

DS流 Dehn Surgery

山下正勝

§0. 序

3次元球面 S^3 内の結び目や絡み目に沿う Dehn surgery によって別種の3次元閉多様体
 を作出する手法はトポロジーの世間ではよく知られている。このノートの目的は、その
 Dehn surgery 技術を DS-diagram の上で実現する(ひとつの)方法を提案することである。

以下の記号については本文記事のなかで断りなく使うことが多い。これらの記号の意
 味やその他の記号については Ikeda-Inoue[3], Ikeda-Yamashita-Yokoyama[4]などを参照さ
 れたい。

記号 0.1.

M^3 : orientable closed 3-manifold
 $\Delta = (S^2, G, f)$: DS-diagram with $B^3/f = M^3$
 $f: S^2 \rightarrow P$, identification map
 $P = S^2/f : M^3$ の spine
 $X = (X^+, X^-)$: Δ の 2-label (= spine P の 2-cell)

§1. Coil

Definition 1.1. DS-diagram Δ の 2-label $X = (X^+, X^-)$ が
 $cl(\partial X^+) \cap cl(\partial X^-) \neq \emptyset$ (in S^2)
 を満たすならば $X = (X^+, X^-)$ を **対隣接 2-label** という。

Proposition 1.2. $X = (X^+, X^-)$ が DS-diagram Δ の対隣接 2-label であれば, Δ の 1-label
 $A = (A^0; A^+, A^-)$ で
 $A^0 \subset \partial X^+ \cap \partial X^-; A^+ \subset \partial X^+ - A^0, A^- \subset \partial X^- - A^0$
 を満たすものが存在する。

Definition 1.3. 上の Proposition 1.2 における DS-diagram Δ の対隣接 2-label $X = (X^+, X^-)$ と 1-label $A = (A^0; A^+, A^-)$ に対して, 対 (X, A) を **twined face** という。

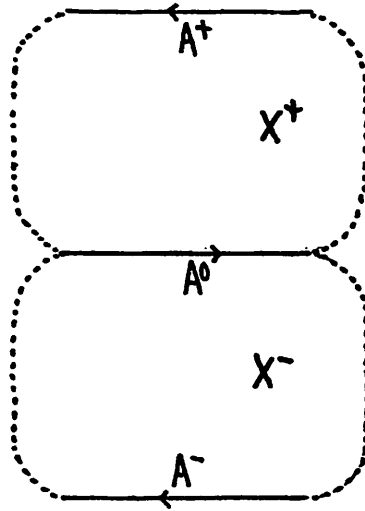


図 1.1 : twined face (X, A)

(X, A) を DS-diagram Δ 上の twined face とする。ただし, $X = (X^+, X^-)$, $A = (A^0; A^+, A^-)$ である。 p^0 を A^0 内の 1 点とし, $p^+ \in A^+$, $p^- \in A^-$ を $f(p^+) = f(p^-) = f(p^0)$ なる 2 点とする。そのとき次が成り立つ。

Proposition 1.4. 点 p^0 から点 p^+ に向かう $cl(X^+)$ 内の oriented simple arc $k^+ = \overline{p^0 p^+}$, および点 p^- から点 p^0 に向かう $cl(X^-)$ 内の oriented simple arc $k^- = \overline{p^- p^0}$ の組 (k^+, k^-) で

$$f(k^-; p^-, p^0) = f(k^+; p^0, p^+)$$

を満たすものが (up to isotopy on $cl(X^+ \cup X^-)$ rel. to $(p^0; p^+, p^-)$ で) 一意に存在する。

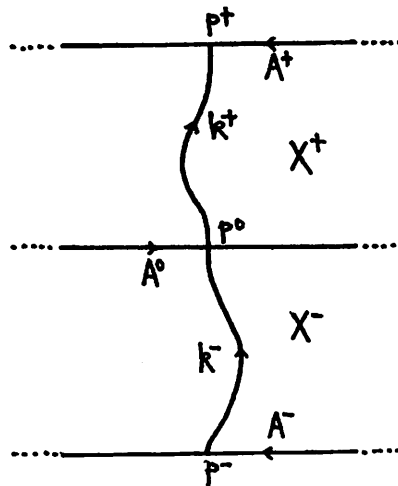


図 1.2 : coil

その理由を説明しておこう。まず、点 $p^0 \in A^0$ を通り A^0 に transversal な短い線分 $\overline{q^-p^0r^+}$ (ただし $q^- \subset X^-$, $r^+ \subset X^+$) を引く。このとき、弧 $\overline{q^+p^+}$, $\overline{p^-r^-}$ で

$$f(\overline{q^+p^+}, q^+, p^+) = f(\overline{q^-p^0}, q^-, p^0),$$

$$f(\overline{p^-r^-}, p^-, r^-) = f(\overline{p^0r^+}, p^0, r^+)$$

を満たすものが一意に定まる。そこで、点 r^+ から q^+ に向かう X^+ 内の simple arc γ^+ (ただし、 $\overline{p^0r^+} \cap \gamma^+ = r^+$, $\gamma^+ \cap \overline{q^-p^0} = q^+$) を選んで $k^+ = \overline{p^0r^+} \cup \gamma^+ \cup \overline{q^-p^0}$ とする。そうすれば $f(\gamma^-) = f(\gamma^+)$ となる simple arc $\gamma^- \subset X^-$ および $k^- = \overline{p^-r^-} \cup \gamma^- \cup \overline{q^+p^+}$ が定まり、

$$f(k^+; p^0, p^+) = f(k^-; p^-, p^0)$$

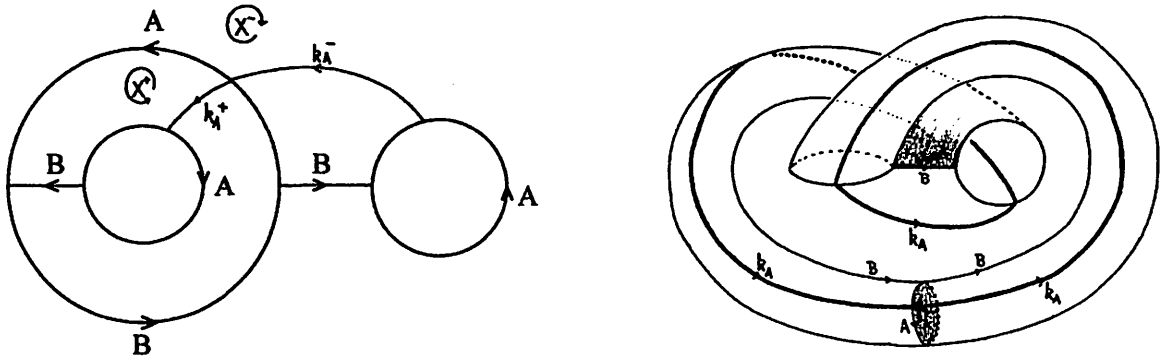
を満たしている。■

Definition 1.5. 上の議論で得られた (k^+, k^-) のことを twined face (X, A) 上の coil という。

今後は coil (k^+, k^-) と像 $f(k^+) = f(k^-)$ を同一視して同じ記号で k と表すことにする。

Example 1.6. “あわび” は以下の図 1.3 に見るような 2 種類の coil を内包している。

(1) あわび上の A 型 coil $k_A = (k_A^+, k_A^-)$



(2) あわび上の B 型 coil $k_B = (k_B^+, k_B^-)$

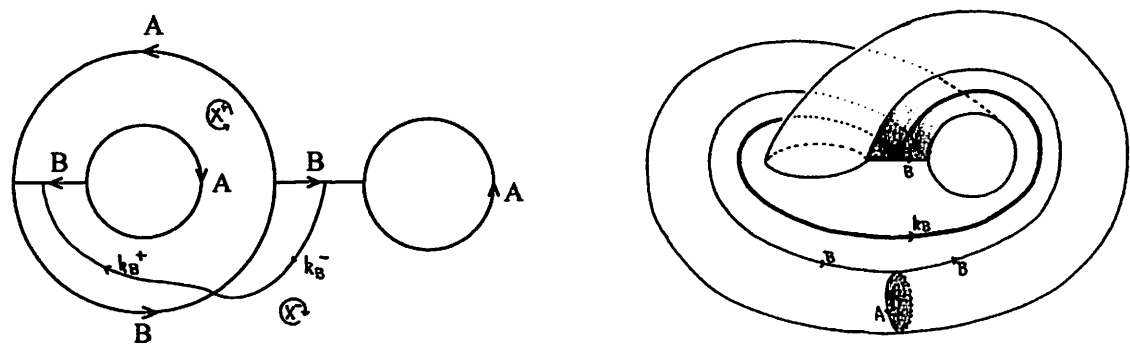


図 1.3 : あわびのなかにある 2 種類の coil (DS 図と spine の絵)

$\Delta = (S^2, f, G)$ を DS-diagram, $f: S^2 \rightarrow P$ を identification map, $f(B^3) = M^3$ を向き付け可能な 3 次元閉多様体とする。そのとき Δ の任意の 2-label $X = (X^+, X^-)$ に対して, $X \subset P$ を 1 回だけ通過しその点以外では P とは交わることのない M^3 内の simple closed loop α が (up to isotopy で) 一意に存在する。

Definition 1.7. 上の loop α のことを $k(X)$ と書いて X に関する DS-knot と呼ぶ。

Proposition 1.8. X 上の coil $k = f(k^+) = f(k^-)$ は 2-label X を 1 点で突き抜ける DS-knot $k(X)$ と ambient isotopic in $M^3 = B^3/f$ である。

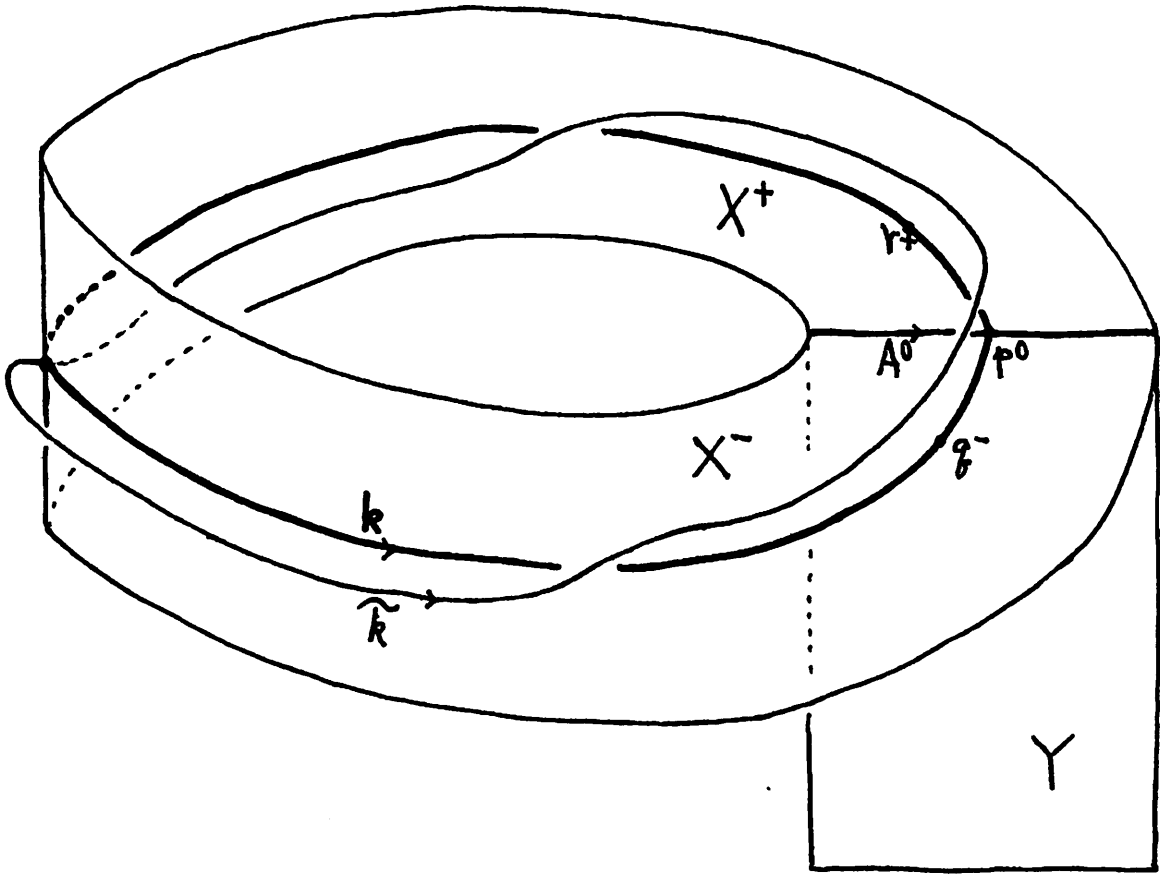


図 1.4 : k の spine P における近傍 $N(k, P)$ から k を浮かす

[証明] coil $k = f(k^+) = f(k^-)$ は spine $P \subset M^3$ 内の 1-cell X の closure $cl(X)$ の上に乗っている simple loop であるから, P における k の近傍 $N(k, P)$ の模式図は図 1.4 のようなものである。すなわち k を中心線を持つメビウスの帯に, 1 枚の半円板 Y (図では便宜上長方形に描いてある) が辺 A のところでくっついたものである。中心線 k を P から少し浮かそうと試みると, メビウス効果により面 $X = (X^+, X^-)$ とは一点だけで交わるような曲線 \tilde{k} が得られる。これが DS-knot $k(X)$ の正体である。■

§2. coil の exterior

$\Delta = (S^2, f, G)$ を向き付け可能な 3次元多様体 M^3 に対応する DS-diagram とする。 (X, A) を Δ 内の twined face とし, $k = (k^+, k^-)$ を (X, A) 上の coil とする。このとき $M^3 = f(B^3)$ における simple loop $k = f(k^+) = f(k^-)$ の管状近傍 $N(k, M^3)$ は solid torus である。この solid torus の原像 $f^{-1}(N(k, M^3))$ の interior を B^3 から取り除いた $B^3 - \text{Int}(f^{-1}(N(k, M^3)))$ の表面には, DS-diagram Δ から自然に誘導された $\bar{\Delta}(E(k))$ (図 2.1 の下のほうの図) が六角形を含んだ絵として描かれている。これは境界を持つ多様体 $W^3 = M^3 - \text{Int}N(k, M^3)$ に対応する (境界付き) DS-diagram である。すなわち, そこに描かれている六角形

$$\rho \sigma \tau \rho^{-1} \sigma^{-1} \tau^{-1}$$

が W^3 の境界であるトーラス $\partial N(k, M^3)$ に対応する部分である。

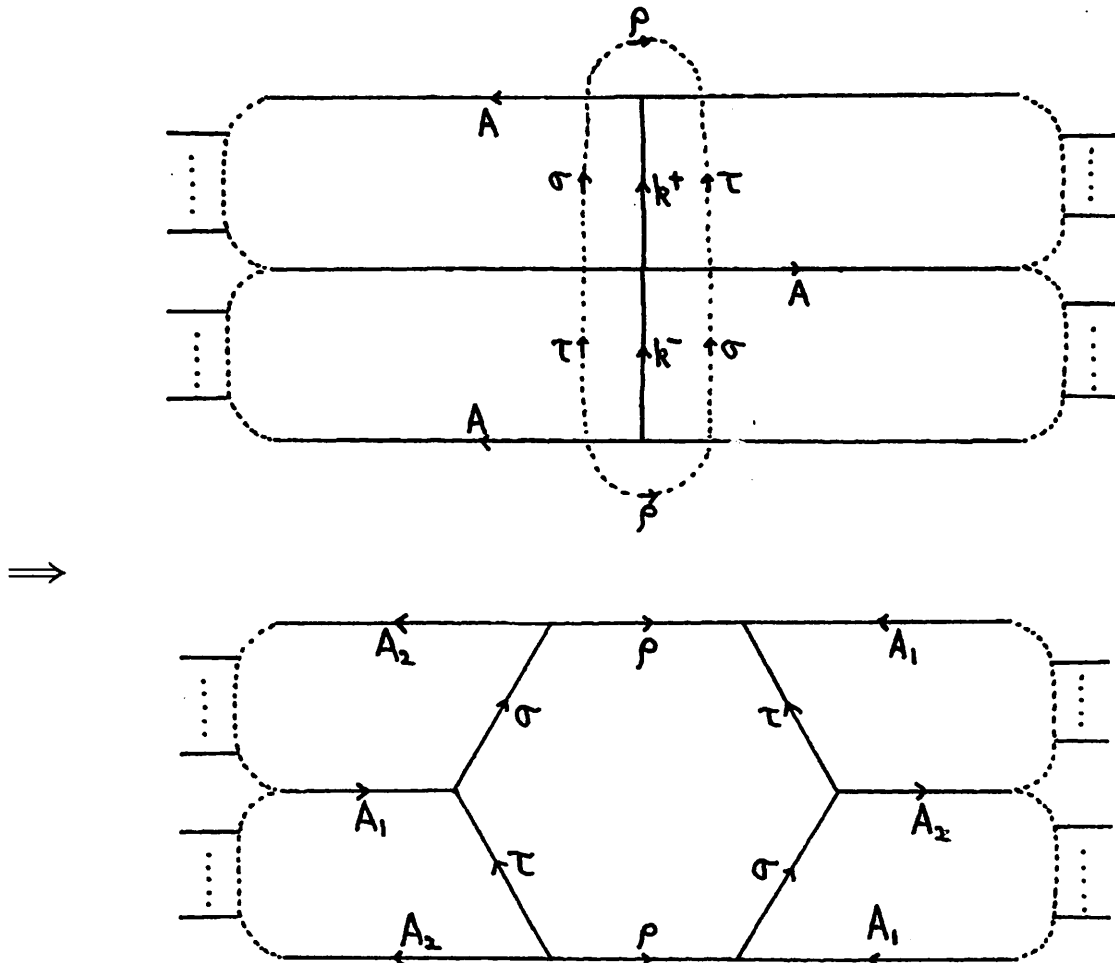
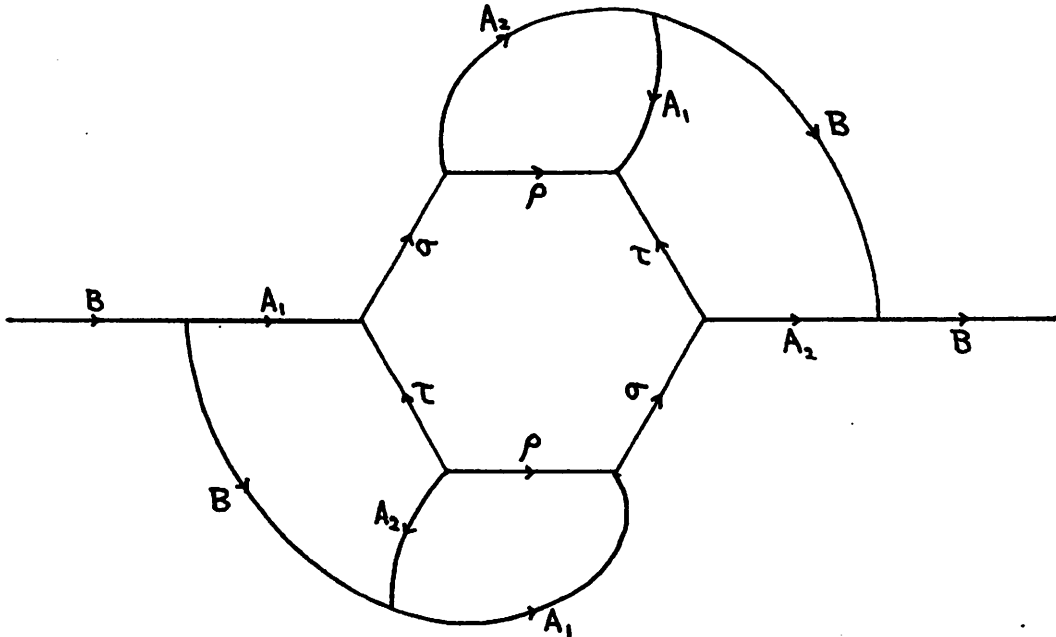


図 2.1 : Δ から $\bar{\Delta}(E(k))$ を作る方法

Definition 2.1. twined face (X, A) に関する coil $k = (k^+, k^-)$ のまわりをくり抜く操作によって DS-diagram Δ から得られた (境界付き) DS-diagram $\bar{\Delta}(E(k))$ のことを **coil $k = (k^+, k^-)$ の exterior** という。

Example 2.2. (Example 1.6 の続き)

(1) “あわび” 上の A 型 coil $k_A = (k_A^+, k_A^-)$ の exterior $\bar{\Delta}(E(k_A))$



(2) “あわび” 上の B 型 coil $k_B = (k_B^+, k_B^-)$ の exterior

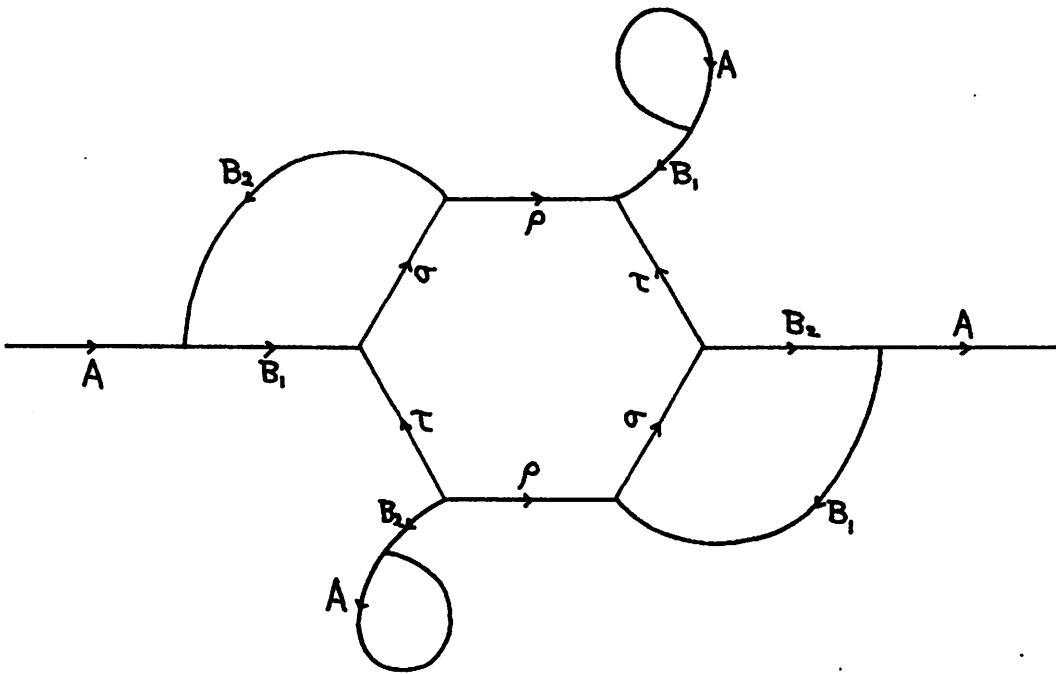


図 2.2 : “あわび” における coil の exterior

§3. 結び目の coil 表示

Proposition 3.1. M^3 内の任意の DS-knot $\alpha = k(X)$ に対して, 以下の (1), (2) を満たす DS-diagram Δ' が存在する。

- (1) Δ' は Δ と DS-同値な DS-diagram で, つぎの (2) を満たす twined face (X', A) を持つ。
- (2) Δ' の twined face (X', A) 上の coil $k = (k^+, k^-)$ が α と isotopic. (もっと正確に言えば, $k = f(k^+) = f(k^-) \subset M^3$ は $\alpha \subset M^3$ と isotopic.)

DS-diagram $\Delta = (S^2, f, G)$ 内の 2-label $X = (X^+, X^-)$ と 1 点で交わる DS-knot $\alpha = k(X)$ について考える。このとき ∂X^+ 上の点 a と ∂X^- 上の点 b (ただし $f(a) \neq f(b)$) とを結ぶ S^2 上の simple arc λ に沿って B^3 をえぐると, そのなかに $\alpha = k(X)$ がすくい取られている。それを好適に貼り直すと目的の DS-diagram Δ' を求めることができる。その方法についてはここでは割愛する。(いずれどこかで改めて報告するつもりである。) ■

Definition 3.2. (X, A) を 3 次元球面 S^3 の DS-diagram Δ 内の twined face とする。そのとき, (X, A) 上の coil $k = (k^+, k^-)$ を **結び目 $K = f(k)$ の coil 表示** という。

DS 理論の研究者のなかではよく知られている事実[10]であるが, 3 次元球面 S^3 内の任意の結び目 K に対して, K と isotopic な DS-knot $\alpha = k(X)$ を持つ S^3 の DS-diagram を作ることができる。よって Proposition 3.1 の助けを借りるならば次の定理が得られる。

定理 3.3. S^3 内の任意の結び目 K に対して, その coil 表示が存在する。

図 3.1 は trefoil knot の coil 表示の例である。

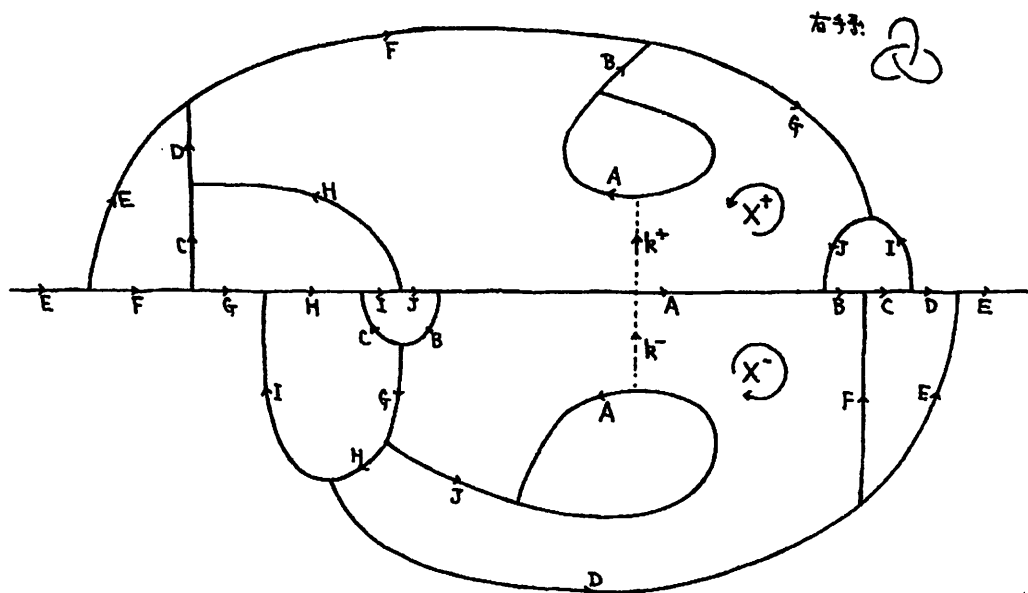


図 3.1 : trefoil knot の coil 表示

Definition 3.4. $k = (k^+, k^-)$ を 3次元球面 S^3 内の結び目 K の coil 表示とする。そのとき DS-diagram $\widetilde{\Delta}(E(k))$ を **結び目 K の exterior の coil 表示** という。

前節の図 2.2 は (1) も (2) も trivial knot の exterior の coil 表示である。

§4. Solid Torus の LM数

単位円板 D^2 内の各点 $x \in D^2$ を極形式で

$$x = re^{i\theta} (= r \text{Exp}(i\theta)), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

と表す。

円柱 $D^2 \times I$ の上底 $D^2 \times \{1\}$ と下底 $D^2 \times \{0\}$ とを D^2 上の identity map で貼り合わせて solid torus $D^2 \times S^1$ を作る。すなわち

$$D^2 \times S^1 = D^2 \times I / \sim, \quad (x, 1) \sim (x, 0)$$

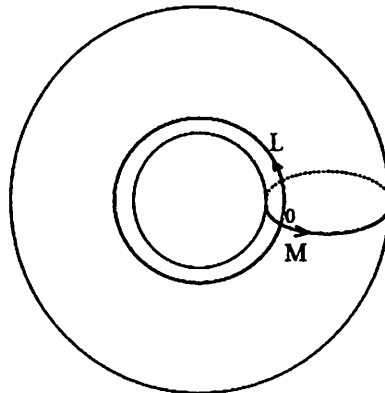


図 4.1 : solid torus

solid torus $D^2 \times S^1$ の表面上にある円周 $\partial D^2 \times \{0\}$ を $D^2 \times S^1$ の meridian curve (の代表) に指定しておく。そしてその円周の p 等分点

$$(\text{Exp}(0i), 0), (\text{Exp}\left(\frac{2\pi i}{p}\right), 0), \dots, (\text{Exp}\left(\frac{2k\pi i}{p}\right), 0), \dots, \quad k = 0, 1, 2, \dots, p-1$$

のことを数字の $0, 1, 2, \dots, p-1$ で略記することにする。また円板 $D^2 \times \{0\}$ ($\subset D^2 \times S^1$) の中心 $(0, 0)$ を ∞ または v と略記することがある。

頂点 k から頂点 $k+1$ に向かう有向弧 $\subset \partial D^2 \times \{0\} \subset D^2 \times S^1$ を M_k と表し, $\{0\} \equiv \{(\text{Exp}(0i), 0)\} = (1, 0) \in \partial D^2 \times S^1$ を base point とする cycle $M = M_0 M_1 \cdots M_p$ の homology class on $\partial D^2 \times S^1$ を μ と表す。

$\{0\} \equiv \{(\text{Exp}(0i), 0)\} = \{(1, 0)\}$ を base point とする $t \in I$ 方向の向きを持つ oriented loop
 $L = \{\text{Exp}(0i)\} \times I / \sim \subset D^2 \times S^1$

を $D^2 \times S^1$ の longitude curve (の代表) に指定し, この L の homology class on $\partial D^2 \times S^1$ を λ と表す。

以下断らない限り, p, q ($1 \leq q < p$) は互いに素な自然数とする。

ソリッドトーラスの表面上にあって, 点 k から点 $k + q \pmod{p}$ に向かう oriented arc

$$\{(x, t) \in \partial D^2 \times I / \sim \mid x = \text{Exp}\left(\frac{2(k+ tq)\pi i}{p}, 0 \leq t \leq 1\right)\}$$

のことを $F_k \left[\frac{q}{p} \right]$, または単に F_k , と表す。

$(p, q) = 1$ だから,

$$\{q, 2q, 3q, \dots, (p-1)q\} = \{1, 2, 3, \dots, p-1\} \pmod{p}$$

となるので,

$$aq \equiv 1 \pmod{p} \text{となる自然数 } a \text{ (} 0 < a < p \text{),}$$

および

$$1 + cq \equiv 0 \pmod{p} \text{となる自然数 } c \text{ (} 0 < c < p \text{)}$$

がそれぞれただ一つ存在する。そこで(oriented) path

$$F_0 F_{\sigma(1)} F_{\sigma(2)} \dots F_{\sigma(a-1)}, \quad \sigma(i) \equiv iq \pmod{p}, \quad 0 < \sigma(i) < p$$

のことを $F_{0, \sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(a-1)}$ または $F_{0 \cdot}$ と略記する。同様に, (oriented) path

$$F_1 F_{\tau(1)} F_{\tau(2)} \dots F_{\tau(c-1)}, \quad \tau(j) \equiv iq \pmod{p}, \quad 0 \leq \tau(j) < p$$

のことを $F_{1, \tau(1), \tau(2), \dots, \tau(c-1)}$ または $F_{1 \cdot}$ と略記する。

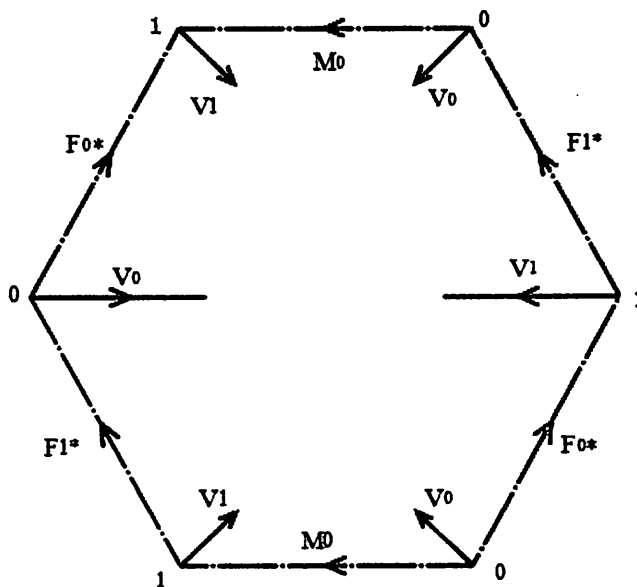


図 4.3 : fibered solid torus の模式図

$\{0\} \in \partial D^2 \times S^1$ を base point とする oriented loop

$$\overline{F_0 \cdot} = F_0 \cdot M_0^{-1}, \quad \overline{F_1 \cdot} = M_0 F_1 \cdot$$

の homotopy class on $\partial D^2 \times S^1$ (rel. 0) をそれぞれ $[\overline{F_0 \cdot}]$, $[\overline{F_1 \cdot}]$ で表し, homology class をそれぞれ $\langle \overline{F_0 \cdot} \rangle$, $\langle \overline{F_1 \cdot} \rangle$ で表す。

Proposition 4.1.

$$\begin{aligned} aq \equiv 1 \pmod{p} &\Leftrightarrow aq = bp + 1 \quad (0 < a, b < p) \text{ ならば} & \langle \overline{F_0 \cdot} \rangle &= a \lambda + b \mu \\ 1 + cq \equiv 0 \pmod{p} &\Leftrightarrow 1 + cq = dp \quad (0 < c, d < p) \text{ ならば} & \langle \overline{F_1 \cdot} \rangle &= c \lambda + d \mu \end{aligned}$$

Definition 4.2. triad $(\frac{q}{p}, \langle \overline{F_0 \cdot} \rangle, \langle \overline{F_1 \cdot} \rangle)$ または $(\frac{q}{p}, \frac{b}{a}, \frac{d}{c})$ のことを $\frac{q}{p}$ 型 fibered solid torus の LM 系といい, $(\frac{b}{a}, \frac{d}{c})$ のことを $\frac{q}{p}$ の LM 数という。

自然数 a_1, a_2, \dots, a_n に対して

$$[a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n] = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}$$

と定める。

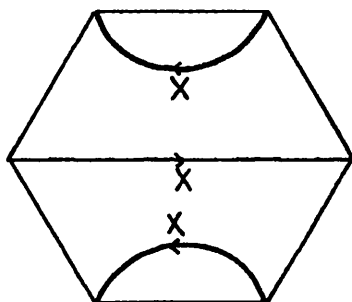
分数 $\frac{q}{p}, \frac{b}{a}, \frac{d}{c}$ をこのような連分数で表示するとき, 次の定理が成り立つ。

定理 4.3. ([12])

- (1) $([a_1, \dots, a_{2n-1}, a_{2n}, 1], [a_1, \dots, a_{2n-1}, a_{2n}], [a_1, \dots, a_{2n-1}])$ は LM 系
- (2) $([a_1, \dots, a_{2n}, a_{2n+1}, 1], [a_1, \dots, a_{2n}, a_{2n+1}], [a_1, \dots, a_{2n}])$ は LM 系

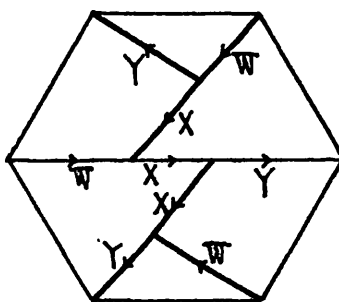
次ページ以降に簡単な場合の図をいくつか提示しておく。LM 数と図との関係が分かっていただけであろう。それより先の図については[11]に書いてあるのでそちらを参照してください。

(1). $\frac{1}{2}$ 型 $\sim\frac{3}{4}$ 型の fibered solid torus と LM 数



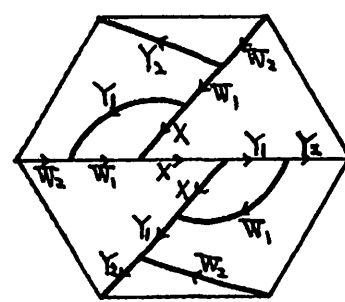
$$\frac{1}{2} = [1,1]$$

$$([\], [1]) = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right)$$



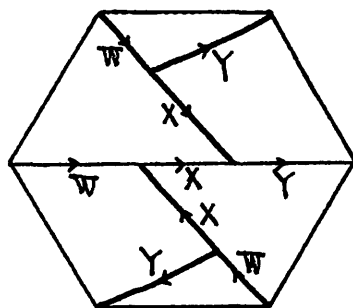
$$\frac{1}{3} = [2,1]$$

$$([\], [2]) = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{2}\right)$$



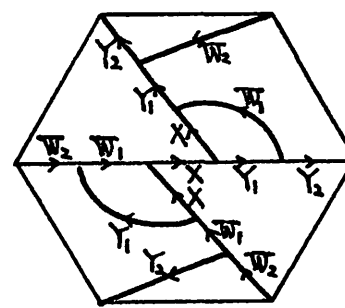
$$\frac{1}{4} = [3,1]$$

$$([\], [3]) = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{3}\right)$$



$$\frac{2}{3} = [1,1,1]$$

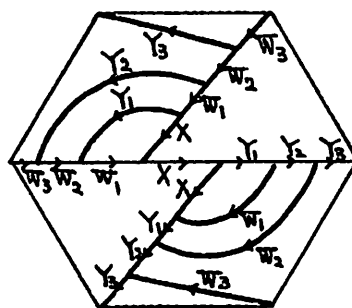
$$([1,1], [1]) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right)$$



$$\frac{3}{4} = [1,2,1]$$

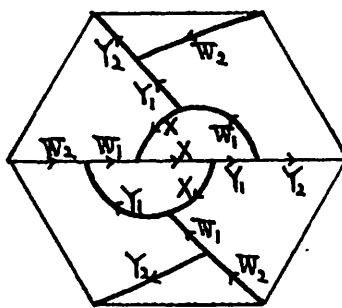
$$([1,2], [1]) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right)$$

(2) $\frac{1}{5}$ 型 $\sim\frac{5}{6}$ 型の fibered solid torus と LM 数



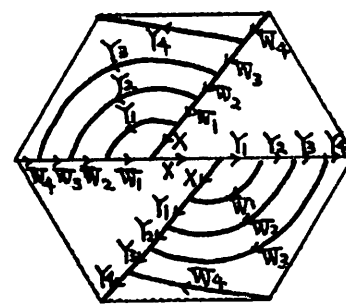
$$\frac{1}{5} = [4,1]$$

$$([\], [4]) = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{4}\right)$$



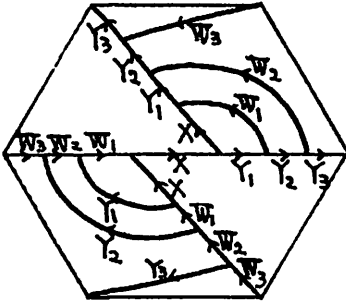
$$\frac{2}{5} = [2,1,1]$$

$$([2,1], [2]) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$$



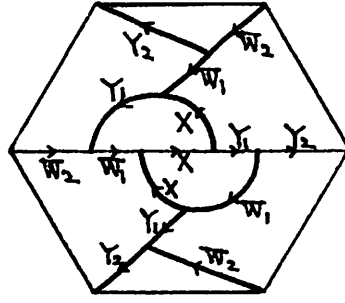
$$\frac{1}{6} = [5,1]$$

$$([\], [5]) = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{5}\right)$$



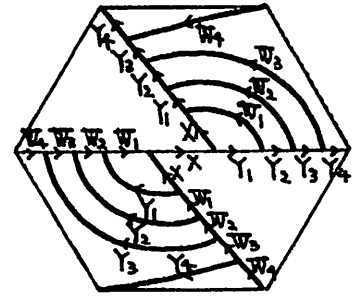
$$\frac{4}{5} = [1, 3, 1]$$

$$([1, 3], [1]) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{1}\right)$$



$$\frac{3}{5} = [1, 1, 1, 1]$$

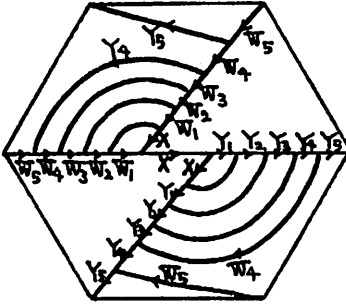
$$([1, 1], [1, 1, 1]) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$$



$$\frac{5}{6} = [1, 4, 1]$$

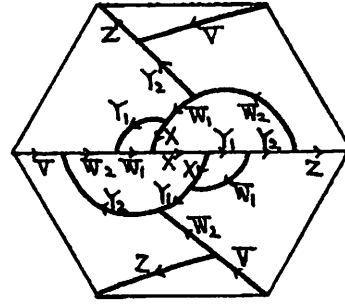
$$([1, 4], [1]) = \left(\frac{4}{5}, \frac{1}{1}\right)$$

(3) $\frac{1}{7}$ 型 ~ $\frac{6}{7}$ 型の fibered solid torus と LM 数



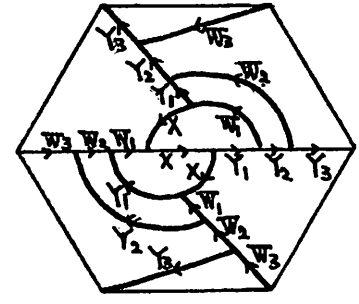
$$\frac{1}{7} = [6, 1]$$

$$([], [6]) = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{6}\right)$$



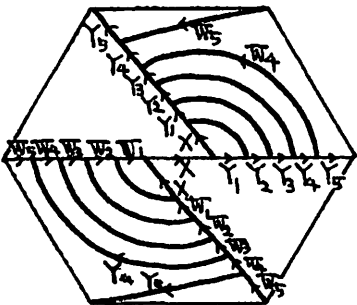
$$\frac{2}{7} = [3, 1, 1]$$

$$([3, 1], [3]) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$$



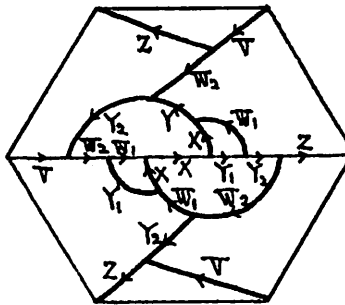
$$\frac{3}{7} = [2, 2, 1]$$

$$([2, 2], [2]) = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)$$



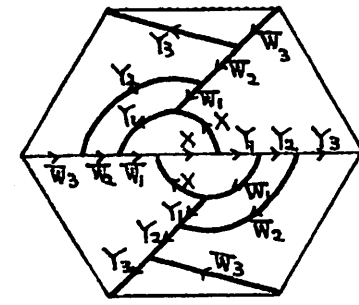
$$\frac{6}{7} = [1, 5, 1]$$

$$([1, 5], [1]) = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{1}\right)$$



$$\frac{5}{7} = [1, 2, 1, 1]$$

$$([1, 2], [1, 2, 1]) = \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right)$$



$$\frac{4}{7} = [1, 1, 2, 1]$$

$$([1, 1], [1, 1, 2]) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right)$$

図 4.3 : fibered solid torus とその LM 数

§5. 結び目のcoil表示とmeridean-longitudeとの関係

S^3 内の結び目 K の coil 表示を $k = (k^+, k^-)$ とし, DS-diagram $\bar{A}(E(k))$ を結び目 K の exterior の coil 表示とする。

図 6.1 は K の exterior の coil 表示のなかに六角形 $\rho \sigma \tau \rho^{-1} \sigma^{-1} \tau^{-1}$ として現れる (2次元) DS-diagram である。 ρ , σ , τ の部分を貼り合わせれば torus ができあがる。これは結び目 K の exterior の境界である。この図のなかにある水平線 M は頂点 x から頂点 y に至る補助線である。このとき $m = M \rho^{-1}$ は coil $k = (k^+, k^-)$ の meridean の役割を果たしている。その homology class $\langle m \rangle$ は結び目の exterior のホモロジー群 $H_1(S^3 - K) = \mathbb{Z}$ の生成元になっている。

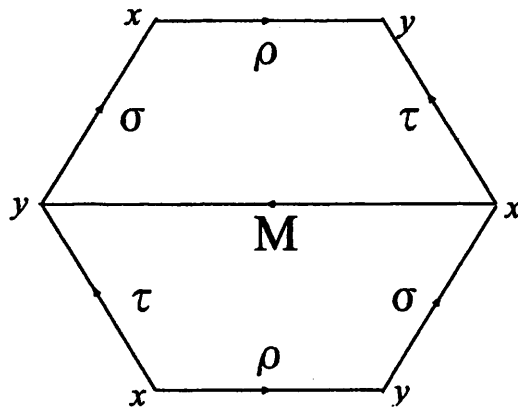


図 5.1 coil $k = (k^+, k^-)$ の meridean $m = M \rho^{-1}$

さて cycle $\rho \sigma$, $\tau \rho^{-1}$ の homology class をそれぞれ $\langle \sigma \rangle$, $\langle \tau \rangle$ と略記する。

(cycle α の homology class を $\langle \alpha \rangle$ と書く, というように, 記号本来の意味というか $\langle \rangle$ の面子をたてるのであれば, $\langle \sigma \rangle$ でなく本来は $\langle \rho \sigma \rangle$ と書かなくちゃ(かな?), などいろいろ悩んでしまうのだが・・・)

そのとき M と $\tau \rho^{-1} \sigma^{-1}$ は homotopic であるから当然ホモローグで,

$$m = M \rho^{-1} \sim \tau \rho^{-1} \sigma^{-1} \cdot \rho^{-1} = (\tau \rho^{-1}) (\rho \sigma)^{-1} \quad (\sim \text{はホモローグ})$$

したがって

$$\langle \tau \rangle - \langle \sigma \rangle = \langle m \rangle$$

が成り立つ。

$\langle \sigma \rangle$, $\langle \tau \rangle$ は $H_1(S^3 - K)$ の生成元 $\langle m \rangle$ の整数倍である。だから, たとえば

$$\langle \sigma \rangle = r \langle m \rangle$$

とすれば

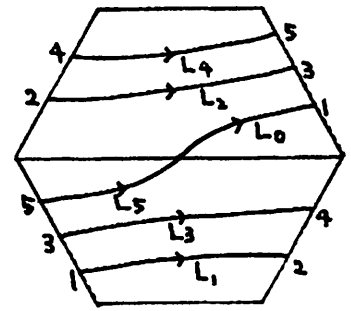
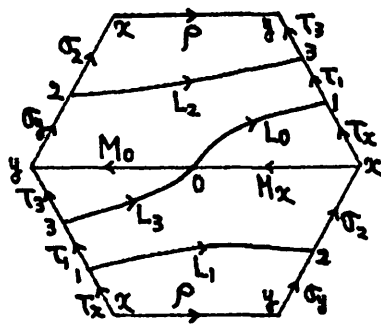
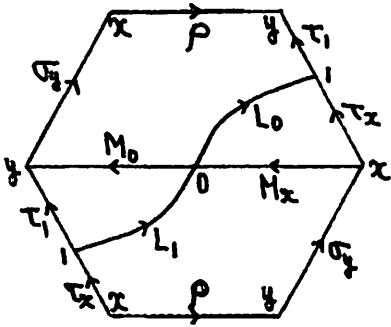
$$\langle \tau \rangle = \langle m \rangle + \langle \sigma \rangle = (r + 1) \langle m \rangle$$

である。

さて, 結び目 K の longitude l は

- (1) meridean m と 1 回だけ交わる,
- (2) m との linking number は +1,
- (3) l は ホモローグ 0 in $S^3 - K$.

となるような simple loop $l = L_0 L_1 L_2 \cdots L_k$ の形で exterior $E(K)$ の境界トラス上に実現できる。すなわち結び目 K の longitude l は meridian $m = M \rho^{-1} = M_x M_0 \rho^{-1}$ と M の中点 $\{0\}$ でだけ交わる loop のことである。頂点 $\{0\}$ から右上方向に進む図を右手系, 左上方向に進む図を左手系ということにしよう。 l の homology class を $\langle l \rangle$ と表す。このとき $\langle \sigma \rangle$, $\langle \tau \rangle$ と $\langle l \rangle$, $\langle m \rangle$ との間には以下のような関係がある。



(右 1) $l = L_0 L_1$

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= \langle l \rangle \\ \langle \tau \rangle &= \langle l \rangle + \langle m \rangle \\ \langle l \rangle &= \langle \sigma \rangle \\ \langle m \rangle &= -\langle \sigma \rangle + \langle \tau \rangle \end{aligned}$$

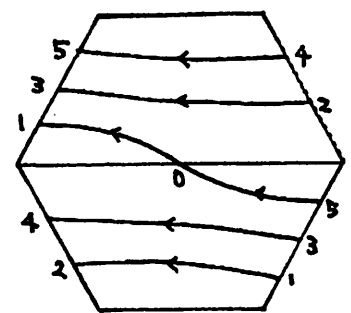
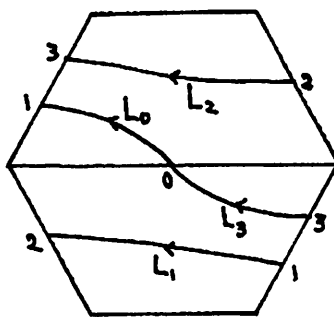
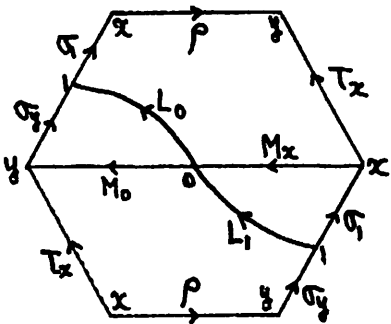
(右 2) $l = L_0 L_1 L_2 L_3$

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= \langle l \rangle + \langle m \rangle \\ \langle \tau \rangle &= \langle l \rangle + 2 \langle m \rangle \\ \langle l \rangle &= 2 \langle \sigma \rangle + \langle \tau \rangle \\ \langle m \rangle &= -\langle \sigma \rangle + \langle \tau \rangle \end{aligned}$$

(右 3) $l = L_0 L_1 L_2 L_3 L_4 L_5$

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= \langle l \rangle + 2 \langle m \rangle \\ \langle \tau \rangle &= \langle l \rangle + 3 \langle m \rangle \\ \langle l \rangle &= 3 \langle \sigma \rangle + 2 \langle \tau \rangle \\ \langle m \rangle &= -\langle \sigma \rangle + \langle \tau \rangle \end{aligned}$$

図 5.2 : 右手系の $(\langle \sigma \rangle, \langle \tau \rangle)$ と $(\langle \sigma \rangle, \langle \tau \rangle)$ との関係



(左 1) $l = L_0 L_1$

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= \langle l \rangle - \langle m \rangle \\ \langle \tau \rangle &= \langle l \rangle \\ \langle l \rangle &= \langle \tau \rangle \\ \langle m \rangle &= -\langle \sigma \rangle + \langle \tau \rangle \end{aligned}$$

(左 2) $l = L_0 L_1 L_2 L_3$

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= \langle l \rangle - 2 \langle m \rangle \\ \langle \tau \rangle &= \langle l \rangle - \langle m \rangle \\ \langle l \rangle &= -\langle \sigma \rangle + 2 \langle \tau \rangle \\ \langle m \rangle &= -\langle \sigma \rangle + \langle \tau \rangle \end{aligned}$$

(左 3) $l = L_0 L_1 L_2 L_3 L_4 L_5$

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= \langle l \rangle - 3 \langle m \rangle \\ \langle \tau \rangle &= \langle l \rangle - 2 \langle m \rangle \\ \langle l \rangle &= -2 \langle \sigma \rangle + 3 \langle \tau \rangle \\ \langle m \rangle &= -\langle \sigma \rangle + \langle \tau \rangle \end{aligned}$$

図 5.3 : 左手系の $(\langle \sigma \rangle, \langle \tau \rangle)$ と $(\langle \sigma \rangle, \langle \tau \rangle)$ との関係

一般には次のようになる。

Proposition 5.1.

$$\begin{aligned} \text{右 } n \text{ 型では} \quad & \langle \sigma \rangle = \langle l \rangle + (n-1) \langle m \rangle, & \langle \tau \rangle &= \langle l \rangle + n \langle m \rangle \\ \text{左 } n \text{ 型では} \quad & \langle \sigma \rangle = \langle l \rangle - n \langle m \rangle, & \langle \tau \rangle &= \langle l \rangle - (n-1) \langle m \rangle \end{aligned}$$

このことを右 n 型で調べておこう。

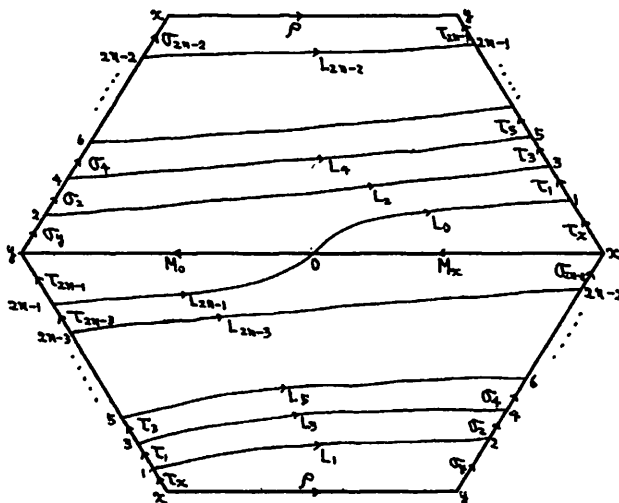


図 5.4 : 右手系のlongitude (右 n 型)

図 5.4(右 n 型)を Λ と表そう。 Λ は torus の (2次元) 多面体表示の 1 つである。

cycle $l = L_0 L_1 L_2 \cdots L_{2n-1}$, cycle $m = M_x M_0 \rho^{-1}$, cycle $\rho \sigma = \rho \sigma_1 \sigma_2 \sigma_4 \sigma_6 \cdots \sigma_{2n-2}$, cycle $\tau \rho^{-1} = \tau_x \tau_1 \tau_3 \tau_5 \cdots \tau_{2n-1} \rho^{-1}$ の homology class をそれぞれ $\langle l \rangle$, $\langle m \rangle$, $\langle \sigma \rangle$, $\langle \tau \rangle$ とし, これらの関係について調べてみる。

Λ の頂点 $\{x\}$ を base point に選び, auxiliary path として以下のものを採用しておく。

$$\begin{aligned} \overline{xy} &= \rho, & \overline{yx} &= \overline{xy}^{-1} \\ \overline{x0} &= M_x, \\ \overline{x1} &= \overline{x0} \cdot L_0, \\ \overline{x2} &= \overline{x1} \cdot L_1, \\ &\dots \dots \dots \\ \overline{x,2n-1} &= \overline{x,2n-2} \cdot L_{2n-2} \end{aligned}$$

Λ (というか, $F(\Lambda) = f(S^1)$) の任意の辺を A とし, 辺 A の始点, 終点を a, b とすれば,

$$A = \overline{xa} \cdot A \cdot \overline{bx}$$

は “ $F(\Lambda)$ ” 内の cycle であり, とくに ρ , M_x , および L_i ($i = 0, 1, \dots, 2n-2$) はすべてホモログ 0 in “ $F(\Lambda)$ ” であるから, “ $F(\Lambda)$ ” 内の勝手な cycle の homology class はこれらの ρ , M_x , L_i , $i = 0, 1, \dots, 2n-2$, を除いた cycles

$\{A.\} = \{\sigma_{j^*}, (j = y, 2, 4, 6, \dots, 2n-2), \tau_{k^*}, (k = x, 1, 3, 5, \dots, 2n-1), M_{0^*}, L_{2k-1^*}\}$
 の homology classes $\langle A.\rangle$ で生成される。

$$\langle m \rangle = \langle M_{0^*} \rangle$$

$$(\because) \quad m = M_x M_0 \rho^{-1} \sim \overline{xx} M_x \overline{0x} \cdot \overline{x0} M_0 \overline{yx} \cdot \overline{xy} \rho^{-1} \overline{xx} \sim \overline{x0} M_0 \overline{yx} = M_{0^*}$$

$$\langle l \rangle = \langle L_{2n-1^*} \rangle$$

$$(\because) \quad l = \overline{x0} L_0 L_1 \cdot \dots \cdot L_{2n-2} L_{2n-1} \overline{0x} \sim \overline{x, 2n-1} L_{2n-1} \overline{0x} = L_{2n-1^*}$$

generators :

$$\langle l \rangle = \langle L_{2n-1^*} \rangle, \langle m \rangle = \langle M_{0^*} \rangle, \sigma_{j^*}, (j = y, 2, 4, 6, \dots, 2n-2), \tau_{k^*}, (k = x, 1, 3, 5, \dots, 2n-1).$$

relations :

$$(x) \quad \tau_x = M_x L_0 \longrightarrow \langle \tau_{x^*} \rangle = 0$$

$$(y) \quad \rho \sigma_y = \tau_x L_1 \longrightarrow \langle \sigma_{y^*} \rangle = \langle \tau_{x^*} \rangle \longrightarrow \langle \sigma_{y^*} \rangle = 0$$

$$(3) \quad L_0 \tau_1 = M_0 \sigma_{y^*} L_2 \longrightarrow \langle \tau_{1^*} \rangle = \langle m \rangle + \langle \sigma_{y^*} \rangle \longrightarrow \langle \tau_{1^*} \rangle = \langle m \rangle$$

$$(2) \quad L_1 \sigma_2 = \tau_1 L_3 \longrightarrow \langle \sigma_{2^*} \rangle = \langle \tau_{1^*} \rangle \longrightarrow \langle \sigma_{2^*} \rangle = \langle m \rangle$$

$$(3) \quad L_2 \tau_3 = \sigma_2 L_4 \longrightarrow \langle \tau_{3^*} \rangle = \langle \sigma_{2^*} \rangle \longrightarrow \langle \tau_{3^*} \rangle = \langle m \rangle$$

.....

$$(2n-4) \quad L_{2n-5} \sigma_{2n-4} = \tau_{2n-5} L_{2n-3} \longrightarrow \langle \sigma_{2n-4^*} \rangle = \langle \tau_{2n-5^*} \rangle \\ \longrightarrow \langle \sigma_{2n-4^*} \rangle = \langle m \rangle$$

$$(2n-3) \quad L_{2n-4} \tau_{2n-3} = \sigma_{2n-4} L_{2n-2} \longrightarrow \langle \tau_{2n-3^*} \rangle = \langle \sigma_{2n-4^*} \rangle \\ \longrightarrow \langle \tau_{2n-3^*} \rangle = \langle m \rangle$$

$$(2n-2) \quad L_{2n-3} \sigma_{2n-2} M_x = \tau_{2n-3} L_{2n-1} \longrightarrow \langle \sigma_{2n-2^*} \rangle = \langle \tau_{2n-3^*} \rangle + \langle l \rangle \\ \longrightarrow \langle \sigma_{2n-2^*} \rangle = \langle l \rangle + \langle m \rangle$$

$$(2n-1) \quad L_{2n-2} \tau_{2n-1} = \sigma_{2n-2} \rho \longrightarrow \langle \tau_{2n-1^*} \rangle = \langle \sigma_{2n-2^*} \rangle \\ \longrightarrow \langle \tau_{2n-1^*} \rangle = \langle l \rangle + \langle m \rangle$$

$$(2n-1') \quad \tau_{2n-1} = L_{2n-1} M_0 \longrightarrow \langle \tau_{2n-1^*} \rangle = \langle l \rangle + \langle m \rangle$$

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_{y^*} \rangle + \{ \langle \sigma_{2^*} \rangle + \langle \sigma_{4^*} \rangle + \dots + \langle \sigma_{2n-4^*} \rangle \} + \langle \sigma_{2n-2^*} \rangle \\ = 0 + \{ \langle m \rangle + \langle m \rangle + \dots + \langle m \rangle \} + (\langle l \rangle + \langle m \rangle) \\ = \langle l \rangle + (n-1) \langle m \rangle$$

$$\langle \tau \rangle = \langle \tau_{x^*} \rangle + \{ \langle \tau_{1^*} \rangle + \langle \tau_{3^*} \rangle + \dots + \langle \tau_{2n-3^*} \rangle \} + \langle \tau_{2n-1^*} \rangle \\ = 0 + \{ \langle m \rangle + \dots + \langle m \rangle \} + (\langle l \rangle + \langle m \rangle) \\ = \langle l \rangle + n \langle m \rangle$$

したがって

$$\langle \sigma \rangle = \langle l \rangle + (n-1) \langle m \rangle$$

$$\langle \tau \rangle = \langle l \rangle + n \langle m \rangle$$

$\langle l \rangle, \langle m \rangle$ を $\langle \sigma \rangle, \langle \tau \rangle$ で表すと

$$\langle l \rangle = n \langle \sigma \rangle - (n-1) \langle \tau \rangle$$

$$\langle m \rangle = - \langle \sigma \rangle + \langle \tau \rangle$$

となる。■

§6. 結び目の DS 流 Dehn surgery

(X, A) を向き付け可能な 3 次元多様体 M^3 に対応する DS-diagram $\Delta = (S^2, f, G)$ 内の twined face とし, $k = (k^+, k^-)$ を (X, A) に関する coil とする。DS-diagram $\Delta \cdot (E(k))$ を coil $k = (k^+, k^-)$ の exterior とする。

coil k の exterior $\Delta \cdot (E(k))$ と連分数 type が $[a_1, \dots, a_k]$ の fibered solid torus $V = V([a_1, \dots, a_k])$ をそれらの境界部分で貼り合わせて得られる DS-diagram を $\Delta(k; [a_1, \dots, a_k])$ と書いて coil k の $[a_1, \dots, a_k]$ 型 Dehn surgery という。ただし, 境界の貼り合わせは図のように自然な貼り合わせ

$$M_0^{-1} F_0 \cdot F_1 \cdot M_0 F_0^{-1} F_1^{-1} \rightarrow \rho \sigma \tau \rho^{-1} \sigma^{-1} \tau^{-1},$$

で実行するものとする。

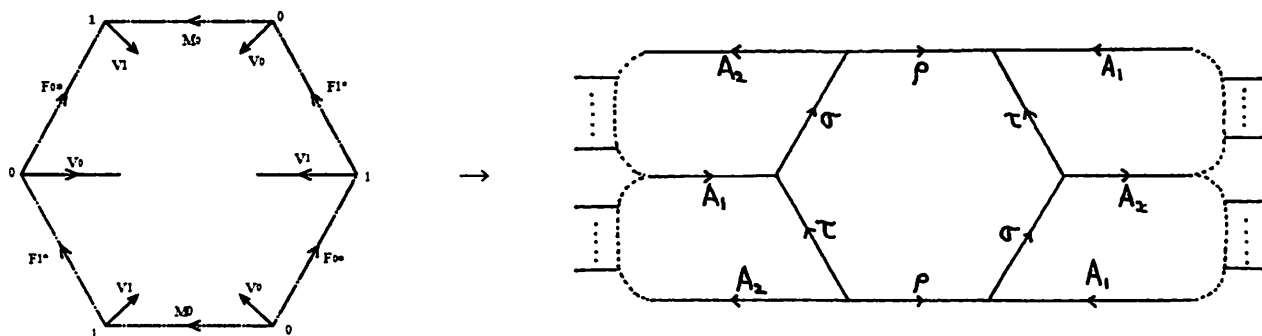


図 6.1 : DS 流 Dehn Surgery

F_0 と σ , F_1 と τ を向きも合わせて identification map $\iota : \partial V \rightarrow \partial E(K)$ で貼り合わせるので, homology の関係は

$$\iota \cdot \langle \widetilde{F_0 \cdot} \rangle = \langle \sigma \rangle, \quad \iota \cdot \langle \widetilde{F_1 \cdot} \rangle = \langle \tau \rangle$$

となる。

solid torus $V = V([a_1, \dots, a_k])$ に対して, $[a_1, \dots, a_k] = \frac{q}{p}$ の LM 数が $(\frac{b}{a}, \frac{d}{c})$ であるならば

F_0 , F_1 の homology class は, V の longitude-meridian 系 (λ, μ) を basis として

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{F_0 \cdot} \rangle &= a \lambda + b \mu \\ \langle \widetilde{F_1 \cdot} \rangle &= c \lambda + d \mu \end{aligned}$$

と書けている (Proposition 4.1)。

一方, cycle $\rho \sigma$ および cycle $\tau \rho^{-1}$ の $E(K)$ における homology class $\langle \sigma \rangle, \langle \tau \rangle$ は $H_1(S^3 - K)$ の生成元 $\langle m \rangle$ の整数倍である。だからたとえば

$$\langle \sigma \rangle = r \langle m \rangle$$

とすれば

$$\langle \tau \rangle = \langle m \rangle + \langle \sigma \rangle = (r + 1) \langle m \rangle$$

である。

したがって torus $\partial E(K)$ 上の meridian $m = M_r M_0 \rho^{-1}$ と一点 $\{0\}$ で交わる cycle $l = L_0 L_1 L_2 \cdots L_{2n-1}$ が $E(K)$ 内でホモロジー 0 であるならば, proposition 5.1 の効果により $\langle \sigma \rangle$ および $\langle \tau \rangle$ は $\langle l \rangle, \langle m \rangle$ を $H_1(\partial E(K))$ の基底に選んで次のように書き表すことができる。

Proposition 6.1. $E(K)$ における homology class $\langle \sigma \rangle \in H_1(S^3 - K)$ を生成元 $\langle m \rangle$ で表すとき, $\langle \sigma \rangle = r \langle m \rangle$ (ただし $r \in \mathbb{Z}$) であるならば

$$\begin{aligned}\langle \sigma \rangle &= \langle l \rangle + r \langle m \rangle, \\ \langle \tau \rangle &= \langle l \rangle + (r+1) \langle m \rangle.\end{aligned}$$

貼り合わせ写像 $\iota : \partial V \rightarrow \partial E(K)$ によって solid torus V の meridian の homology class μ が $H_1(\partial E(K))$ のどこに移るかを調べれば Dehn surgery の surgery 係数が計算できる。

$$\begin{aligned}\iota. \langle \widetilde{F_0} \rangle &= \langle \sigma \rangle : a \lambda + b \mu = \langle l \rangle + r \langle m \rangle \\ \iota. \langle \widetilde{F_1} \rangle &= \langle \tau \rangle : c \lambda + d \mu = \langle l \rangle + (r+1) \langle m \rangle\end{aligned}$$

を μ について解くと, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$ が成り立つので次の関係式を得る。

Proposition 6.2. $\mu = (a-c) \langle l \rangle + \{(r+1)a - rc\}$

このとき

$$\chi = \frac{(r+1)a - rc}{a-c}$$

(の絶対値) が Dehn Surgery の surgery 係数である。

§7. trefoil knot の Dehn surgery

図 7.1 は (右手系の) trefoil knot T の exterior の DS-diagram である。これを $\Delta(T)$ と表すことにしよう。 $\Delta(T)$ は

頂点 : $x, y, 1, 2, 3, 4, 5.$

辺 : $\rho, \sigma, \tau, A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K.$

を構成要員として持っている。

頂点 $\{x\}$ を基点とし, 補助 path としてベクトル記号を導入する。ただし, 有向辺 X の始点, 終点を p, q とするとき, $\overrightarrow{pq} = X$ と表すならば, $\overleftarrow{qp} = X^{-1}$ のことと理解する。

$$\begin{aligned} \bar{xy} &= \rho \\ \bar{x1} &= \bar{xy} \cdot K^{-1} \\ \bar{x5} &= \bar{x1} \cdot J^{-1} \\ \bar{x2} &= \bar{x5} \cdot G^{-1} \\ \bar{x3} &= \bar{x5} \cdot I^{-1} \\ \bar{x4} &= \bar{x2} \cdot F^{-1} \end{aligned}$$

と定める。

始点 u , 終点 v を持つ有向辺 Y に対して, $\bar{xu} \cdot Y \cdot \bar{vx}$ という cycle の homology class を Y に対応する小文字 y , または $\langle Y \rangle$ と表す。

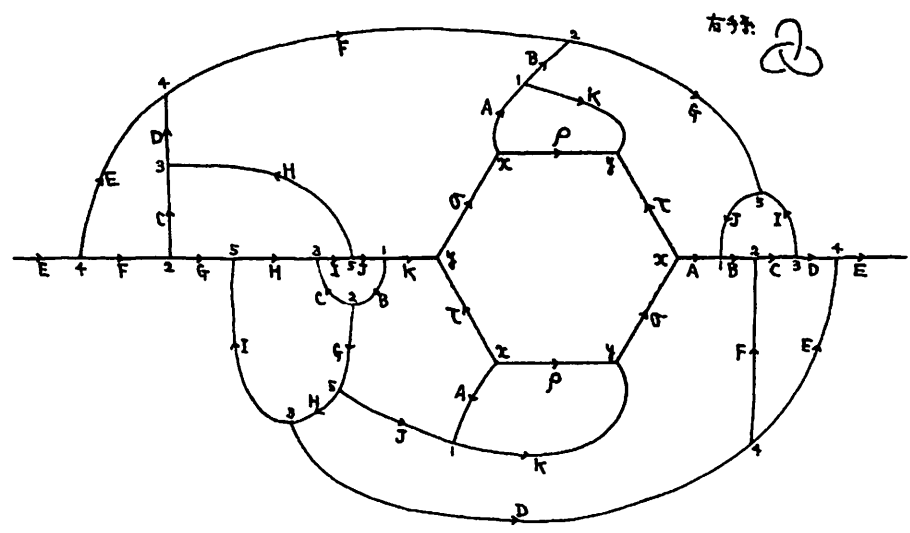


図 7.1 trefoil knot の exterior の DS-diagram $\Delta(T)$

homology classes $\{\langle \rho \rangle, f, g, i, j, k\}$ の各元はすべて 0 であるから, trefoil knot T の exterior の homology group $H_1(S^3 - T)$ の generators としては

$$\{\langle \sigma \rangle, \langle \tau \rangle, a, b, c, d, e, h\}$$

で十分である。またこのとき homology relations は

- (6-0) $\rho \sigma \tau \rho^{-1} \sigma^{-1} \tau^{-1} \sim 0 \rightarrow \langle \sigma \rangle + \langle \tau \rangle = \langle \tau \rangle + \langle \sigma \rangle$ (trivial relation)
- (3-1) $AK \rho^{-1} \sim 0 \rightarrow a = 0$
- (4-1) $\bar{x1} \cdot BCIJ \cdot \bar{1x} \sim 0 \rightarrow b + c = 0$
- (4-2) $\bar{x4} \cdot FCDE^{-1} \cdot \bar{4x} \sim 0 \rightarrow c + d + e = 0$
- (5-1) $\bar{x2} \cdot GHIHC^{-1} \cdot \bar{2x} \sim 0 \rightarrow c = 2h$
- (6-1) $\bar{x3} \cdot DEEFI^{-1} \cdot \bar{3x} \sim 0 \rightarrow d = -2e$
- (6-2) $\bar{x1} \cdot BGJA^{-1} \tau K^{-1} \cdot \bar{1x} \sim 0 \rightarrow b + \langle \tau \rangle = a \rightarrow b = -\tau$
- (8-1) $\bar{x5} \cdot JK \sigma ABF^{-1} D^{-1} H^{-1} \cdot \bar{5x} \sim 0 \rightarrow \langle \sigma \rangle + a + b = h + d$

ですべてである。(ただし, 各行の頭にある $(n-k)$ の n とは n 辺形の n のことで, k は n 辺形のうちの (テキトーにつけた, ただの) 通し番号である。)

したがって $G = H_1(S^3 - T)$ の加法的群表示として

$$G \sim (\langle \sigma \rangle, \langle \tau \rangle, a, b, c, d, e, h \mid a=0, b+c=0, c+d+e=0, c=2h, \\ d=-2e, b=-\tau, \langle \sigma \rangle + a + b = h + d)$$

を得る。

$a=0, b=-\tau$ の関係から

$$\langle \sigma \rangle + a + b = h + d \longrightarrow \langle \sigma \rangle - \langle \tau \rangle = h + d$$

また $a=0, c=2h, d=-2e$ であるからこの群表示から a, c, d は消去できる。

すなわち

$$G \sim (\langle \sigma \rangle, \langle \tau \rangle, b, e, h \mid b+2h=0, 2h-e=0, b=-\tau, \langle \sigma \rangle + b = h + d)$$

ここで $\langle m \rangle = \langle \tau \rangle - \langle \sigma \rangle$ を付加すると

$$G \sim (\langle m \rangle, \langle \sigma \rangle, \langle \tau \rangle, b, e, h \mid \langle m \rangle = \langle \tau \rangle - \langle \sigma \rangle, \\ b+2h=0, 2h-e=0, b=-\tau, \langle \sigma \rangle + b = h + d) \\ \sim (\langle m \rangle, \langle \sigma \rangle, \langle \tau \rangle \mid \langle \sigma \rangle = 5 \langle m \rangle, \langle \tau \rangle = 6 \langle m \rangle)$$

$$\therefore H_1(S^3 - T) \sim (\langle m \rangle, \langle \sigma \rangle, \langle \tau \rangle \mid \langle \sigma \rangle = 5 \langle m \rangle, \langle \tau \rangle = 6 \langle m \rangle) \\ \sim (\langle m \rangle \mid)$$

$\langle \sigma \rangle = 5 \langle m \rangle$, すなわち $r=5$ であるから $\langle \sigma \rangle, \langle \tau \rangle \in H_1(\partial E(K))$ は Proposition 6.1 により, $H_1(\partial E(K))$ の基底 $\langle l \rangle, \langle m \rangle$ を用いて

$$\langle \sigma \rangle = \langle l \rangle + 5 \langle m \rangle, \\ \langle \tau \rangle = \langle l \rangle + 6 \langle m \rangle.$$

と表される。

$\frac{q}{p}$ 型の fibered solid torus に対して $\frac{q}{p}$ を連分数表示したときの LM 数が $(\frac{b}{a}, \frac{d}{c})$ であれば

$$a \lambda + b \mu = \langle l \rangle + 5 \langle m \rangle \\ c \lambda + d \mu = \langle l \rangle + 6 \langle m \rangle$$

これを μ について解くと

$$\mu = (a - c) \langle l \rangle + (6a - 5c) \langle m \rangle$$

したがって, Dehn Surgery の surgery 係数の計算式:

$$\chi = \frac{6a-5c}{a-c} \quad (\text{の絶対値})$$

が得られる。

一方で, trefoil knot T の $\frac{q}{p}$ 型 fibered solid torus による Dehn Surgery で得られる 3次元閉多様体を $\chi(T, \frac{q}{p})$ と書くことにすれば, $\chi(T, \frac{q}{p})$ の DS-diagram は trefoil knot T の exterior の coil 表示に $\frac{q}{p}$ 型 fibered solid torus の DS-diagram をひよいと載せるだけですぐに得られる。そのようにして作ってあれこれ調べたものが表 7.2 である。

右手系Trefoil knotのDehn Surgery

DS流 Dehn Surgery

連分数: $[a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, 1]$

頂点数: $v = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 - 2$

長さ: n

長さが偶数: $[a_{2n}, a_{2n-1}, \dots, a_2, a_1, 1] \rightarrow ([a_{2n}, a_{2n-1}, \dots, a_2, a_1], [a_{2n}, a_{2n-1}, \dots, a_2]) = (b/a, d/c)$

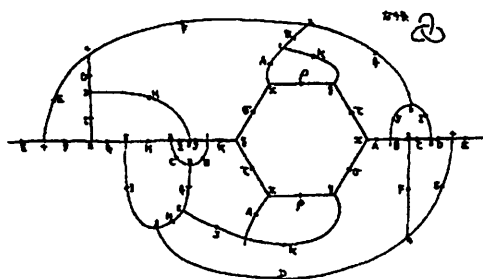
長さが奇数: $[a_{2n+1}, a_{2n}, \dots, a_2, a_1, 1] \rightarrow ([a_{2n+1}, a_{2n}, \dots, a_2], [a_{2n+1}, a_{2n}, \dots, a_2, a_1]) = (b/a, d/c)$

homeo $h: \partial(D^2 \times S^1) \rightarrow \partial N \subset S^3$ によるhomologicalな対応

$$a\lambda + b\mu = \langle \sigma \rangle$$

$$c\lambda + d\mu = \langle \tau \rangle$$

この連立1次方程式を解くと $\mu = (a-c)\lambda + (r+1)a - rc/m$ の形になる。



右手系Trefoil knotのDehn Surgery

v	n	連分数	分数	a	b	c	d	Iの係数		surgery係数		Manifold	H_1(M)	河野DS図	Matveevの図
								a-c	m	6a-5c	m/l = (6a-5c)/(a-c)				
-1	0	[1]	1												
0	1	[1,1]	1/2	1	0	1	1	0	1	∞	S^3	0	あわび		
1	1	[2,1]	1/3	1	0	2	1	-1	-4	4/1	S^3/Q_{12}	Z_4	(K3-62)		
1	2	[1,1,1]	2/3	2	1	1	1	1	7	7/1	$L(7, 2)$	Z_7	池田(2-9)		

2	1	[3,1]	1/4	1	0	3	1	-2	-9	9/2	S^3/P_{72}	Z_4	(K5-36)	(M5-28A)
2	2	[2,1,1]	2/5	3	1	2	1	1	8	8/1	S^3/D_{24}	Z_6	(K4-14)	(M4-12A)
2	2	[1,2,1]	3/4	3	2	1	1	2	13	13/2	$L(13, 5)$	Z_{13}	(K3-37)	
2	3	[1,1,1,1]	3/5	2	1	3	2	-1	-3	3/1	S^3/P_{24}	Z_3	(K4-17)	(M4-13)
3	1	[4,1]	1/5	1	0	4	1	-3	-14	14/3	$S^3/P_{60} \times Z_{14}$	Z_{14}	(K6-67)	(M6-53A)
3	2	[3,1,1]	2/7	4	1	3	1	1	9	9/1	S^3/P_{72}	Z_9	(K5-36)	(M5-28A)
3	2	[2,2,1]	3/7	5	2	2	1	3	20	20/3	$S^3/Q_{12} \times Z_5$	Z_{20}	(K5-37)	(M5-25B)
3	2	[1,3,1]	4/5	4	3	1	1	3	19	19/3	$L(19, 7)$	Z_{19}	(K4-09)	(M4-09)
3	3	[2,1,1,1]	3/8	3	1	5	2	-2	-7	7/2	$S^3/P_{120} \times Z_7$	Z_7	(K6-81)	(M6-52A)
3	3	[1,2,1,1]	5/7	3	2	4	3	-1	-2	2/1	S^3/P_{48}	Z_2	(K5-46)	(M5-30B)
3	3	[1,1,2,1]	4/7	2	1	5	3	-3	-13	13/3	$S^3/P_{120} \times Z_{13}$	Z_{13}	(K6-83)	(M6-54A)
3	4	[1,1,1,1,1]	5/8	5	3	3	2	2	15	15/2	$S^3/P_{24} \times Z_5$	Z_{15}	(K5-38)	(M5-29)
4	1	[5,1]	1/6	1	0	5	1	-4	-19	19/4				
4	2	[4,1,1]	2/9	5	1	4	1	1	10	10/1	$S^3/P_{48} \times Z_5$	Z_{10}	(K6-68)	(M6-55A)
4	2	[3,2,1]	3/10	7	2	3	1	4	27	27/4	S^3/P_{110}	Z_{27}	(K6-65)	(M6-56A)
4	2	[2,3,1]	4/9	7	3	2	1	5	32	32/5				
4	2	[1,4,1]	5/6	5	4	1	1	4	25	25/4				
4	3	[3,1,1,1]	3/11	4	1	7	2	-3	-11	11/3				
4	3	[2,2,1,1]	5/12	5	2	7	3	-2	-5	5/2				
4	3	[2,1,2,1]	4/11	3	1	8	3	-5	-22	22/5				
4	3	[1,3,1,1]	7/9	4	3	5	4	-1	-1	1/1	Poincare Space	0	(K5-50)	(M5-31)
4	3	[1,2,2,1]	7/10	3	2	7	5	-4	-17	17/4				
4	3	[1,1,3,1]	5/9	2	1	7	4	-5	-23	23/5				
4	4	[2,1,1,1,1]	5/13	8	3	5	2	3	23	23/3				
4	4	[1,2,1,1,1]	8/11	7	5	4	3	3	22	22/3	$S^3/P_{48} \times Z_{11}$	Z_{22}	(K6-69)	(M6-60)
4	4	[1,1,2,1,1]	7/12	7	4	5	3	2	17	17/2				
4	4	[1,1,1,2,1]	7/11	8	5	3	2	5	33	33/5				
4	5	[1,1,1,1,1,1]	8/13	5	3	8	5	-3	-10	10/3				

表 7.2 trefoil knot の Dehn surgery 一覧

この表のなかにあるはじめのほうの例を取り上げてみよう。“分数”の欄からの眺めで、

$$\frac{1}{2}\text{型 of fibered solid torus} \Rightarrow \chi = \infty \Rightarrow M = \chi(T, \frac{1}{2}) = S^3 \Rightarrow H_1(M) = 0$$

$$\frac{1}{3}\text{型 of fibered solid torus} \Rightarrow \chi = 4 \Rightarrow M = \chi(T, \frac{1}{3}) = S^3/Q_{12} \Rightarrow H_1(M) = \mathbb{Z}_4$$

$$\frac{2}{3}\text{型 of fibered solid torus} \Rightarrow \chi = 7 \Rightarrow M = \chi(T, \frac{2}{3}) = L(7, 2) \Rightarrow H_1(M) = \mathbb{Z}_7$$

$$\frac{7}{9}\text{型 of fibered solid torus} \Rightarrow \chi = 1 \Rightarrow M = \chi(T, \frac{7}{9}) = \text{Poincare Space} \Rightarrow H_1(M) = 0$$

DS 変形で頂点数が 6 またはそれ以下に変形できるものの多様体のタイプは識別できるが、そうでないものについては残念ながら（いくつか個別に分かるものもあるが）一般には（というよりも、小生には不勉強のため、というのが正しいが）識別できていない。

$\chi(T, \frac{7}{9})$ の DS-diagram (図 7.3) を DS 変形して行くとよく知られた DS-diagram (図 7.4,

すなわち Seifert-Threlfall [15], p.224) にたどり着くので、図 7.3 は Poincare space の DS-diagram であることが分かる。

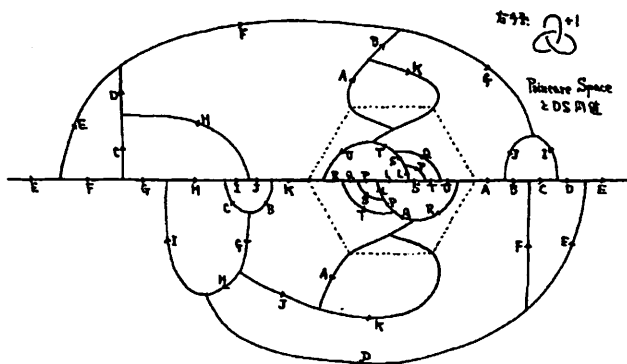


図 7.3 (右手系) trefoil knot の $\frac{7}{9}$ 型 surgery $\chi(T, \frac{7}{9})$

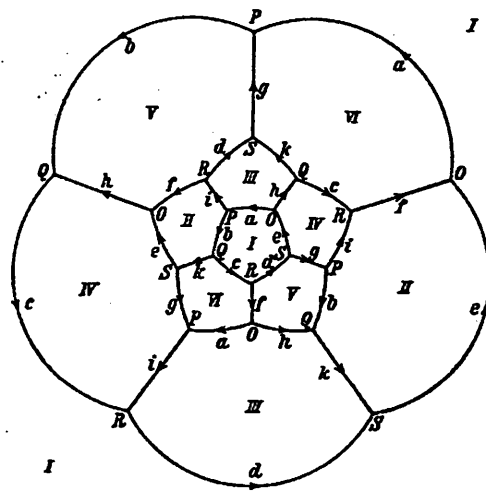


図 7.4 有名な Poincare Space の DS-diagram (Seifert-Threlfall の教科書から転写)

References

- [1] H. Ikeda, DS-diagram with E-cycle., Kobe J.Math.,3 (1986), 103-112.
- [2] H. Ikeda, Identification maps on the 2-sphere., Kobe J.Math.,2 (1985), 163-167.
- [3] H. Ikeda and Y. Inoue, Invitation to DS-diagrams., Kobe J.Math.,2 (1985), 169-186.
- [4] Ikeda, H., Yamashita, M. and Yokoyama, K., Symbolic Description of homeomorphisms on closed 3-manifolds, Kobe J. Math., 13(1996) 69-115.
- [5] I. Ishii, Flows and spines., Tokyo J. Math.,9 (1986),505-525.
- [6] I. Ishii, Combinatorial construction of a non-singular flow on a 3-manifold., KobeJ.Math., 3 (1986), 201-208.
- [7] S. V. Matveev, Transformation of special spines and the Zeeman Conjecture., Math. USSR Izvestiya (1988), Translation 423-434.
- [8] Taniguchi, T., Tsuboi, K. and Yamashita, M., Systematic singular triangulation of all Seifert manifolds., Tokyo J. Math., 28(2005), 539-561.
- [9] 池田裕司, 山下正勝, 横山和夫, 「メタモルフォーシス」, Hakone Seminar 28(2012) 15-32.
- [10] 山下正勝, 「結び目と DS-diagram」, 箱根セミナ記録 88(1988)33-71.
- [11] 山下正勝, 「Fibered solid torus の DS-diagram」, Hakone Seminar 17(2001)57-79.
- [12] 山下正勝, 「Solid Torus の LM 系」, Hakone Seminar 26(2010)17-28.
- [13] 山下正勝, 「レンズ空間と LM 系」, Hakone Seminar 27(2011)29-46.
- [14] S. V. Matveev, Algorithmic Topology and Classification of 3-Manifolds. Second Edition, Springer-Verlag, Berlin Heiderberg 2007.
- [15] Seifert-Threlfall, A Text Book of Topology., Translated by M. A. Goldman, Academic Press (1980).