le\frac{n}{2}\ ,\end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{l} 2\gamma_1+2\gamma_2+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_\ell+\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_q+\lambda_1^{(1)}+\lambda_2^{(1)}+\cdots+\lambda_{t(1)}^{(1)}+\lambda_1^{(2)}+\lambda_2^{(2)}+ \\ \quad \cdots+\lambda_{t(2)}^{(2)}+\cdots+\lambda_1^{(r)}+\lambda_2^{(r)}+\cdots\ \lambda_{t(r)}^{(r)}+\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_m \equiv 0 \pmod n, \\ \text{g.c.d.}(\ \gamma_1,\gamma_2,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_q,\ \lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\cdots,\lambda_{t(1)}^{(1)}, \\ \quad \lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},\cdots,\lambda_{t(2)}^{(2)},\cdots,\lambda_1^{(r)},\lambda_2^{(r)},\cdots,\lambda_{t(r)}^{(r)},\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m,\ n\ ) = 1 \end{array}\right)$$

<u>where</u> $\alpha = \text{g.c.d.}(\ \gamma_1+\gamma_2,\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_q,\ \lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\cdots,$
$\lambda_{t(1)}^{(1)},\lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},\cdots,\lambda_{t(2)}^{(2)},\cdots,\lambda_1^{(r)},\lambda_2^{(r)},\cdots,\lambda_{t(r)}^{(r)},\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m,\ n\ )$.

さて $\hat{P}_n$ の元 (f, M) に対して $RD(f,M) = (f_*, M_*, S_*)$ と おくとき M, M_*, $X = M/f = M_*/f_*$ の orientability によって 次の4つに $\hat{P}_n$ は分かれる.

$\hat{P}_n^{+-} = \{ (f,M) \in \hat{P}_n \ ; \ M : \text{non-orientable}, M_* : \text{orientable}, X : \text{orientable} \}$

$\hat{P}_n^{-+} = \{ (f,M) \in \hat{P}_n \ ; \ M : \text{orientable}, M_* : \text{orientable}, X : \text{non-orientable} \}$

$\hat{P}_n^{--} = \{ (f,M) \in \hat{P}_n \ ; \ M : \text{non-orientable}, M_* : \text{orientable}, X : \text{non-orientable} \}$ $(\frac{n}{2} : \text{even})$

$\hat{P}_n^{oo} = \{ (f,M) \in \hat{P}_n \ ; \ M : \text{non-orientable}, M_* : \text{non-orientable}, X : \text{non-orientable} \}$

また P_n^2 の元 (f,M) に対しても $RD = (f_*, M_*, S_*)$ とおく. このとき P_n^2 は次の2つに分かれる.

$P_n^{2+} = \{ (f,M) \in P_n^2 \ ; \ M : \text{orientable} \}$, このとき M_* も orientable, X は non-orientable $(\frac{n}{2} : \text{odd}$ より$)$

$P_n^{2o} = \{ (f,M) \in P_n^2 \ ; \ M : \text{non-orientable} \}$ このとき M_* も X も non-orientable である $(\frac{n}{2} : \text{odd})$.

$\hat{P}_n$ の元は $(n : \text{even})$

$M : \text{orientable} \longrightarrow M_* : \text{orientable} \xrightarrow{S^1(f) \neq \phi \text{ より}} X : \text{non-orientable}$ $\quad \boxed{\hat{P}_n^{-+}}$

$M : \text{non-orientable} \longrightarrow M_* : \text{orientable} \longrightarrow X : \text{non-orientable} \ (\frac{n}{2} : \text{even})$ $\quad \boxed{\hat{P}_n^{--}}$

$\phantom{M : \text{non-orientable} \longrightarrow M_* : \text{orientable}} \searrow X : \text{orientable}$ $\quad \boxed{\hat{P}_n^{+-}}$

$M : \text{non-orientable} \longrightarrow M_* : \text{non-orientable} \longrightarrow X : \text{non-orientable}$ $\quad \boxed{\hat{P}_n^{oo}}$

P_n^2 の元は $(n : \text{even})$ $(\frac{n}{2} : \text{odd})$

$M : \text{orientable} \longrightarrow M_* : \text{orientable} \xrightarrow{\frac{n}{2} : \text{odd}} X : \text{non-orientable}$ $\quad P_n^{2+}$

$M : \text{non-orientable} \longrightarrow M_* : \text{non-orientable} \longrightarrow X : \text{non-orientable}$ $\quad P_n^{2o}$

となっている。

各 $\mathcal{S}_n^{\varepsilon}(g ; l, g, t(1), t(2), \dots, t(r), n)$ の元は次のように分かれることが示される。

Proposition 3.2

(1) $\mathcal{Z}_{n/2}(g\,;\,\ell,\,\delta,\,t(1),\,t(2),\cdots,t(r),\,m)$ の元に対応する P_n^2 の元は P_n^{2+} に属する。

(2) $\mathcal{Z}_{n/2}^-(g:\ell,\delta,t(1),\,t(2),\cdots,t(r),\,m)$ の元に対応する P_n^2 の元は P_n^{20} に属する。

(3) $\mathcal{Z}_n(g\,;\,\ell,\,\delta,\,t(1),\,t(2),\cdots,t(r),\,m)$ の元に対応する $\hat{P}_n$ の元は $\hat{P}_n^{+-}$ に属する。

(4) $\mathcal{Z}_n^-(g\,;\,\ell,\,\delta,\,t(1),\,t(2),\cdots,t(r),\,m)_1^\circ$ または $\mathcal{Z}_n^-(g\,;\,\ell,\,\delta,\,t(1),\,t(2),\cdots\cdots,t(r),\,m)_1^*$ に属する元は $g\geq 3$ ならば $\hat{P}_n^{00}$ に属する。

(5) $\mathcal{Z}_n^-(g\,;\,\ell,\,\delta,\,t(1),\,t(2),\cdots,t(r),\,m)_2^\circ$ または $\mathcal{Z}_n^-(g\,;\,\ell,\,\delta,\,t(1),\,t(2),\cdots,t(r),\,m)$ に属する元は

$g\geq 3$ で $\frac{n}{2}$: odd ならば $\hat{P}_n^{-+}$ に属する。

$g\geq 3$ で $\frac{n}{2}$: even ならば $\hat{P}_n^{--}$ に属する

(6) $\mathcal{Z}_n^-(1\,;\,\ell,\,\delta,\,t(1),\,t(2),\cdots,t(r),\,m)$ の元は

δ : odd ならば $\hat{P}_n^{00}$ に属する。

$\frac{n}{2}$: odd , δ : even ならば $\hat{P}_n^{-+}$ に属する。

$\frac{n}{2}$; even , δ even ならば $\hat{P}_n^{--}$ に属する。

但し $\delta = \text{g.c.d.}\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell,\,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_g,\,\lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\cdots,\lambda_{t(1)}^{(1)},\,\lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},\cdots,\lambda_{t(2)}^{(2)},\cdots\cdots,\lambda_1^{(r)},\lambda_2^{(r)},\cdots,\lambda_{t(r)}^{(r)},\,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m,\,n\}$.

(7) $\mathcal{Z}_n^-(2\,;\,\ell,\,\delta,\,t(1),\,t(2),\cdots,t(r),\,m)$ の元は

δ ; odd ならば
δ ; even , $\gamma_1+\gamma_2$; odd ならば
$\hat{P}_n^{00}$ に属する

$\frac{n}{2}$: odd , δ : even , $\gamma_1+\gamma_2$; even ならば $\hat{P}_n^{-+}$ に属する

$\frac{n}{2}$: even , δ ; even , $\gamma_1+\gamma_2$; even ならば $\hat{P}_n^{--}$ に属する。

図式でかくと．

$Z_{n/2}(\quad) \longleftrightarrow \boxed{P_n^{2+}}$

$Z^-_{n/2}(\quad) \longleftrightarrow \boxed{P_n^{20}}$

$Z_n(\quad) \longleftrightarrow \boxed{\hat{P}_n^{+-}}$

$\langle Z_n^-(g:\quad)\rangle$ については

$g \geqq 3$ のとき

$\boxed{Z_n^-(\quad)_1^{\circ}}$ or $\boxed{Z_n^-(\quad)_1^{*}}$ $\longleftrightarrow \boxed{\hat{P}_n^{\circ\circ}}$

$\boxed{Z_n^-(\quad)_2^{\circ}}$ or $\boxed{Z_n^-(\quad)_2^{*}}$

$\boxed{\frac{n}{2}:\text{odd}} \longleftrightarrow \boxed{\hat{P}_n^{-+}}$

$\boxed{\frac{n}{2}:\text{even}} \longleftrightarrow \boxed{\hat{P}_n^{--}}$

$g = 1$ のとき

$\boxed{\delta:\text{odd}} \longleftrightarrow \boxed{\hat{P}_n^{\circ\circ}}$

$\boxed{\delta:\text{even}\quad \frac{n}{2}:\text{odd}} \longleftrightarrow \boxed{\hat{P}_n^{-+}}$

$\boxed{\delta:\text{even}\quad \frac{n}{2}:\text{even}} \longleftrightarrow \boxed{\hat{P}_n^{--}}$

$g = 2$ のとき

$\boxed{\delta:\text{odd}} \longleftrightarrow \hat{P}_n^{\circ\circ}$

$\boxed{\delta:\text{even},\ \gamma_1+\gamma_2:\text{odd}} \longleftrightarrow \hat{P}_n^{\circ\circ}$

$\boxed{\delta:\text{even},\ \gamma_1+\gamma_2:\text{even},\ \frac{n}{2}:\text{odd}} \longleftrightarrow \hat{P}_n^{-+}$

$\boxed{\delta:\text{even},\ \gamma_1+\gamma_2:\text{even},\ \frac{n}{2}:\text{even}} \longrightarrow \hat{P}_n^{--}$

[$\hat{P}_n^{-+}$ と $\hat{P}_n^{--}$ の区別は $\frac{n}{2}$ の $\underline{\text{odd}}$ か $\underline{\text{even}}$ によっている。]

§4. Singular Data による P_n の(同値類の)分類

$\boxed{\hat{P}_n \text{ の Singular data } \mathcal{D} \text{ の表現方法}}$ $(f,M)\in\hat{P}_n$

① $x\in S^0(f_\circ)$ に対しては

$1\le{}^{\exists!}a<n$ s.t. $f^a(x)=x$ かつ $f^b(x)\ne x\ (1\le{}^{\forall}b<a)$

ので，このときに

$$x\in\tilde{n}_a$$

であるという．さらに $\tilde{\mathfrak{n}}=(\tilde{n}_a)_{a|n}$ $(a\ne n)$; vector of $\tilde{n}_a$

と表わす．この a は

$$p: M \longrightarrow M/f = X \quad (\text{標準写像})$$

とかくとき $p^{-1}p(x)$ の元の個数である．(あとも同じ)

② $D_u^{\circ+}$ によって $S^1(f)$ のうちの loop で しかも 2-sided in M のものを表わすとき

上と同様に $1\le{}^{\exists!}a<n$ s.t. $f^a(D_u^{\circ+})=D_u^{\circ+}$ かつ $f^b(D_u^{\circ+})\ne D_u^{\circ+}\ (1\le{}^{\forall}b<a)$

をみたす a が存在するので

$$D_u^{\circ+}\in\hat{\gamma}_a^+$$

であるという．そして $\hat{\gamma}^+=(\hat{\gamma}_a^+)_{a|n}$; vector of $\hat{\gamma}_a^+$ とおく

③ $D_u^{\circ-}$ によって $S^1(f)$ のうちの loop で しかも 1-sided in M のものを表わすとき

$1\le{}^{\exists!}a<n$ s.t. $f^a(D_u^{\circ-})=D_u^{\circ-}$ かつ $f^b(D_u^{\circ-})\ne D_u^{\circ-}\ (1\le{}^{\forall}b<a)$

かつ

$$D_u^{\circ-}\in\hat{\gamma}_a^-$$

とかき $\hat{\gamma}^-=(\hat{\gamma}_a^-)_{a|n}$; vector of $\hat{\gamma}_a^-$ とおく

④ D_j によって ∂M の連結成分であって $S^1(f)$ と交わらないものを表わすとき

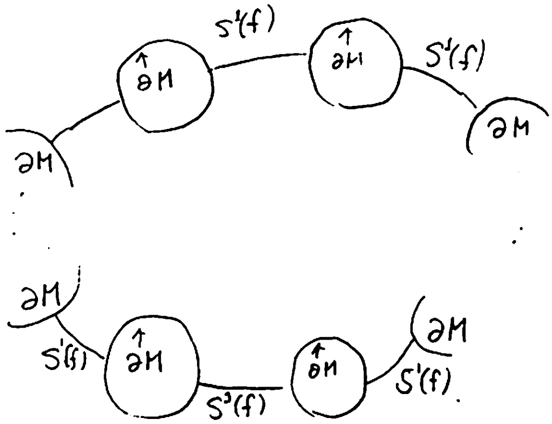
$1\le{}^{\exists!}a<n$ s.t. $f^a(D_j)=D_j$ かつ $f^b(D_j)\ne D_j\ (1\le{}^{\forall}b<a)$

をみたす a によって

$$D_j\in\hat{\ell}_a$$

であるといい $\hat{\ell}=(\hat{\ell}_a)_{a|n}$; vector of $\hat{\ell}_a$ とする

$S^1(f)$の連結成分のうち proper arc であるものは次の図のようになっていた。



すなわち ∂Mの連結成分で $S^1(f)$と交わるものはちょうど2点で $S^1(f)$ と交わる。そこで我々は $\partial M \cup S^1(f)$ の連結成分を Φ-set と呼んだ（$S^1(f)$のうちloopであるものは除いて）
この Φ-set については

⑤ $\Phi_w^+(v)$ によって Φ-setのうちで 2-sided in M であって $\Phi_w^+(v)$ は $S^1(f)$の連結成分を v 個含む（あるいは∂Mの component を v 個含むといっても同じ）ものを表わすとき
$1 \leq \exists' a < n$ s.t. $f^a(\Phi_w^+(v)) = \Phi_w^+(v)$ かつ $f^b(\Phi_w^+(v)) \neq \Phi_w^+(v)$ $(1 \leq \forall b < a)$
をとり $\Phi_w^+(v) \in \hat{t}_a^+(v)$ といい $\hat{t}_a^+(v)$ をあつめたものを $\hat{\mathcal{T}}^+ = (\hat{t}_a^+(v))_{\substack{a|n \\ v \in N}}$ と表わす

⑥ $\Phi_w^-(v)$ によって 1-sided Φ-set であって $S^1(f)$ の連結成分を v 個含むものを表わすとき
$1 \leq \exists' a < n$ $f^a(\Phi_w^-(v)) = \Phi_w^-(v)$ かつ $f^b(\Phi_w^-(v)) \neq \Phi_w^-(v)$ $(1 \leq \forall b < a)$
をとり $\Phi_w^-(v) \in \hat{t}_a^-(v)$ といい $\hat{t}_a^-(v)$ をあつめたものを $\hat{\mathcal{T}}^- = (\hat{t}_a^+(v))_{\substack{a|n \\ v \in N}}$ と表わす

この ①～⑥ をあわせたものが $\hat{P}_n$ の元 (f,M) に対する Singular Data といい $\mathcal{D}$ で表わす。さて $\hat{P}_n^{-+}, \hat{P}_n^{--}, \hat{P}_n^{+-}, \hat{P}_n^{00}$ の4つと M の genus $\hat{g}$ とするとき

$\hat{P}_n^{\varepsilon\varepsilon'}(\hat{g};\mathcal{D})$ について同値類を分類すればよい。

$\boxed{P_n^2 \text{ の場合にも Singular Data } \mathcal{D}}$ を同じように書わそう。

但し明らかにこのときは

③ D_u^{0-} 1-sided loop $\subset S^1(f)$

⑦ $\overline{\Phi}_w(u)$ 1-sided Φ-set は存在しない。

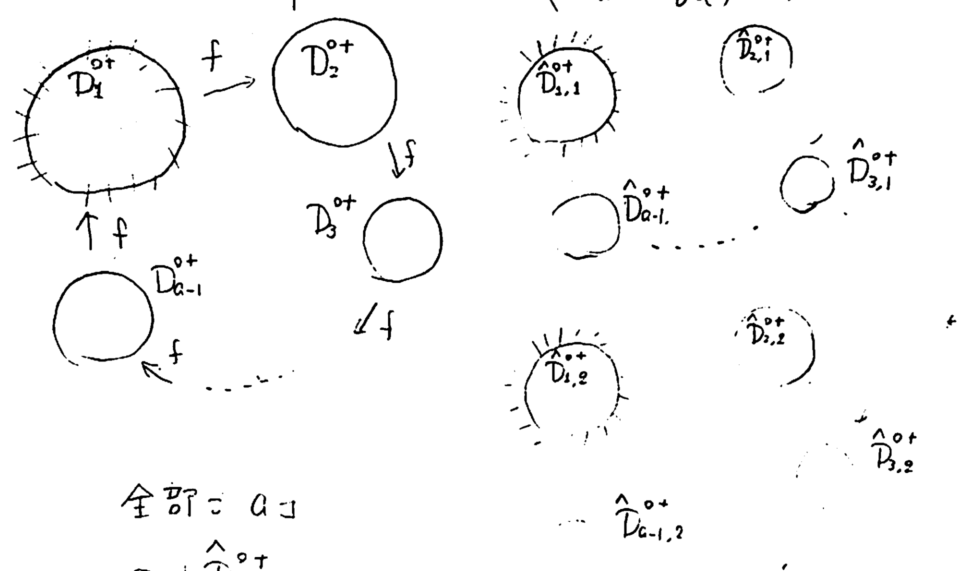
さて P_n^{2+}, P_n^{2-} のそれぞれについて同様に

$P_n^{2\varepsilon}(\hat{g},\mathcal{D})$ について同値類を分類すればよい。

次に Reducing operation によって $S^1(f)$ の成分すなわち loop あるいは Φ-set がどのように変わるかをみてみよう。

〈$\hat{P}_n$ のときは〉

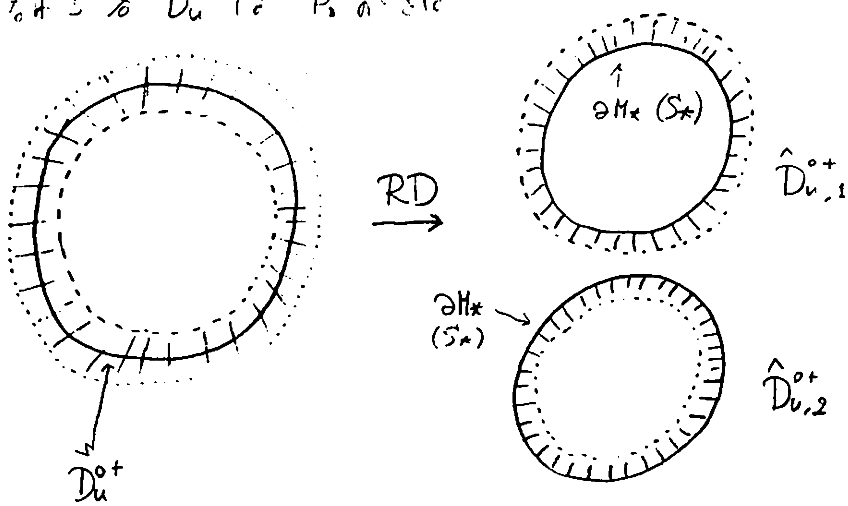
D_u^{0+} : a-sided loop $\subset S^1(f)$ $\left(D_u^{0+} \in \hat{g}_a\right)$ とする



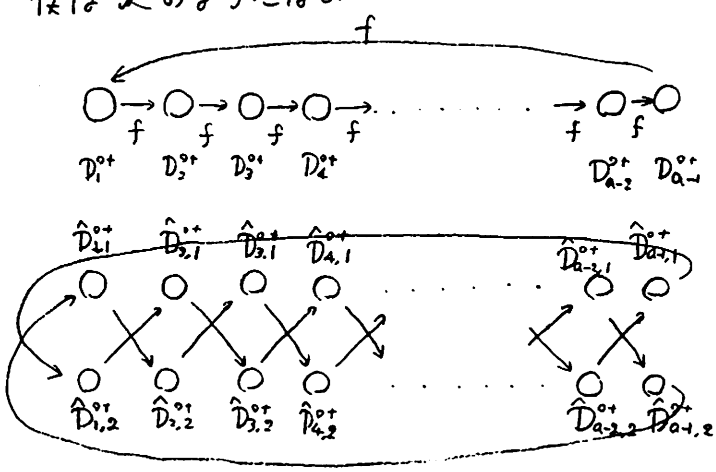
全部で a コ

$D_u^{0+} \xrightarrow{\mathrm{RD}} \begin{cases} \hat{D}_{u,1}^{0+} \\ \hat{D}_{u,2}^{0+} \end{cases}$ となる

すなわち 各 $D_u^{\circ +}$ は $\hat{P}_2$ のときは



で f_* は次のようになる。



したがって　f_* については　$\hat{P}_n$ の場合は

$$f_*^{2a}(\hat{D}^{\circ +}_{u,1}) = \hat{D}^{\circ +}_{u,1} \quad \text{かつ} \quad f_*^{b}(\hat{D}^{\circ +}_{u,1}) \neq \hat{D}^{\circ +}_{u,1} \quad (1 \leq {}^{\forall}b < 2a)$$

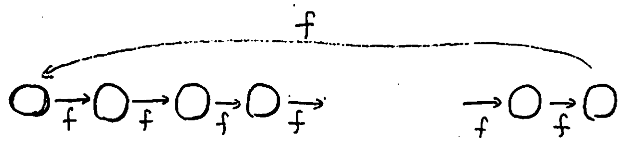
になる。$\hat{\delta}_a^{+} \neq \phi$ なるためには

$2a | n$ すなわち <u>$a | \frac{n}{2}$ であって</u>　<u>$2a | \frac{n}{2}$ でない。</u>

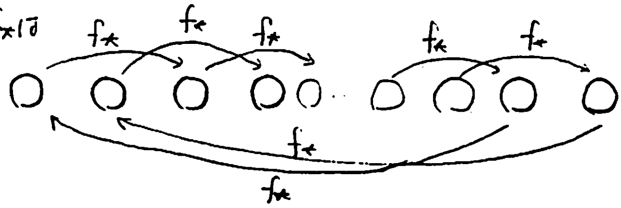
P_n^2のときは $D^{\circ+}_{u,2}$ も写すことになっているので

$D^{\circ+}_u \longrightarrow \hat{D}^{\circ+}_{u,1}$ だけを写しているのに

fを



とするとf_*は

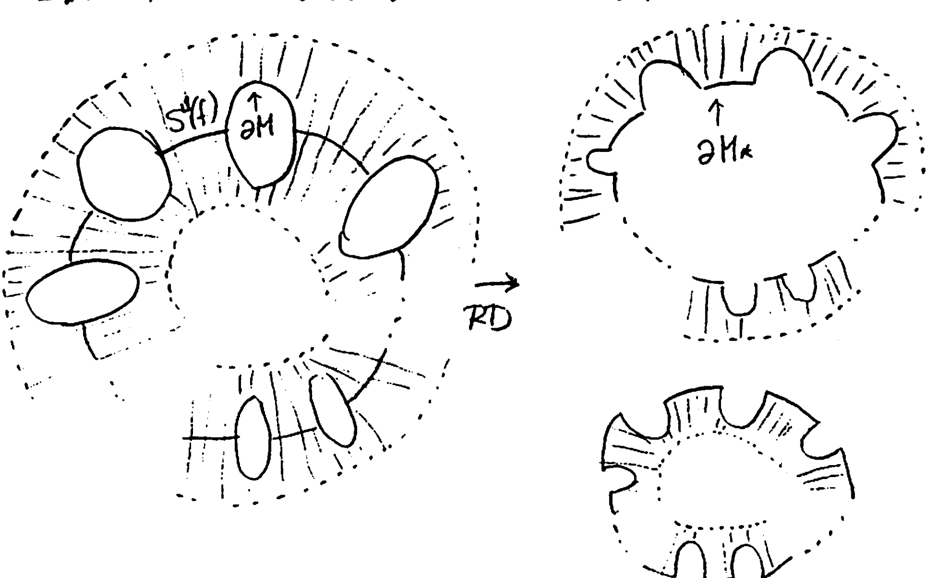


となっている.

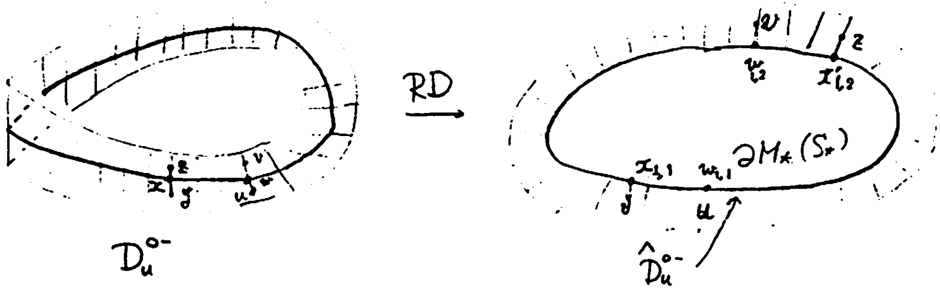
$D^{\circ+}_u \in \hat{\mathcal{g}}^+_a$ ならば $f_*^a(\hat{D}^{\circ+}_{u,1}) = \hat{D}^{\circ+}_{u,1}$ かつ $f_*^b(\hat{D}^{\circ+}_{u,1}) \neq \hat{D}^{\circ+}_{u,1}$
$(1 \leq {}^\forall b < a)$

すなわち $a \mid \frac{n}{2}$ である($\hat{\mathcal{g}}^+_a \neq \phi$ であるのは) ($\frac{n}{2}$は odd であって)

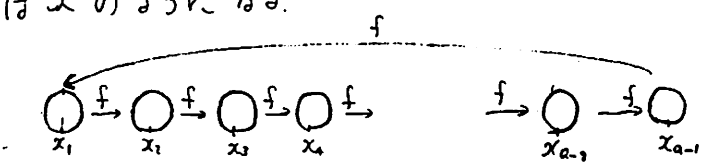
Φ-set (2-sided) のときも同様であるが、
$\Phi^+_{m}(v)$ について vは変化しないことのみを注意しておく.



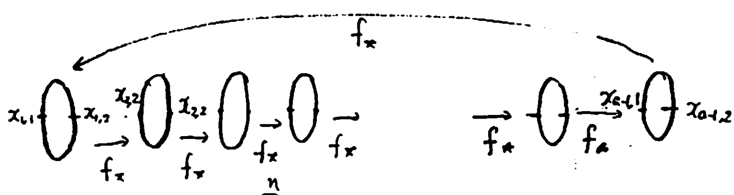
次に D_u^{0-} ; 1-sided loop $\subset S^1(f)$ ($D_u^{0-} \in \mathfrak{f}_a^-$ とする)
($\hat{P}_n$ のとき(しか存在しない))



で f_* は次のようになる.



$f(x_i)=x_{i+1}$



$f_*^{\frac{n}{2}}(x_{i,1}) = x_{i,2}$　　$f_*(x_{i,1}) = x_{i+1,1}$, $f_*(x_{i,2}) = x_{i+1,2}$

したがって　$\hat{\mathfrak{f}}_a^- \neq \phi \longrightarrow a \,|\, \frac{n}{2}$

1-sided Φ-set $\Phi_w^-(v)$ についても同様だが

v が 2倍になることが注意を要すること.

$S^0(f)$ の元 x については

$\hat{P}_n$ のとき　$x \in \hat{\mathfrak{m}}_a \xrightarrow{RD} x \in \hat{\mathfrak{m}}_c$

P_n^2 のとき　$x \in \hat{\mathfrak{m}}_a \xrightarrow{RD} x \in \hat{\mathfrak{m}}_{a/2}$ になる.

さらに $RD(f,M)=(f_*,M_*,S_*)$ について $\hat{g}$ = genus of M_* は次のようになる.

$\hat{P}_n^{+-}(\hat{g},\vartheta)$ のとき $\hat{g}=\frac{\hat{g}}{2}-\hat{g}^+-\hat{t}^+-\frac{\hat{t}^-}{2}-\frac{\hat{g}^-}{2}$

$\hat{P}_n^{--}(\hat{g},\vartheta)$ のとき $\hat{g}=\frac{\hat{g}}{2}-\hat{g}^+-\hat{t}^+-\frac{\hat{t}^-}{2}-\frac{\hat{g}^-}{2}$

$\hat{P}_n^{-+}(\hat{g},\vartheta)$ のとき $\hat{g}=\hat{g}-\hat{g}^+-\hat{t}^+-\hat{g}^--\hat{t}^-$

$\hat{P}_n^{00}(\hat{g},\vartheta)$ のとき $\hat{g}=\hat{g}-2\hat{g}^+-2\hat{t}^+-\hat{g}^--\hat{t}^-$

但し $\hat{g}^+=\sum_{a|n}\hat{g}_a^+$, $\hat{g}^-=\sum_{a|n}\hat{g}_a^-$, $\hat{t}^+=\sum_{\hat{v}}\sum_{a|n}\hat{t}_a^+(\hat{v})$
$\hat{t}^-=\sum_{\hat{v}}\sum_{a|n}\hat{t}_a^-(\hat{v})$ である

また

$P_n^{2+}(\hat{g},\vartheta)$ のとき $\hat{g}=\frac{\hat{g}-\hat{g}-\hat{t}+1}{2}$

$P_n^{20}(\hat{g},\vartheta)$ のとき $\hat{g}=\frac{\hat{g}}{2}-\hat{g}-\hat{t}+1$

($\hat{g}$, $\hat{t}$ については $\hat{g}^+$, $\hat{t}^+$ しかないので $\hat{g}^+=\hat{g}$, $\hat{t}^+=\hat{t}$ と書います。)

この時 $\hat{P}_n^{\varepsilon\varepsilon'}(\hat{g},\vartheta)\neq\phi$ であるための必要条件は branched covering theory, reducing operation による変化 etc を考えれば次のように (Prop 4.1) 与えられる。

また $P_n^{2\varepsilon}(\hat{g},\vartheta)\neq\phi$ である必要条件も次の Prop 4.2 で与えられる.

Proposition 4.1 (I) <u>If</u> $\hat{P}_n^{-+}(\tilde{g},\tilde{\ell},\tilde{r},\tilde{m},\tilde{q}^+,\tilde{q}^-,\tilde{t}^+,\tilde{t}^-;\tilde{\ell},\tilde{m},\tilde{q}^+,\tilde{q}^-,\tilde{t}^+,\tilde{t}^-)\neq\emptyset$, <u>then we have the following conditions</u> ;

$(0)_*$ n <u>is even and</u> $\frac{n}{2}$ <u>is odd</u> ;

(1) $\tilde{\ell} = \sum_{a|n} \tilde{\ell}_a$, $\tilde{m} = \sum_{a|n} \tilde{m}_a$, $\tilde{q}^+ = \sum_{a|n} \tilde{q}^+_a$, $\tilde{q}^- = \sum_{a|n} \tilde{q}^-_a$, $\tilde{t}^+ = \sum_{\tilde{v}} \sum_{a|n} \tilde{t}^+_a(\tilde{v})$, $\tilde{t}^- = \sum_{\tilde{v}} \sum_{a|n} \tilde{t}^-_a(\tilde{v})$ <u>and</u> $\tilde{r} = \sum_{\tilde{v}} \sum_{a|n} (\tilde{v} \cdot \tilde{t}^+_a(\tilde{v}) + \tilde{v} \cdot \tilde{t}^-_a(\tilde{v}))$;

(2) $\tilde{\ell}_a \equiv 0 \pmod a$, $\tilde{m}_a \equiv 0 \pmod a$, $\tilde{q}^+_a \equiv 0 \pmod a$, $\tilde{q}^-_a \equiv 0 \pmod a$, $\tilde{t}^+_a(\tilde{v}) \equiv 0 \pmod a$ <u>and</u> $\tilde{t}^-_a(\tilde{v}) \equiv 0 \pmod a$ <u>for each divisor</u> a <u>of</u> n ;

$(4)_+$ <u>if</u> $\tilde{q}^+_a \neq 0$, <u>that is</u> $\hat{q}^+_{2a} \neq 0$, <u>then</u> a <u>is a divisor of</u> $\frac{n}{2}$ <u>and</u> $2a$ <u>is not a divisor of</u> $\frac{n}{2}$;

$(4)_0$ $\tilde{q}^-_a = 0$ <u>for each divisor</u> a <u>of</u> n ;

$(5)_+$ <u>if</u> $\tilde{t}^+_a(\tilde{v}) \neq 0$, <u>that is</u> $\hat{t}^+_{2a}(\hat{v}) \neq 0$, <u>then</u> a <u>is a divisor of</u> $\frac{n}{2}$, $2a$ <u>is not a divisor of</u> $\frac{n}{2}$, <u>and</u> $2a\tilde{v}$ <u>is a multiple of</u> n ;

$(5)_0$ $\tilde{t}^-_a(\tilde{v}) = 0$ <u>for each divisor</u> a <u>of</u> n ;

$(6)_{-+}$ $g_{-+} = \frac{1}{n} \{ 2\tilde{g} + \sum_{a|n} (a-n)(\ell_a+m_a) - n(q+t) + 2n - 2 \}$ <u>is a positive integer, in the case of</u> $(\varepsilon,\varepsilon') = (-,+)$;

(II) <u>Except in the case of</u> $(\varepsilon,\varepsilon') = (-,+)$, <u>if</u> $\hat{P}^{\varepsilon\varepsilon'}_n(\tilde{g},\tilde{\ell},\tilde{r},\tilde{m},\tilde{q}^+,\tilde{q}^-,\tilde{t}^+,\tilde{t}^-;\tilde{\ell},\tilde{m},\tilde{q}^+,\tilde{q}^-,\tilde{t}^+,\tilde{t}^-) \neq \emptyset$, <u>then we have the following conditions</u> ;

(0) n <u>is even</u> ;

(1) $\tilde{\ell} = \sum_{a|n} \tilde{\ell}_a$, $\tilde{m} = \sum_{a|n} \tilde{m}_a$, $\tilde{q}^+ = \sum_{a|n} \tilde{q}^+_a$, $\tilde{q}^- = \sum_{a|n} \tilde{q}^-_a$, $\tilde{t}^+ = \sum_{\tilde{v}} \sum_{a|n} \tilde{t}^+_a(\tilde{v})$, $\tilde{t}^- = \sum_{\tilde{v}} \sum_{a|n} \tilde{t}^-_a(\tilde{v})$ <u>and</u> $\tilde{r} = \sum_{\tilde{v}} \sum_{a|n} (\tilde{v} \cdot \tilde{t}^+_a(\tilde{v}) + \tilde{v} \cdot \tilde{t}^-_a(\tilde{v}))$;

(2) $\tilde{\ell}_a \equiv 0 \pmod a$, $\tilde{m}_a \equiv 0 \pmod a$, $\tilde{q}^+_a \equiv 0 \pmod a$, $\tilde{q}^-_a \equiv 0 \pmod a$, $\tilde{t}^+_a(\tilde{v}) \equiv 0 \pmod a$ <u>and</u> $\tilde{t}^-_a(\tilde{v}) \equiv 0 \pmod a$ <u>for each divisor</u> a <u>of</u> n ;

(4)$_+$ <u>if</u> $\tilde{q}^+_a \neq 0$, <u>that is</u> $\hat{q}^+_{2a} \neq 0$, <u>then</u> a <u>is a divisor of</u> $\frac{n}{2}$ <u>and</u> $2a$ <u>is not a divisor of</u> $\frac{n}{2}$;

(4)$_-$ <u>if</u> $\tilde{q}^-_a \neq 0$, <u>then</u> a <u>is a divisor of</u> $\frac{n}{2}$;

(5)$_+$ <u>if</u> $\tilde{t}^+_a(\tilde{v}) \neq 0$, <u>that is</u> $\hat{t}^+_{2a}(\hat{v}) \neq 0$, <u>then</u> a <u>is a divisor of</u> $\frac{n}{2}$, $2a$ <u>is not a divisor of</u> $\frac{n}{2}$, <u>and</u> $2a\tilde{v}$ <u>is a multiple of</u> n ;

(5)$_-$ <u>if</u> $\tilde{t}^-_a(\tilde{v}) \neq 0$, <u>then</u> a <u>is a divisor of</u> $\frac{n}{2}$, <u>and</u> $2a\tilde{v}$ <u>is a multiple of</u> n ;

(6)$_{+-}$ $g_{+-} = \frac{1}{2n} \{ \tilde{g} + \Sigma_{a|n} (a-n)(\ell_a+m_a) - n(q+t) + 2n - 2 \}$ <u>is a non-negative integer, in the case of</u> $(\varepsilon,\varepsilon') = (+,-)$;

(6)$_{--}$ $g_{--} = \frac{1}{n} \{ \tilde{g} + \Sigma_{a|n} (a-n)(\ell_a+m_a) - n(q+t) + 2n - 2 \}$ <u>is a positive integer, in the case of</u> $(\varepsilon,\varepsilon') = (-,-)$;

(6)$_{oo}$ $g_{oo} = \frac{1}{n} \{ \tilde{g} + \Sigma_{a|n} (a-n)(\ell_a+m_a) - n(q+t) + 2n - 2 \}$ <u>is a positive integer, in the case of</u> $(\varepsilon,\varepsilon') = (o,o)$;

Proposition 4.2 (I) <u>If</u> $P^{2\varepsilon}_n(\tilde{g},\tilde{\ell},\tilde{r},\tilde{m},\tilde{q},\tilde{t};\tilde{\ell},\tilde{m},\tilde{q},\tilde{t}) \neq \emptyset$, <u>then we have the following conditions</u> ;

(0)$_*$ n <u>is even and</u> $\frac{n}{2}$ <u>is odd</u> ;

(1) $\tilde{\ell} = \Sigma_{a|n} \tilde{\ell}_a$, $\tilde{m} = \Sigma_{a|n} \tilde{m}_a$, $\tilde{q} = \Sigma_{a|n} \tilde{q}_a$, $\tilde{t} = \Sigma_{\tilde{v}} \Sigma_{a|n} \tilde{t}_a(\tilde{v})$, <u>and</u> $\tilde{r} = \Sigma_{\tilde{v}} \Sigma_{a|n} \tilde{v} \times \tilde{t}_a(\tilde{v})$;

(2) $\tilde{\ell}_a \equiv 0 \pmod a$, $\tilde{m}_a \equiv 0 \pmod a$, $\tilde{q}_a \equiv 0 \pmod a$, <u>and</u> $\tilde{t}_a(\tilde{v}) \equiv 0 \pmod a$ <u>for each divisor</u> a <u>of</u> n ;

(3) if $\tilde{\ell}_a \neq 0$, then a is even, and if $\tilde{m}_a \neq 0$, then a is even ;

(4) if $\tilde{q}_a \neq 0$, then a is a divisor of $\frac{n}{2}$;

(5) if $\tilde{t}_a(\tilde{v}) \neq 0$, then a is a divisor of $\frac{n}{2}$ and $2a\tilde{v}$ is a multiple of n ;

$(6)_{2+}$ $g_{2+} = \frac{1}{n}\{\ \tilde{g} + \sum_{a|n} \frac{a-n}{2}(\ell_{a/2}+m_{a/2}) - \frac{n}{2}(q+t) + n - 1\ \}$ is a non-negative integer in the case of $\varepsilon = +$;

$(6)_{20}$ $g_{20} = \frac{1}{n}\{\ \tilde{g} + \sum_{a|n} (a-n)(\ell_a+m_a) - n(q+t) + 2n - 2\ \}$ is a positive integer in the case of $\varepsilon = 0$;

<Notation> $\hat{P}_n^{\varepsilon\varepsilon'}$, $P_n^{2\varepsilon}$ の同値類の集合をそれぞれ $\hat{\mathcal{P}}_n^{\varepsilon\varepsilon'}$, $\mathcal{P}_n^{2\varepsilon}$ 等と表わす。

そして $\hat{P}_n^{\varepsilon\varepsilon'}(\hat{g},\mathcal{D})$ の RD による像を $R\hat{P}^{\varepsilon\varepsilon'}(\hat{g},\hat{\mathcal{D}})$
$P_n^{2\varepsilon}(\hat{g},\mathcal{D})$ の RD による像を $RP_n^{2\varepsilon}(\hat{g},\hat{\mathcal{D}})$ と表わす。(但し $\hat{\mathcal{D}}$ は RD によって $\mathcal{D}$ より定まる singular Data) そこで $\hat{\mathcal{P}}_n^{\varepsilon\varepsilon'}$, $\mathcal{P}_n^{2\varepsilon}$ よりむしろ $R\hat{\mathcal{P}}_n^{\varepsilon\varepsilon'}(\hat{g},\hat{\mathcal{D}})$, $R\mathcal{P}_n^{2\varepsilon}(\hat{g},\hat{\mathcal{D}})$ に対して §3 の結果を使って $R\hat{P}_n^{\varepsilon\varepsilon'}(\hat{g},\hat{\mathcal{D}})$ 及び $RP_n^{2\varepsilon}(\hat{g},\hat{\mathcal{D}})$ の分類を行なえば分類は完成する。

詳細は次のようになる。

まず $R\hat{P}^{+-}(\hat{g},\hat{\mathcal{D}})$ について ($\hat{\mathcal{P}}_n^{+-}(\hat{g},\mathcal{D})$ について) 述べよう。そのために次のような組合せ論の事実を示そう。

$$D(n,\ell) = \left\{ (\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell)\ ;\ \begin{array}{l} \delta_j \in \mathbb{Z} \\ 0 \le \delta_1 \le \delta_2 \le \cdots \le \delta_\ell < n \\ \delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_\ell \equiv 0 \pmod{n} \end{array} \right\}$$

の元の数は次のようにして求められる。

$$F(x,y) = \prod_{j=0}^{n-1} f_j(x,y) \quad \Big(但し\ f_j(x,y) = 1 + yx^j + y^2x^{2j} + \cdots + y^k x^{kj} + \cdots$$

を母関数としてとり

$(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_\ell)$ が

$$(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{t_0\text{コ}}, \underbrace{1,1,\cdots,1}_{t_1\text{コ}}, \underbrace{2,2,\cdots,2}_{t_2\text{コ}}, \cdots, \underbrace{j,j,\cdots,j}_{t_j\text{コ}}, \cdots, \underbrace{n-1,n-1,\cdots,n-1}_{t_{n-1}\text{コ}})$$

だったとすると（$0 \le t_j \le \ell$, $t_0+t_1+t_2+\cdots+t_{n-1}=\ell$）

これは $f_0(x,y)$ の $\boxed{y^{t_0}x^0}$

$f_1(x,y)$ の $y^{t_1}x^{t_1}$

$f_2(x,y)$ の $y^{t_2}x^{2t_2}$

$f_j(x,y)$ の $y^{t_j}x^{jt_j}$

$f_{n-1}(x,y)$ の $y^{t_{n-1}}x^{(n-1)t_{n-1}}$

の項の積に対応する。

そして条件 $t_0+t_1+t_2+\cdots+t_{n-1}=\ell$ より $y^\ell x^{\square}$ になるので $F(x,y)$ のうちの各 $f_j(x,y)$ から1つの項をとって積をとったもののうち $y^\ell x^{\square}$ になるものは、ある

$(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell)$

に対応している。故に $y^\ell x^{in}$ $(i=0,1,2,\cdots)$ になれば $(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell)\in D$ の元 すなわち $\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_\ell \equiv 0 \pmod n$ になるものに対応する。

故に D の元は $y^\ell x^{in}$ $(i=0,1,2,\cdots)$ の係数 $K(i)$ の和 $\sum_{i=0}^{\ell-1} K(i)$ が D の個数を与える。

これを求めるには ζ を1の原始 n 乗根としたとき（すなわち $\zeta=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$）, $\zeta_1=\zeta$, $\zeta_2=\zeta^2$, $\zeta_3=\zeta^3, \cdots, \zeta_n=\zeta^n=1$）とおき $F(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty} h(y)x^k$ と表わしたとき

$$\sum_{i=1}^{n} F(\zeta_i, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{\infty} h(y)\zeta_i^k = \sum_{k=0}^{\infty} h(y)(\zeta_1^k+\zeta_2^k+\cdots+\zeta_n^k)$$

ここで $k \not\equiv 0 \pmod n$ のとき $\zeta_1^k+\zeta_2^k+\cdots+\zeta_n^k=0$

$k \equiv 0 \pmod n$ のとき $\zeta_1^k+\zeta_2^k+\cdots+\zeta_n^k=1$ となることを

使えば

$F(x,y)$ のうち x^{in} $(i=0,1,2,\cdots)$ になるもの係数の和は
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F(\zeta_i, y)$ に等しい。このうち y^ℓ の係数 $C(\ell)$ が求めるDの個数である。

<u>定理</u>　上記Dの元の数は

$$F(x,y) = \prod_{j=0}^{n-1} f_j(x,y) \quad 但し \quad f_j(x,y) = 1 + yx^j + y^2x^{2j} + \cdots$$

とおき ζ を1の原始n乗根，$\zeta_i = \zeta^i$ としたとき

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F(\zeta_i, y) \text{ の } y^\ell \text{ の係数に等しい。} \quad \square$$

これは ℓ の約数を $d_0=1, d_1, d_2, \cdots, d_t$ とするとき

$$\frac{1}{n}\left\{ \binom{\ell+n-1}{n-1} + \varphi(d_1)\binom{\frac{\ell}{d_1}+d_1'-1}{d_1'-1} + \cdots + \varphi(d_t)\binom{\frac{\ell}{d_t}+d_t'-1}{d_t'-1} \right\}$$

である。

$$\left(\text{但し } \varphi(d_k) \text{ は Euler 関数} \quad \binom{a}{b} = \frac{a!}{b!\,(a-b)!} \qquad d_k' = \frac{n}{d_k} \right.$$

■ Dに条件「$^\forall a|n$ に対して $\{\delta_j \,;\, g.c.d(\delta_j, n) = a\}$ の個数が ℓ_a 個である」を加えたもの $\boxed{D(n,\ell)}$ の個数は各 a $(a|n)$ に対して上記のような $F_a(x, y_a) = F_a(x,y)$
$= \prod_{j=0}^{\frac{n}{a}-1} (1 + yx^{ja} + y^2x^{2ja} + \cdots + y^\ell x^{\ell ja} + \cdots)$ を作る。

例えば $n=24$ のとき n の約数は $1,2,3,4,6,8,12,24(=0)$ で
$a=3$ の場合 $g.c.d(\delta, n)=3$ なるものは $3, 9, 15, 21$ の4つであり $\frac{n}{a}=8$ だから $F_a(x, y_a) = \prod_{j=0}^{7}(1 + y_a x^{ja} + y_a^2 x^{2ja} + \cdots)$
において
3 が t_1 個あれば $j=1$ で $\boxed{y_a^{t_1} x^{t_1 a}} = y_a^{t_1} x^{3t_1}$
9 が t_2 個あれば $j=3$ で $\boxed{y_a^{t_2} x^{3t_2 a}} = y_a^{t_2} x^{9t_2}$
15 が t_3 個あれば $j=5$ で $\boxed{y_a^{t_3} x^{5t_3 a}} = y_a^{t_3} x^{15t_3}$
21 が t_4 個あれば $j=7$ で $\boxed{y_a^{t_4} x^{7t_4 a}} = y_a^{t_4} x^{21t_4}$

の項の積に対応する

全体として $gcd(\delta, n) = a$ なるものが l_a になるには $(t_1+t_2+t_3+t_4 = l_3)$ 上の積が $y_a^{l_a} x^{in}$ $(i=0,1,2\cdots)$ になればよい.

したがって全ての a について上のような $F_a(x, y_a)$ を作りそのなかで $\prod_{a|n} y_a^{l_a} x^{in}$ $(i=0,1,2\cdots)$ の係数 $K(i)$ の和 $\sum K(i)$ が $D(n, t)$ の個数を与える.

これは t のみについて考えたが他のものも変数として増やしていけば母関数が作られてそれのある条件をみたすものの係数が求めるものになる.

したがって $\hat{P}_n^{+-}$ のときは $R\hat{P}_n^{+-}$ にして上の事実と η-equivalence なものをとり除くことによって

<u>Theorem</u> 4.1

$\hat{P}_n^{+-}(\hat{g}; \mathcal{D})$ の同値類の個数は

① $g = \frac{1}{2n}\{\hat{g} + \sum_{a|n}(a-n)(l_a+m_a) - n(\hat{g}+t) + 2n-2\} \geqq 1$ のときは上の母関数によって求められる.

② $g = 0$ のときは 最大公約数 $=1$ という条件を求できかして求められる

他の場合 $\hat{P}_n^{00}$, $\hat{P}_n^{--}$, $\hat{P}_n^{-+}$ については $X = M/f = M_*/f_*$ が non-orientable surface になるので [4] の結果と同様にして

$\hat{P}_n^{\varepsilon\varepsilon'}(\hat{g}, \mathcal{D}) \neq \phi$ である必要十分条件が先ず求まってその時に各との同値類の個数が計算される. (Theorem 4.2 ~4.4)。ただし $\mathcal{D}$ を $(\hat{l}, \hat{F}, \hat{m}, \hat{g}, \hat{g}^{+}, \hat{t}^{+}, \hat{t}^{-}; \hat{k}, \hat{m}, \hat{g}^{+}, \hat{g}^{-}, \hat{t}^{+}, \hat{t}^{-})$ と書いてある。

Theorem 4.2 Under the conditions (0), (1), (2), $(4)_+$, $(4)_-$, $(5)_+$ and $(6)_{oo}$ in Proposition 4.1, the necessary and sufficient conditions for $\hat{P}_n^{oo}(\tilde{g},\tilde{\ell},\tilde{r},\tilde{m},\tilde{q}^+,\tilde{q}^-,\tilde{t}^+,\tilde{t}^-;\tilde{\ell},\tilde{m},\tilde{q}^+,\tilde{q}^-,\tilde{t}^+,\tilde{t}^-)$ to be non-empty is followings ;

(a) in case that $g \geq 3$,

$(7)_e$ $\sum_{\substack{a|n \\ a;odd}} (\ell_a + m_a + q_a^- + \sum_v t_a^-(v))$ is even,

(b) in case that $g = 1$,

$(7)_e$ $\sum_{\substack{a|n \\ a;odd}} (\ell_a + m_a + q_a^- + \sum_v t_a^-(v))$ is even, and $d = 1$,

(c) in case that $g = 2$,

(I) $\frac{n}{2}$ is odd and d is even,

(II) if d is odd, then the condition $(7)_e$ $\sum_{\substack{a|n \\ a;odd}} (\ell_a + m_a + q_a^- + \sum_v t_a^-(v))$ is even,

or (III) if d is even and $\frac{n}{2}$ is even, then $\frac{d}{2}$ is odd and

$(7)_o$ $\sum_{\substack{a|n \\ a;odd}} (\ell_a + m_a + q_a^- + \sum_v t_a^-(v))$ is odd,

where $d = $ g.c.d.(a ; $\ell_a \neq 0$, $m_a \neq 0$, $q_a \neq 0$ or $t_a(v) \neq 0$ ($1 \leq {}^\exists v \leq r$)).

Then the number of elements of $\hat{\mathcal{P}}_n^{oo}(\tilde{g},\tilde{\ell},\tilde{r},\tilde{m},\tilde{q}^+,\tilde{q}^-,\tilde{t}^+,\tilde{t}^-;\tilde{\ell},\tilde{m},\tilde{q}^+,\tilde{q}^-,\tilde{t}^+,\tilde{t}^-)$ is given by follows ;

(a) in case that $g \neq 2$,

$C(n;\ell,m,q,t)$ if $\ell_{n/2} + m_{n/2} + q_{n/2} + \sum_v t_{n/2}(v) \neq 0$,

$2 \times C(n;\ell,m,q,t)$ if $\ell_{n/2} = m_{n/2} = q_{n/2} = t_{n/2}(v) = 0$ for any v ($1 \leq v \leq r$),

(b) in case that $g = 2$,

$(\frac{\varphi(d)}{2}) \times C(n;\ell,m,q,t)$ if d is odd and $\ell_{n/2} + m_{n/2} + q_{n/2} + \sum_v t_{n/2}(v) \neq 0$,

$2 \times \{\frac{\varphi(d)}{2}\} \times C(n;\ell,m,q,t)$ *if* d *is odd and* $\ell_{n/2} = m_{n/2} = q_{n/2} = t_{n/2}(v) = 0$ *for any* v $(1 \leq v \leq r)$,

$\{\frac{\varphi(\frac{d}{2})}{2}\} \times C(n;\ell,m,q,t)$ *if* d *is even and* $\frac{n}{2}$ *is odd*,

$\{\frac{\varphi(\frac{d}{2})}{2}\} \times C(n;\ell,m,q,t)$ *if* d *is even*, $\frac{n}{2}$ *is even and* $\ell_{n/2} + m_{n/2} + q_{n/2} + \sum_v t_{n/2}(v) \neq 0$,

$2 \times \{\frac{\varphi(\frac{d}{2})}{2}\} \times C(n;\ell,m,q,t)$ *if* d *is even*, $\frac{n}{2}$ *is even and* $\ell_{n/2} = m_{n/2} = q_{n/2} = t_{n/2}(v) = 0$ *for any* v $(1 \leq v \leq r)$,

where $\{x\}$ *is the smallest integer* $\geq x$, $\varphi(x)$ *is the Euler function, and* $C(n;\ell,m,q,t) =$

$$= \prod_{\substack{a|n \\ a\neq n \\ a\neq \frac{n}{2}}} \binom{\frac{\varphi(\frac{n}{a})}{2} + \ell_a - 1}{\ell_a} \binom{\frac{\varphi(\frac{n}{a})}{2} + m_a - 1}{m_a} \binom{\frac{\varphi(\frac{n}{a})}{2} + q_a - 1}{q_a} \prod_{v=1}^{r} \binom{\frac{\varphi(\frac{n}{a})}{2} + t_a(v) - 1}{t_a(v)} .$$

where $\binom{a}{b} = \frac{a\,!}{b\,! \times (a-b)\,!}$.

Theorem 4.3 *Under the conditions* (0), (1), (2), $(4)_+$, $(4)_-$, $(5)_+$, $(5)_-$ *and* $(6)_{--}$ *in Proposition 4.1, the necessary and sufficient conditions for* $\hat{P}_n^{--}(\tilde{g},\tilde{\ell},\tilde{r},\tilde{m},\tilde{q}^+,\tilde{q}^-,\tilde{t}^+,\tilde{t}^-;\tilde{\ell},\tilde{m},\tilde{q}^+,\tilde{q}^-,\tilde{t}^+,\tilde{t}^-)$

<u>to be non-empty is followings</u> ;

(a) <u>in case that</u> g <u>is odd and</u> $g \geq 3$,

(i) $\frac{n}{2}$ <u>is even</u>, $(3)_0$ <u>for each odd divisor</u> a <u>of</u> n, $\ell_a = 0$, $m_a = 0$, $q_a = 0$ <u>and</u> $t_a(v) = 0$ <u>for any</u> v $(1 \leq v \leq r)$, <u>and</u> $(ii)_o$ $\sum_{\substack{a|n \\ a;\text{even} \\ a/2;\text{odd}}} (\ell_a + m_a + q_a + \sum_v t_a(v))$ <u>is odd</u> ;

(b) <u>in case that</u> $g = 1$,

(i), $(3)_0$, $(ii)_o$ <u>and</u> (iii) $\frac{1}{2} \times d = 1$;

(c) <u>in case that</u> g <u>is even</u>,

(i), $(3)_0$, <u>and</u> $(ii)_e$ $\sum_{\substack{a|n \\ a;\text{even} \\ a/2;\text{od}}} (\ell_a + m_a + q_a + \sum_v t_a(v))$ <u>is even</u> ;

<u>Then the number of elements of</u> $\hat{\mathcal{P}}_n^{--}(\tilde{g}, \tilde{\ell}, \tilde{r}, \tilde{m}, \tilde{q}^+, \tilde{q}^-, \tilde{t}^+, \tilde{t}^-; \tilde{\ell}, \tilde{m}, \tilde{q}^+, \tilde{q}^-, \tilde{t}^+, \tilde{t}^-)$ <u>is given by follows</u> ;

$\left(\frac{\varphi(d) + \varphi(\frac{d}{2})}{2}\right) \times C(n;\ell, m, q, t)$ <u>if</u> $\frac{n}{d}$ <u>is odd</u>;

$\left(\frac{\varphi(d)}{2}\right) \times C(n;\ell, m, q, t)$ <u>if</u> $d \not\equiv 0 \pmod 4$ <u>and</u> $\ell_{n/2} + m_{n/2} + q_{n/2} + \sum_v t_{n/2}(v) \neq 0$;

$2 \times \left(\frac{\varphi(d) + \varphi(\frac{d}{2})}{2}\right) \times C(n, \ell, m, q, t)$ <u>if</u> $d \not\equiv 0 \pmod 4$ <u>and</u> $\ell_{n/2} = m_{n/2} = q_{n/2} = t_{n/2}(v) = 0$ <u>for any</u> v $(1 \leq v \leq r)$;

$\left(\frac{\varphi(d)}{2}\right) \times C(n;\ell, m, q, t)$ <u>if</u> $d \equiv 0 \pmod 4$, $\frac{n}{d}$ <u>is even</u>, $\sum_{\substack{a|n \\ a/d;\text{odd}}} (\ell_a + m_a + q_a + \sum_v t_a(v))$ <u>is even</u>, <u>and</u> $\ell_{n/2} + m_{n/2} + q_{n/2} + \sum_v t_{n/2}(v) \neq 0$;

$2 \times \left(\frac{\varphi(d)}{2}\right) \times C(n;\ell, m, q, t)$ <u>if</u> $d \equiv 0 \pmod 4$, $\frac{n}{d}$ <u>is even</u>,

$\sum_{\substack{a|n \\ a/d;\text{odd}}} (\ell_a + m_a + q_a + \sum_v t_a(v))$ <u>is even</u>,

and $\ell_{n/2} = m_{n/2} = q_{n/2} = t_{n/2}(v) = 0$
for any v ($1 \leq v \leq r$) ;

$\{\frac{\varphi(\frac{d}{2})}{2}\} \times C(n;\ell,m,q,t)$ if $d \equiv 0 \pmod 4$, $\frac{n}{d}$ is even,
$\sum_{\substack{a|n \\ a/d;odd}} (\ell_a + m_a + q_a + \sum_v t_a(v))$ is odd,
and $\ell_{n/2} + m_{n/2} + q_{n/2} + \sum_v t_{n/2}(v) \neq 0$;

$2 \times \{\frac{\varphi(\frac{d}{2})}{2}\} \times C(n;\ell,m,q,t)$ if $d \equiv 0 \pmod 4$, $\frac{n}{d}$ is even,
$\sum_{\substack{a|n \\ a/d;odd}} (\ell_a + m_a + q_a + \sum_v t_a(v))$ is odd,
and $\ell_{n/2} = m_{n/2} = q_{n/2} = t_{n/2}(v) = 0$
for any v ($1 \leq v \leq r$) ;

where d = g.c.d. (a ; $\ell_a \neq 0$, $m_a \neq 0$, $q_a \neq 0$ or $t_a(v) \neq 0$ ($1 \leq \exists v \leq r$)), $\{x\}$ is the smallest integer $\geq x$ and $\varphi(x)$ is the Euler function, and $C(n;\ell,m,q,t)$ is given by above .

Theorem 4.4 Under the conditions $(0)_*$, (1), (2), $(4)_+$, $(4)_0$, $(5)_+$, $(5)_0$ and $(6)_{-+}$ in Proposition 4.1, the necessary and sufficient conditions for $\hat{P}_n^{-+}(\tilde{g},\tilde{\ell},\tilde{r},\tilde{m},\tilde{q}^+,\tilde{q}^-,\tilde{t}^+,\tilde{t}^-;\tilde{\ell},\tilde{m},\tilde{q}^+,\tilde{q}^-,\tilde{t}^+,\tilde{t}^-)$ to be non-empty is followings ;

(a) in case that $g \geq 2$,

(3) $\ell_a = 0$ and $m_a = 0$ for each odd divisor a of n,

(b) in case that $g = 1$,

(3), and $\frac{1}{2} \times d = 1$.

Then the number of elements of $\hat{\mathcal{P}}_n^{-+}(\tilde{g},\tilde{\ell},\tilde{r},\tilde{m},\tilde{q}^+,\tilde{q}^-,\tilde{t}^+,\tilde{t}^-;\tilde{\ell},\tilde{m},\tilde{q}^+,\tilde{q}^-,\tilde{t}^+,\tilde{t}^-)$ is given by follows ;

$C(n;\ell,m,q,t)$ if $g \neq 2$,

$\{\varphi(d)/2\} \times C(n;\ell,m,q,t)$ if $g = 2$,

where d = g.c.d.(a ; $\ell_a \neq 0$, $m_a \neq 0$, $q_a \neq 0$, or $t_a(v) \neq 0$ ($1 \leq \exists v \leq r$)), and $C(n;\ell,m,q,t)$ is given by above .

次に $P_n^{2\varepsilon}(\hat{g},\hat{\mathcal{D}})$ の場合であるが，このときも $RP_n^{2\varepsilon}(\hat{g},\hat{\mathcal{D}})$ を実際は考えるのだが $RP_n^{2\varepsilon}(\hat{g},\hat{\mathcal{D}})$ は実際は period は $n/2$ であることに気をつけておこう（$n/2$ はしかも odd）。

$P_n^{2+}(\hat{g},\hat{\mathcal{D}})$ のとき（$RP_n^{2+}(\hat{g},\hat{\mathcal{D}})$ のとき）は $R\hat{P}_n^{+-}(\hat{g},\hat{\mathcal{D}})$ の結果を使うために

$$D^{2+}(n,\ell)=\left\{(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell)\ ;\ \begin{array}{l}\delta_j\in\mathbb{Z}\\ 0\le\delta_1\le\delta_2\le\cdots\le\delta_\ell<\frac{n}{2}\\ \delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_\ell\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \frac{n}{2})\end{array}\right\}$$

$$D^{2+}(n,\boldsymbol{\ell})=\left\{\begin{array}{l}(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_\ell)\in D^{2+}(n,\ell)\ \text{で}\\ \{\delta_j\ ;\ g.c.d.(\delta_j,\frac{n}{2})=a\}\ \text{なる個数が}\\ \ell_a\ \text{個である。}\end{array}\right\}$$

とおけば

$D^{2+}(n,\boldsymbol{\ell})$ と $D(\frac{n}{2},\boldsymbol{\ell})$ は一対一の対応をするので $R\hat{P}_n^{+-}(\hat{g},\hat{\mathcal{D}})$ のときと同様にして

<u>Theorem 4.5</u>

$P_n^{2+}(\hat{g},\hat{\mathcal{D}})$ の同値類の個数は

ある母関数により（あるいは Theorem 4.1 の結果を使って）求められる。

次に $P_n^{2o}(\hat{g},\hat{\mathcal{D}})$ については，Theorem 4.2 ～ 4.4 と同様にまず $P_n^{2o}(\hat{g},\hat{\mathcal{D}})\neq\phi$ であるための必要十分条件が求まってその時に同値類がいくつあるか求められる。次の定理のようになる

Theorem 4.6 Under the conditions $(0)_*$, (1), (2), (3), (4), (5) and $(6)_{2o}$ in Proposition 4.2, the necessary and sufficient conditions for $P_n^{2o}(\tilde{g},\tilde{\ell},\tilde{r},\tilde{m},\tilde{q},\tilde{t};\tilde{\ell},\tilde{m},\tilde{q},\tilde{t})$ to be non-empty is that $d = 1$ if $g_{2o} = 1$;

otherwise, we have $P_n^{2o}(\tilde{g},\tilde{\ell},\tilde{r},\tilde{m},\tilde{q},\tilde{t};\tilde{\ell},\tilde{m},\tilde{q},\tilde{t}) \neq \emptyset$.

Then the number of elements of $\mathcal{P}_n^{2o}(\tilde{g},\tilde{\ell},\tilde{r},\tilde{m},\tilde{q},\tilde{t};\tilde{\ell},\tilde{m},\tilde{q},\tilde{t})$ is given by follows ;

$C^2(n;\ell,m,q,t)$ if $\tilde{g}_{2o} \neq 2$,

$\left(\frac{\varphi(d)}{2}\right) \times C^2(n;\ell,m,q,t)$ if $g_{2o} = 2$.

where $d = \text{g.c.d.}\{\, a \;;\; \ell_a \neq 0,\ m_a \neq 0,\ q_a \neq 0,\ t_a(\tilde{v}) \neq 0\ (1 \leq {}^{\exists}v \leq r)\,\}$, and $C^2(n;\ell,m,q,t) =$

$$\prod_{\substack{a \mid \frac{n}{2} \\ a \neq \frac{n}{2}}} \binom{\frac{\varphi(\frac{n}{2a})}{2} + \ell_a - 1}{\ell_a} \binom{\frac{\varphi(\frac{n}{2a})}{2} + m_a - 1}{m_a} \binom{\frac{\varphi(\frac{n}{2a})}{2} + q_a - 1}{q_a}$$

$$\prod_{v=1}^{r} \binom{\frac{\varphi(\frac{n}{2a})}{2} + t_a(v) - 1}{t_a(v)}$$

参考文献

[1] P. A. Smith, Abelian actions on 2-manifolds, Michigan Math. J., 14 (1967), 257-275.

[2] G. T. Whyburn, ANALYTIC TOPOLOGY, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., 28, Amer. Math. Soc., 1942.

[3] K. Yokoyama, Classification of periodic maps on compact surfaces; I, Tokyo J. Math., 6 (1983), 75-94.

[4] K. Yokoyama, Classification of periodic maps on compact surfaces; II, Tokyo J. Math., 7 (1984), 249-285.