

block number 2 の 2種類のDS図 について

山下正勝

§ 1. 序

石井一平氏が進めておられる研究テーマのひとつに“E-cycle 付き DS-diagram の block number” という概念による 3次元多様体の分類研究がある。

平面上に描かれている E-cycle 付き DS-diagram について考える。E-cycle を表す円周からは内側および外側に何本もの(全体としては内外同じ本数の)手が出ている。E-cycle の近傍を眺めてみると, 何本か連続して内側に手が出た後に, また何本か連続して外側に手が出ている, また内側に..., といった具合になっている。そこで, 連続して手が出ている E-cycle の近傍の最大部分を 1つの block とし, これを **positive block** という。また, 外側に手が出ている最大部分を **negative block** という。positive blocks の総数と negative blocks の総数は同じである。その総数 n を E-cycle 付き DS-diagram Δ の **block number** といい, $bl(\Delta) = n$ と表す。

3次元閉多様体 M を表示する E-cycle 付き DS-diagrams は無数にあるが, それらの DS-diagrams が持つ block number のうちでもっとも小さいものを多様体 M の block number と定め, $bl(M)$ と表す。

石井氏の研究によれば, block number が 1 である 3次元閉多様体はレンズ空間である。(ただし 3次元球面 S^3 なども含む)。また任意のレンズ空間の block number は 1 である。この事実は, よく知られている

“Heegaard genus 1 の閉多様体はレンズ空間である”

という結果との類比を連想させられる。

現在, 石井氏による block number 2 の 3次元多様体の解明作業はかなり進行しているようである。そこで得られた block number 2 の E-cycle 付き DS-diagram のなかに, 気になる 2種類の図, すなわち図 1 の $A = A(h, m_1, m_2)$ と図 2 の $B = B(k, n_1, n_2)$ がある。

石井氏はそれらの DS-diagram に対応する閉多様体 $M(A)$ と $M(B)$ の基本群がいずれも同じタイプの群表示:

$$\langle \alpha, \beta \mid \alpha^p = \beta^q = (\alpha\beta) \rangle$$

を持つことを示され, 「 $M(A)$ と $M(B)$ は同相なのであろう」とおっしゃられた。

DS 変形により, そのご託宣が正しいことを確認した。この記事はその報告である。

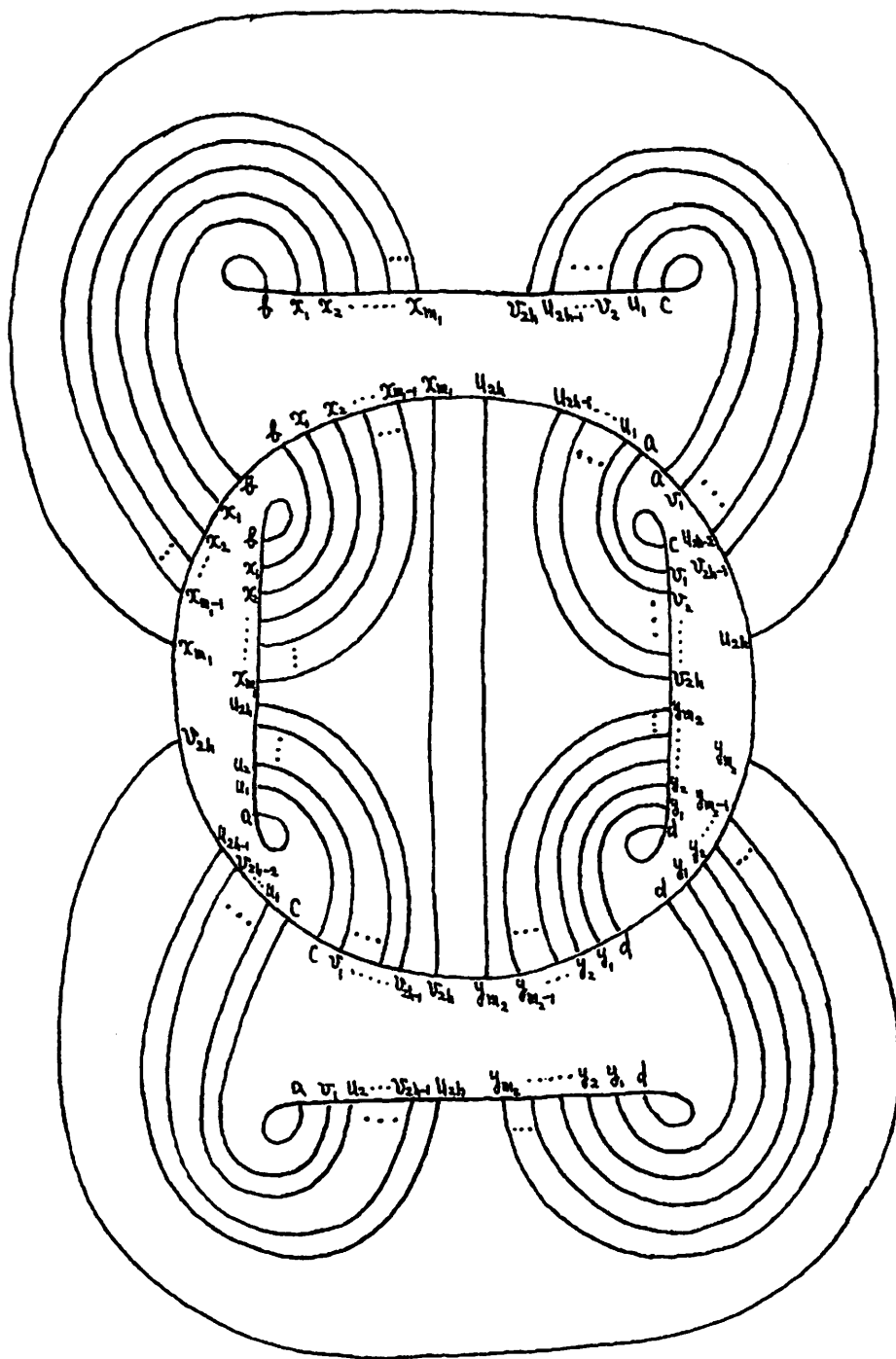


図 1 : $A(h; m_1, m_2)$

図 1 で描かれた E-cycle 付き DSdiagram $A(h; m_1, m_2)$ は $(4 + 4h + m_1 + m_2)$ 個の頂点 $\{a, b, c, d; u_1, \dots, u_{2h}; v_1, \dots, v_{2h}; x_1, \dots, x_{m_1}; y_1, \dots, y_{m_2}\}$ を持っていて、それらのラベルは、図 1 の円周上に配列されているように、E-cycle 上に 2 度ずつ現れている。頂点の個数に関する parameter $h; m_1, m_2$ が与えられれば、E-cycle 付き DSdiagram $A(h; m_1, m_2)$ は一意に定まる。

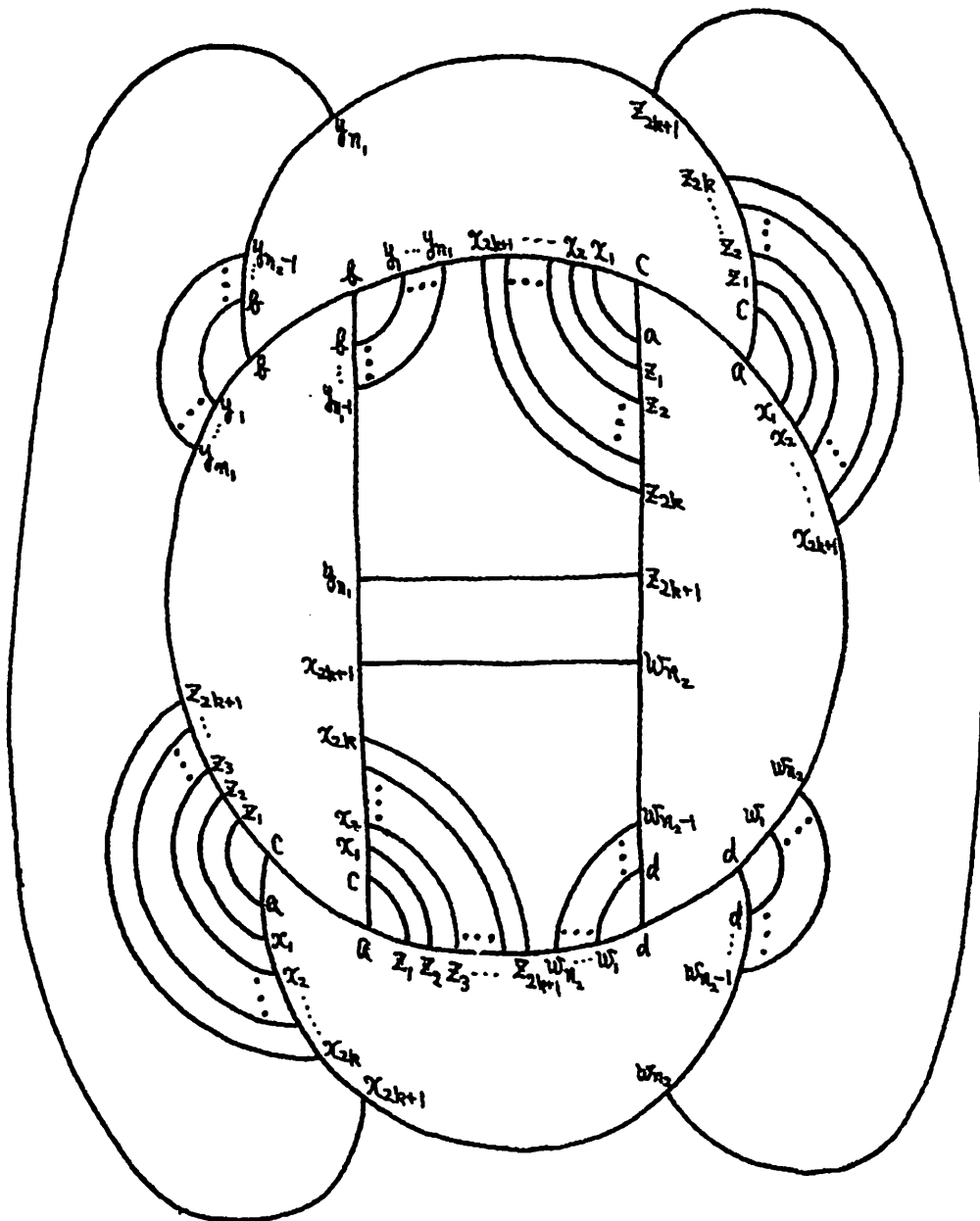


図 2 : $B(k, n_1, n_2)$

図 2 の E-cycle 付き DS-diagram $B(k, n_1, n_2)$ は $\{4 + 2(2k + 1) + n_1 + n_2\}$ 個の頂点 $\{a, b, c, d; x_1, \dots, x_{2k+1}; z_1, \dots, z_{2k+1}; y_1, \dots, y_{n_1}; w_1, \dots, w_{n_2}\}$ を持っていて、それらのラベルは、図 2 に配列されているように、E-cycle を表す円周上に 2 度ずつ現れている。頂点の個数に関する parameter k, n_1, n_2 が与えられれば、そのような E-cycle 付き DS-diagram $B(k, n_1, n_2)$ は一意に定まる。

図1および図2の DS-diagram の図形としての対称性と頂点ラベルの配列の対称性から次のことがわかる。

Proposition 1. $A(h; m_1, m_2) = A(h; m_2, m_1)$, $B(k; n_1, n_2) = B(k; n_2, n_1)$

さて、この記事で解説したいことを定理の形で述べておく。

定理 $h \geq 2$, $m_1 \geq 4$, $m_2 \geq 4$ とする。そのとき、DS-diagram $A(h, m_1, m_2)$ と DS-diagram $B(h-2, m_1-3, m_2-3)$ とは DS 同値である。

$A = A(h, m_1, m_2)$, $B = B(h-2, m_1-3, m_2-3)$ とし、これらの DS-diagrams に対応する 3次元閉多様体をそれぞれ $M(A)$, $M(B)$ とする。そのとき上の定理から、多様体についての次の同相判定が自然に得られる。

系 $h \geq 2$, $m_1 \geq 4$, $m_2 \geq 4$ ならば $M(A)$ と $M(B)$ は同相である。

上の定理の出発点として、次節では $h=2$, $m_1=4$, $m_2=4$ の場合について調べるが、実はそれ以前のものというべき DS-diagram も若干ある。たとえば下の左図 $A(1; 0, 0)$ は 3次元球面 S^3 の DS-diagram であり、右図 $A(2; 2, 2)$ は Quaternion group $\langle \alpha, \beta \mid \alpha = \beta = \alpha\beta \rangle$ を基本群に持つ 3次元閉多様体である。Seifert-Threlfall の教科書 ([8], p. 205.) ではこの多様体のことを Quaternion space と呼んでいる。

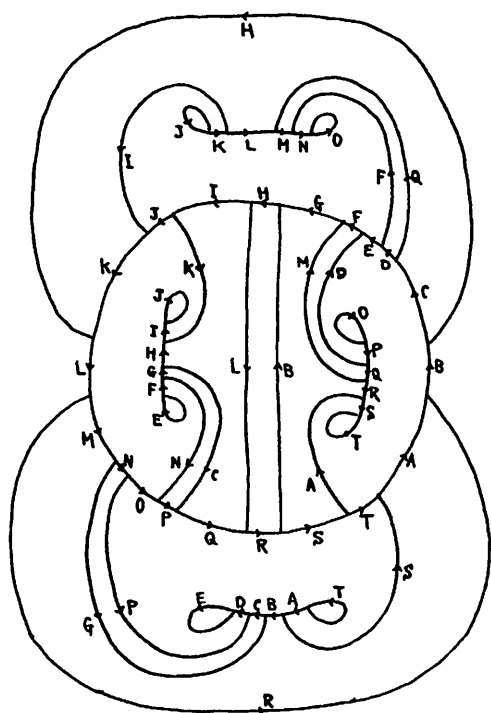


図 3-1 : $A(1; 0, 0) : S^3$

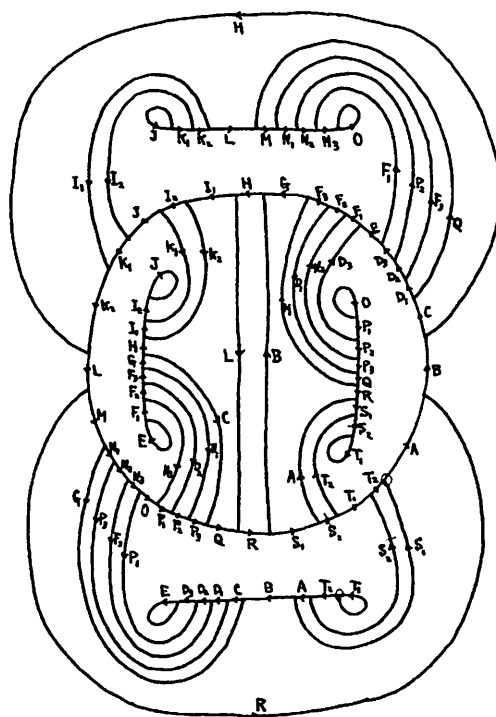


図 3-2 : $A(2; 2, 2) : Q\text{-space}$

§2. 数学的帰納法の出発点は $A(2, 4, 4) \equiv B(0, 1, 1)$

定理の証明は数学的帰納法で示すことができる。その出発点は

$$A(2, 4, 4) \equiv B(0, 1, 1) \quad (\text{DS 同値})$$

である。この事実をこの節で示しておこう。

DS-diagram $A(2, 4, 4)$ および $B(0, 1, 1)$ の張り合わされるべき辺および面の情報を明示するために、それぞれ図4および図5のように各辺にラベルを付けた形で表しておく。

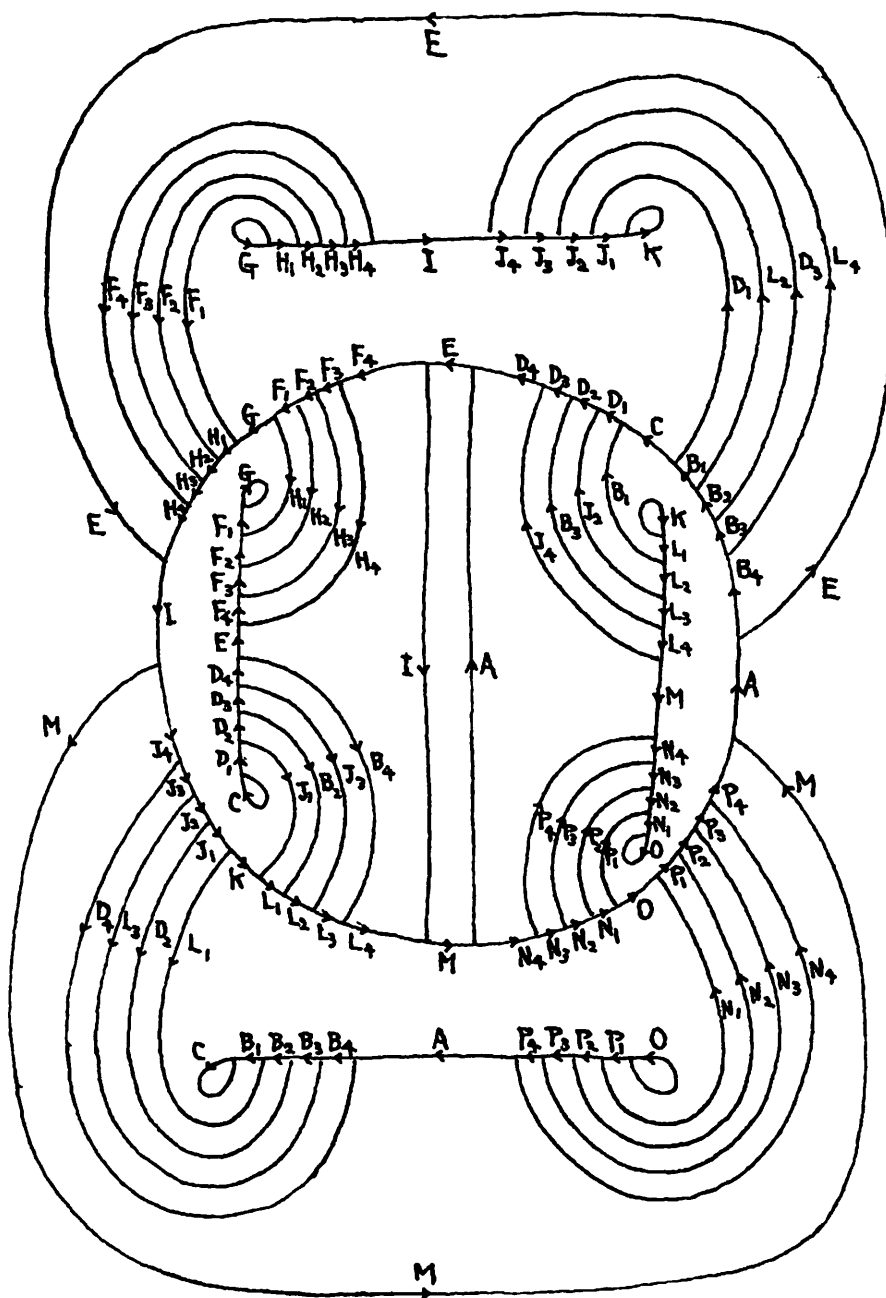


図4: $h_1 = 2, m_1 = 4, m_2 = 4; A(2, 4, 4)$

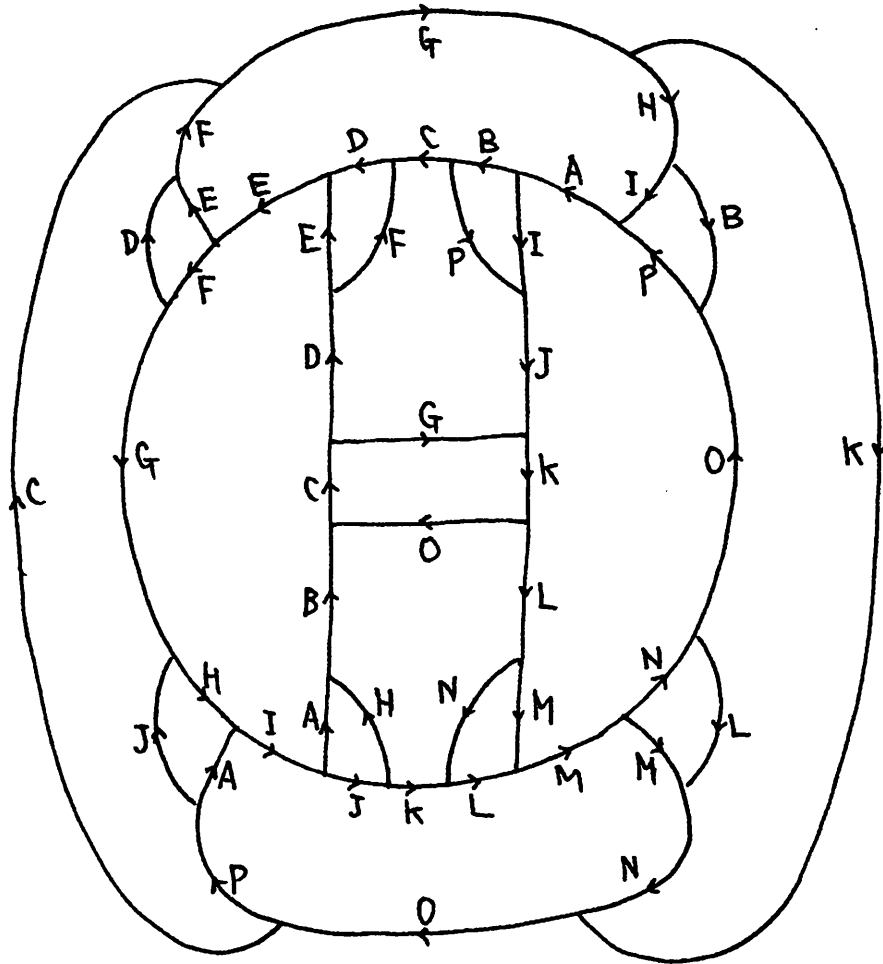


図 5 : $k = 0, m_1 = 1, m_2 = 1 ; B(0, 1, 1)$

まず、図 4 の DS-diagram $A(2, 4, 4)$ について考える。円周で表されている cycle :

$$AB_4B_3B_2B_1CD_4D_3D_2D_1EF_4F_3F_2F_1GH_4H_3H_2H_1JJ_4J_3J_2J_1KL_4L_3L_2L_1MN_4N_3N_2N_1OP_4P_3P_2P_1$$

はこの DS-diagram の E-cycle である。

この DS-diagram $A(2, 4, 4)$ の中には $C, K ; G, O$ という 4 つの 1 辺形が内蔵されている。このうち、 C と K は夫婦のようなものであり、 G と O は兄弟のようなものである。

手始めに、兄弟 1 辺形 $\{G, O\}$ の変形処理から行う。

1 辺形 G のまわりの環境

$$\Sigma_0 = \{G, F_1H_1F_2^{-1}H_2^{-1}, F_2H_2F_3^{-1}H_3^{-1}, F_3H_3F_4^{-1}H_4^{-1};$$

$$E^+ \cdot F_4F_3F_2F_1 \cdot G \cdot F_1^{-1}H_1^{-1}G \cdot H_1H_2H_3H_4 \cdot I^-, I^- \cdot F_4H_4 \cdot E^+, \dots\}$$

において辺 H_1 にパイピング Φ^+ を行うと、3 辺形 $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ が新たに発生して

$$\Sigma_1 = \{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, G \alpha_2^{-1}, F_1F_2^{-1}H_2^{-1} \alpha_2^{-1}, F_2 \alpha_3^{-1}H_2F_3^{-1}H_3^{-1}, F_3H_3F_4^{-1}H_4^{-1};$$

$$; E^+ \cdot F_4F_3F_2 \alpha_1 F_1 \alpha_1 G \alpha_3 F_1^{-1}GH_2H_3H_4 \cdot I^-, I^- \cdot F_4H_4 \cdot E^+, \dots\}$$

となる。そこで2辺形 $G \alpha_2^{-1}$ をつぶすと

$$\Sigma_2 = \{ \alpha, F_2 H_2, F_3 H_3 F_4^{-1} H_4^{-1};$$

$$E^+ \cdot F_4 F_3 F_2 \alpha F_2^{-1} H_3 F_3 H_2^{-1} \alpha H_2 H_3 H_4 \cdot I^-, I^- \cdot F_4 H_4 \cdot E^+, \dots \}$$

となる。ただし、辺 α_1, α_3 を α 、辺 $F_1^{-1} H_2$ を H_2 と置き換えている。

そこでさらに2辺形 $F_2 H_2$ をつぶすと

$$\Sigma_3 : \{ F_3 H_3 F_4^{-1} H_4^{-1}; E^+ \cdot F_4 \alpha \alpha H_3 H_4 \cdot I^-, I^- \cdot F_4 H_4 \cdot E^+, \dots \}$$

となる。ただし、辺 α_1, α_3 を α 、辺 $F_3 \alpha H_3$ を α と置き換えている。

1 辺形 O のまわりの環境においても同様な DS 変形を行う。その結果、図 6 を得る。

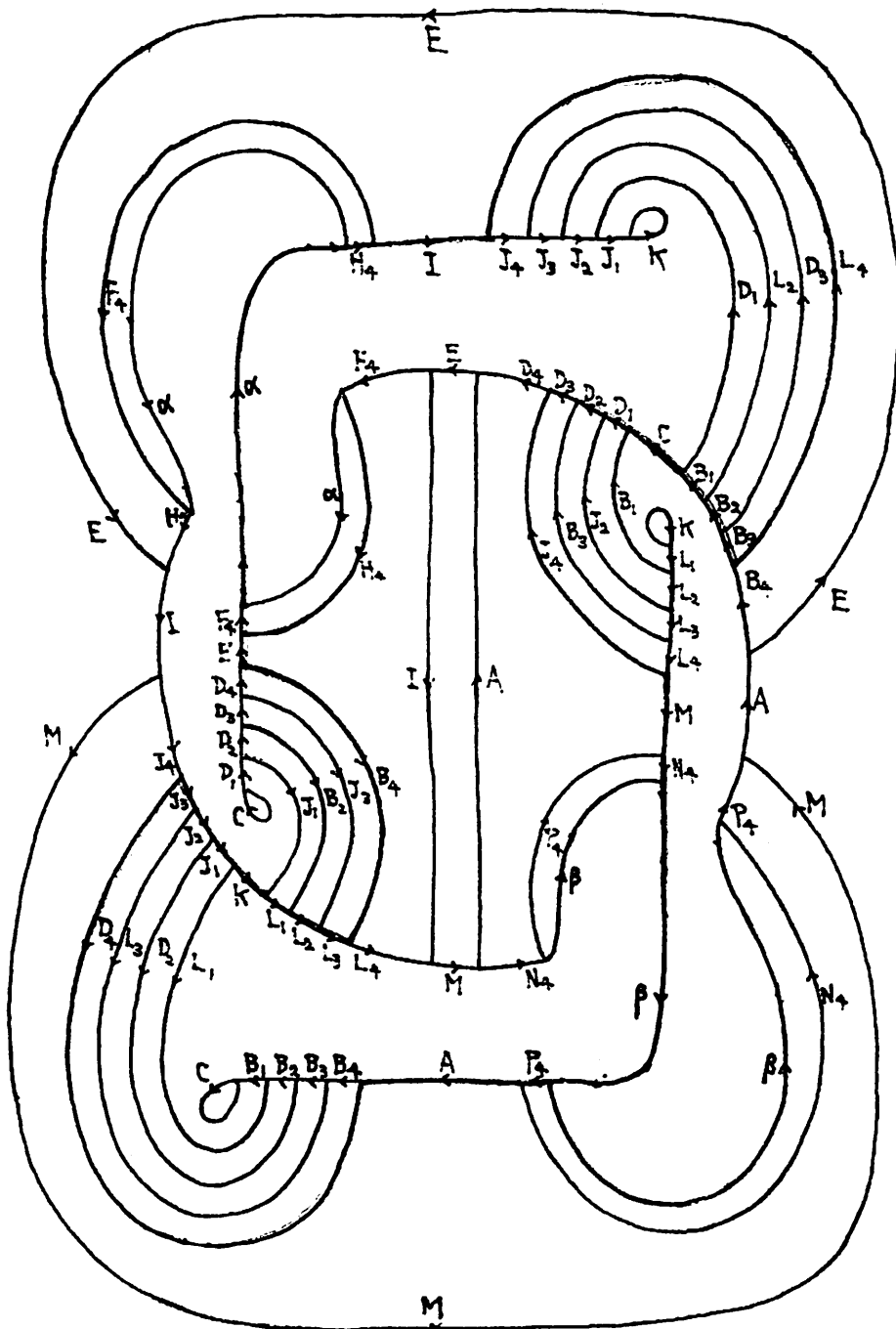


図 6 : $A(2, 4, 4)$ の DS 変形途中図

この DS-diagram の E-cycle として

$$B_3B_2B_1CD_1D_2D_3J_4^{-1}MN_4\beta P_4AD_4^{-1}J_3J_2J_1KL_1L_2L_3B_4^{-1}EF_4\alpha H_4IL_4^{-1}$$

を採用することができる。この E-cycle が円状になるように描き直したのが図 7 である。

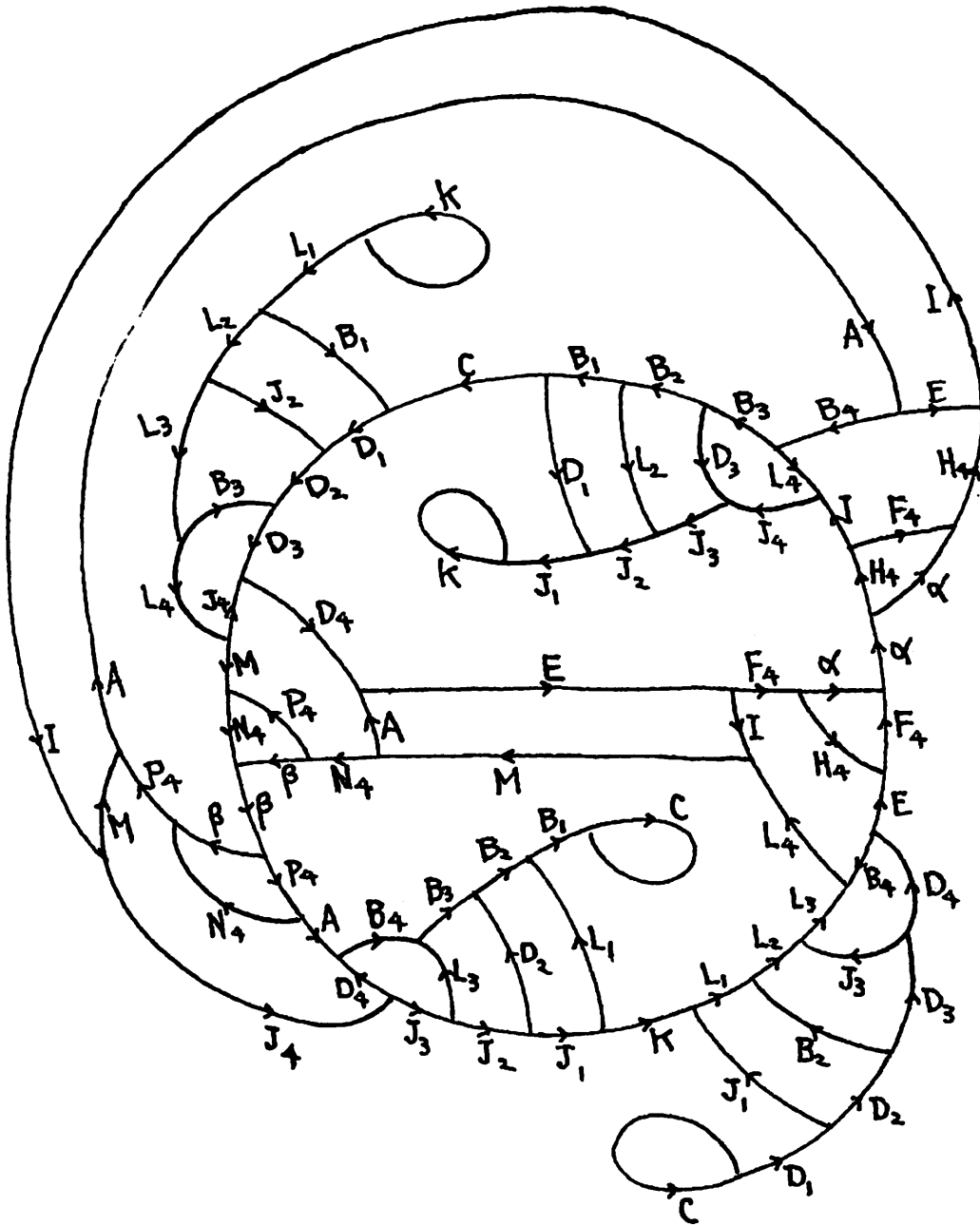


図 7 : A(2, 4, 4) の DS 変形途中図 (図 6 を描き直したもの)

さてこの図 7 のなかで、1 辺形 K と 1 辺形 C に絡んでいる 8 個の多辺形の和集合 :

$$K \cup B_1D_1J_2^{-1}L_2^{-1} \cup J_2D_2B_3^{-1}L_3^{-1} \cup B_3D_3J_4^{-1}L_4^{-1} \cup B_2L_2J_3^{-1}D_3^{-1} \cup C \cup D_2B_2L_1^{-1}J_1^{-1}(\cup J_2D_2B_3^{-1}L_3^{-1}) \cup D_4B_4L_3^{-1}J_3^{-1} \cup (\cup B_2L_2J_3^{-1}D_3^{-1})$$

に着目して、そのまわりの環境：

$$\Sigma_4 = \{K, B_1D_1J_2^{-1}L_2^{-1}, B_3D_3J_4^{-1}L_4^{-1}, B_2L_2J_3^{-1}D_3^{-1}, J_2D_2B_3^{-1}L_3^{-1}, \\ C, D_2B_2L_1^{-1}J_1^{-1}, D_4B_4L_3^{-1}J_3^{-1}; \\ \Gamma^+ \cdot J_4J_3J_2J_1KJ_1^{-1}D_1^{-1}CD_1D_2D_3D_4 \cdot E^-, A^+ \cdot B_4B_3B_2B_1CB_1^{-1}L_1^{-1}KL_1L_2L_3L_4 \cdot M^-, \\ E^- \cdot B_4L_4 \cdot \Gamma^+, M^- \cdot J_4D_4 \cdot A^+, A^+E^-, \Gamma^+M^-, \dots\}$$

について調べてみる。

辺 L_1 のパイピングによる DS 変形で Σ_4 は新たな 3 辺形 $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ を伴って

$$\Sigma_5 = \{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3, K \gamma_2^{-1}, B_1D_1J_2^{-1}L_2^{-1} \gamma_2^{-1}, B_3D_3J_4^{-1}L_4^{-1}, \\ B_2 \gamma_3^{-1}L_2J_3^{-1}D_3^{-1}, J_2D_2B_3^{-1}L_3^{-1}, C, D_2B_2J_1^{-1}, D_4B_4L_3^{-1}J_3^{-1}; \\ \Gamma^+ \cdot J_4J_3J_2J_1 \gamma_1 K \gamma_3 J_1^{-1}D_1^{-1}CD_1D_2D_3D_4 \cdot E^-, \\ A^+ \cdot B_4B_3B_2 \gamma_1 B_1CB_1^{-1}KL_2L_3L_4 \cdot M^-, \\ E^- \cdot B_4L_4 \cdot \Gamma^+, M^- \cdot J_4D_4 \cdot A^+, A^+E^-, \Gamma^+M^-, \dots\}$$

に変化する。そこで 2 辺形 $K \gamma_2^{-1}$ をつぶして Σ_6 を作れば

$$\Sigma_6 = \{\gamma, B_1D_1J_2^{-1}, B_3D_3J_4^{-1}L_4^{-1}, J_2D_2B_3^{-1}L_3^{-1}, C, D_2B_2J_1^{-1}, D_4B_4L_3^{-1}J_3^{-1}; \\ \Gamma^+ \cdot J_4J_3J_2J_1 \gamma J_1^{-1}D_1^{-1}CD_1D_2D_3D_4 \cdot E^-, \\ A^+ \cdot B_4B_3B_2 \gamma B_2^{-1}D_3J_3B_1CB_1^{-1}L_3L_4 \cdot M^-, \\ E^- \cdot B_4L_4 \cdot \Gamma^+, M^- \cdot J_4D_4 \cdot A^+, A^+E^-, \Gamma^+M^-, \dots\}$$

となる。ただし変形後の 1 辺 $\gamma_1 \gamma_3$ を γ に、1 辺 $L_2^{-1}B_1$ を B_1 に置き直した。

そこでこの Σ_6 内の 3 辺形 $D_2B_2J_1^{-1}$ をつぶせば、 Σ_6 は

$$\Sigma_7 = \{\gamma \delta^{-1}, B_1D_1 \delta^{-1}J_2^{-1}, B_3 \delta D_3J_4^{-1}L_4^{-1}, J_2B_3^{-1}L_3^{-1}, C, D_4B_4L_3^{-1}J_3^{-1}; \\ \Gamma^+ \cdot J_4J_3J_2 \gamma D_1^{-1}CD_1D_3D_4 \cdot E^-, A^+ \cdot B_4B_3 \gamma D_3J_3B_1CB_1^{-1}L_3L_4 \cdot M^-, \\ E^- \cdot B_4L_4 \cdot \Gamma^+, M^- \cdot J_4D_4 \cdot A^+, A^+E^-, \Gamma^+M^-, \dots\}$$

に変形される。そこで 2 辺形 $\gamma \delta^{-1}$ をつぶせば

$$\Sigma_8 = \{B_1D_1, B_3J_4^{-1}L_4^{-1}, C, D_4B_4L_3^{-1}J_3^{-1}; \\ \Gamma^+ \cdot J_4J_3D_1^{-1}CD_1L_3B_3D_4 \cdot E^-, A^+ \cdot B_4B_3J_3B_1CB_1^{-1}L_3L_4 \cdot M^-, \\ M^- \cdot J_4D_4 \cdot A^+, E^- \cdot B_4L_4 \cdot \Gamma^+, A^+E^-, \Gamma^+M^-, \dots\}$$

を得る。ただし、1 辺 $D_1J_2^{-1}$ を D_1 、1 辺 B_3D_3 を B_3 に書き直した。

さらに 2 辺形 B_1D_1 をつぶせば

$$\Sigma_9 = \{B_3J_4^{-1}L_4^{-1}, D_4B_4C^{-1}; \\ \Gamma^+ \cdot J_4CB_3D_4 \cdot E^-, A^+ \cdot B_4B_3CL_4 \cdot M^-, \\ E^- \cdot B_4L_4 \cdot \Gamma^+, M^- \cdot J_4D_4 \cdot A^+, A^+E^-, \Gamma^+M^-, \dots\}$$

を得る。ただし、1 辺 J_3CL_3 を C に書き直した。

ここで 3 辺形 $B_3J_4^{-1}L_4^{-1}$ をつぶせば

$$\Sigma_{10} = \{D_4B_4 \varepsilon C^{-1} \varepsilon; \\ \Gamma^+ \cdot CD_4 \cdot E^-, A^+ \cdot B_4C \cdot M^-, E^- \cdot B_4 \cdot \Gamma^+, M^- \cdot D_4 \cdot A^+, A^+E^-, \Gamma^+M^-, \dots\}$$

を得る。ただし、1 辺 J_3CL_3 を C に書き直した。

この DS-diagram Σ_{10} の E-cycle として

$$AB_4 \gamma D_4EF_4 \alpha H_4ICMN_4 \beta P_4$$

を採用できる。この E-cycle が円状になるように描き直したものが図 8 である。

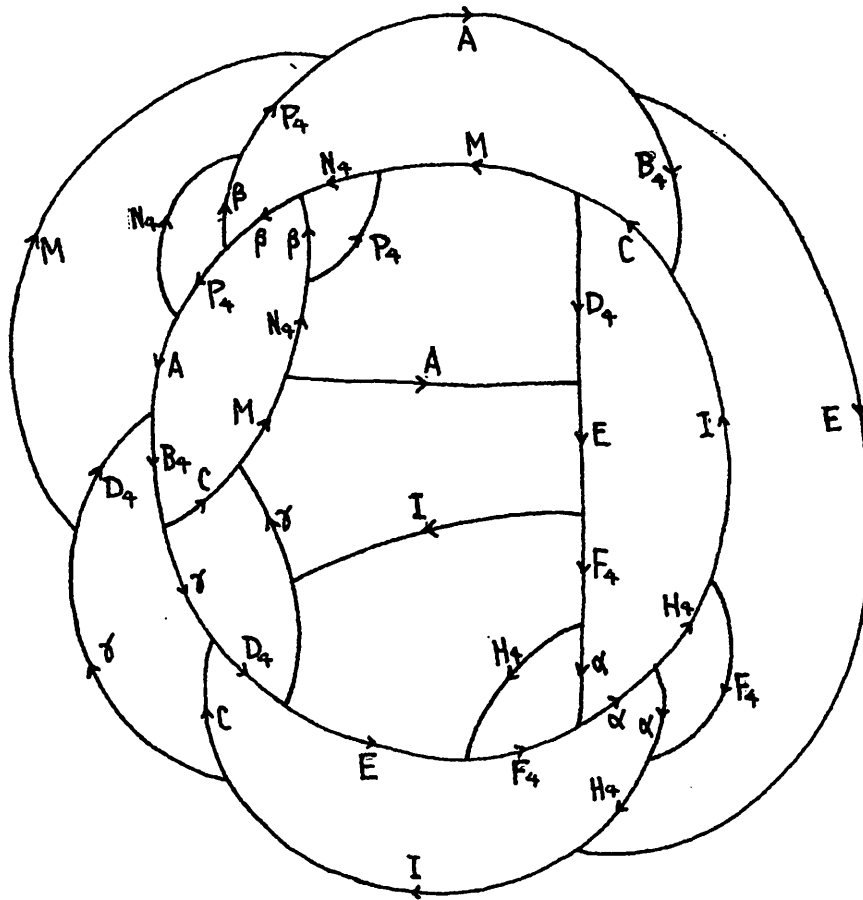


図 8 : A(2, 4, 4) の変形後の図

さてつぎに、図 5 の DS-diagram B(0, 1, 1) について考える。

この DS-diagram の E-cycle は

ABCDEFGHIJKLMNPO

である。図 5 には、張り合わされるべき 3 辺形の組が JHA^{-1} , BPI^{-1} ; FDE^{-1} , NLM^{-1} の 4 組ある。

このうち、 FDE^{-1} と NLM^{-1} は “ニアミス” を犯している 3 辺形なので DS-変形ではつぶせないが、 JHA^{-1} , BPI^{-1} のほうはつぶすことが可能である。そのどちらか一方、どちらでもよいがたとえば JHA^{-1} をつぶすことを考える。すると B(0, 1, 1) 内の 3 辺形 JHA^{-1} の周辺環境は

$\{JHA^{-1}; P^+JG^+, I^+JK^-, G^+HI^-, K^-HB^-, I^+AB^-, P^+AI^-, P^+I^+, G^+K^-, I^-B^-, \dots\}$

⇒

$\{ ; P^+G^+, I^+K^-, G^+I^-, K^-B^-, I^+B^-, P^+I^-, P^+QI^+, G^+QK^-, I^-QB^-, \dots\}$

と変化する。こうして得られた DS-diagram は、E-cycle $e' : BCDEFGIKLMNOPQ$ を持ち、図 9 のようになる。(ただし、図 9 では “Q” の代わりに “A” と書き直してある。)

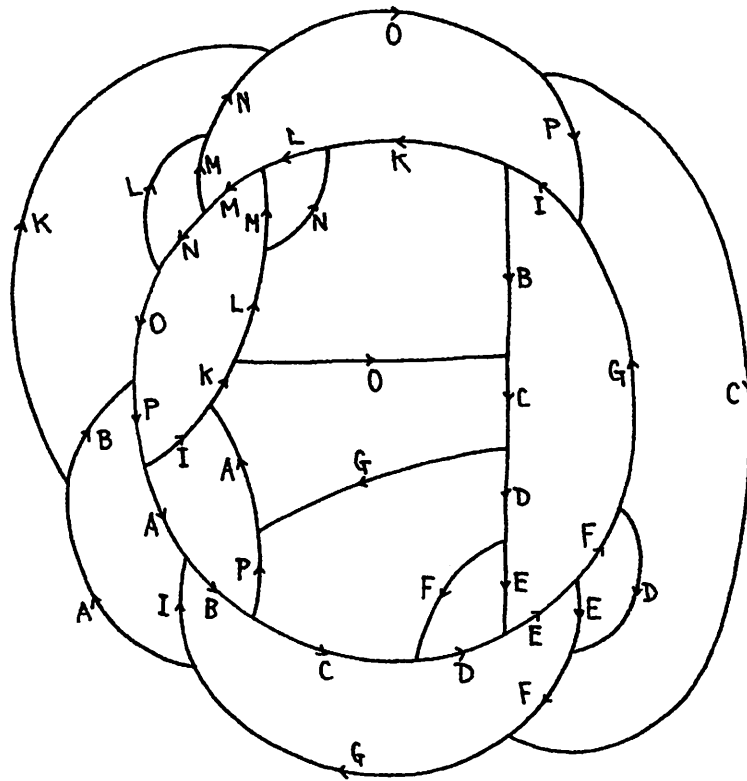


図 9 : $B(0, 1, 1)$ の変形後の図

図 8(前図) のなかに使われているラベルの文字を

- $\gamma \rightarrow A$
- $D_4 \rightarrow B$
- $E \rightarrow C$
- $F_4 \rightarrow D$
- $\alpha \rightarrow E$
- $H_4 \rightarrow F$
- $I \rightarrow G$
- $C \rightarrow I$
- $M \rightarrow K$
- $N_4 \rightarrow L$
- $\beta \rightarrow M$
- $P_4 \rightarrow N$
- $A \rightarrow O$
- $B_4 \rightarrow P$

と置き換えれば図 9 と全く同じ図が得られる。したがって $A(2, 4, 4)$ と $B(0, 1, 1)$ とは DS 同値である。

§3. $A(5, 6, 5)$ と $B(3, 3, 2)$ とは DS 同値である

DS-diagram $A(5, 6, 5)$ の辺のラベルを図 10 のようにしておく。

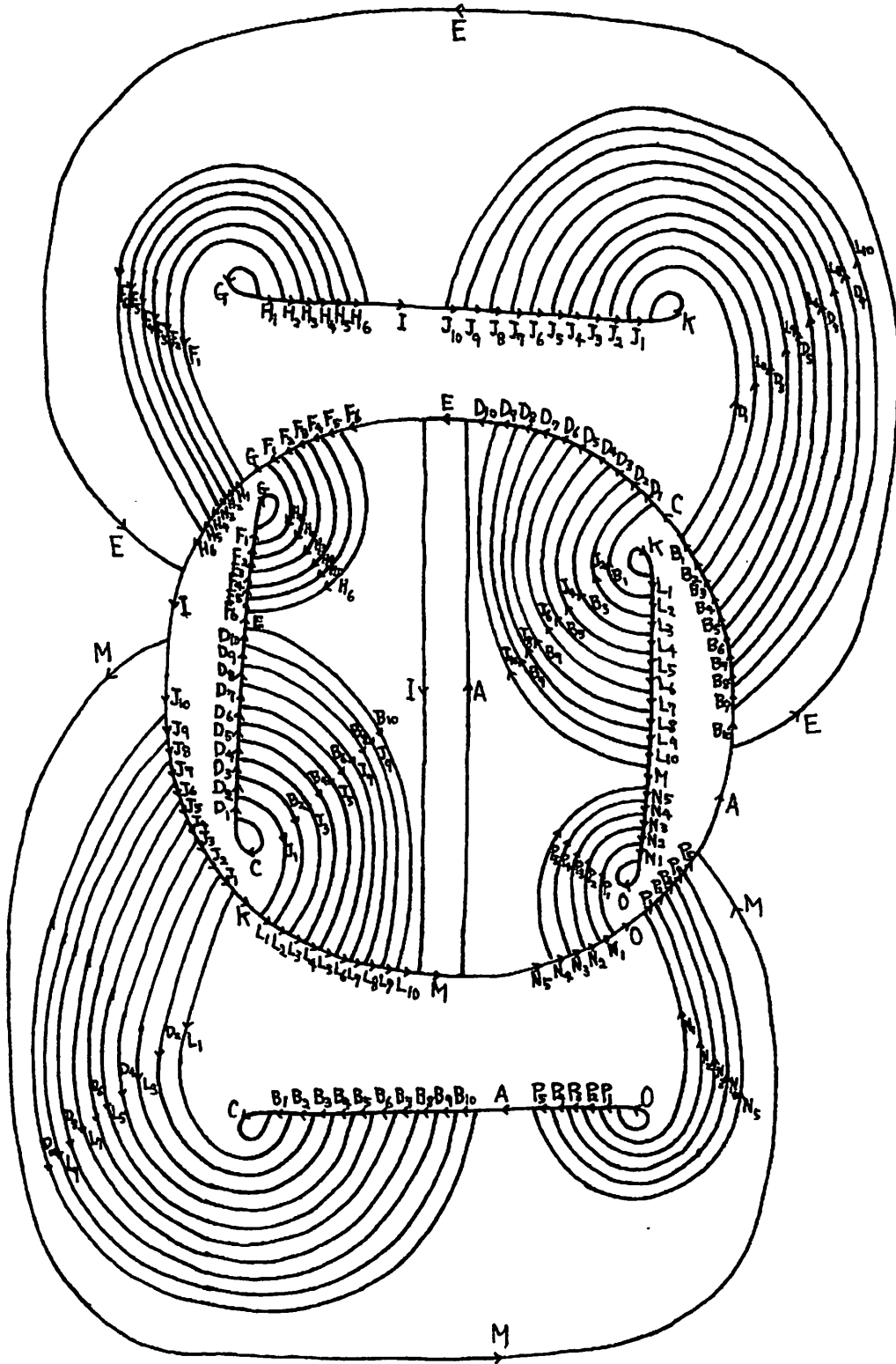


図 10 : $h_1 = 5, m_1 = 6, m_2 = 5 ; A(5, 6, 5)$

この DS-diagram A(5, 6, 5) の E-cycle は

$$AB_{10} \cdots B_1CD_1 \cdots D_{10}EF_6 \cdots F_1GH_1 \cdots H_6IJ_{10} \cdots J_1KL_1 \cdots L_{10}MN_5 \cdots N_1OP_1 \cdots P_5$$

である。

この DS-diagram のなかには C, K ; G, O という 4 つの 1 辺形が内蔵されている。そこでまず, 兄弟 1 辺形 {G, O} の変形処理から行う。

1 辺形 G を含む環境

$$\Sigma_1 = \{G, F_1H_1F_2^{-1}H_2^{-1}, \dots, F_5H_5F_6^{-1}H_6^{-1};$$

$$E^+ \cdot F_6 \cdots F_1 \cdot G \cdot F_1^{-1}H_1^{-1}G \cdot H_1 \cdots H_6 \cdot I^-, I^- \cdot F_6H_6 \cdot E^+, \dots\}$$

において, A(2, 4, 4) のときと同じように, 辺 H_1 にパイピング Φ^+ を行うことから始めてバタバタとつぶしてゆくと

$$\Sigma_2 = \{H_4F_4 \alpha^{-1}, F_4H_4F_5^{-1}H_5^{-1}, F_5H_5F_6^{-1}H_6^{-1};$$

$$E^+ \cdot F_6F_5F_4 \alpha \alpha H_4H_5H_6 \cdot I^-, I^- \cdot F_6H_6 \cdot E^+, E^+I^-, \dots\}$$

を得る (図 11)。

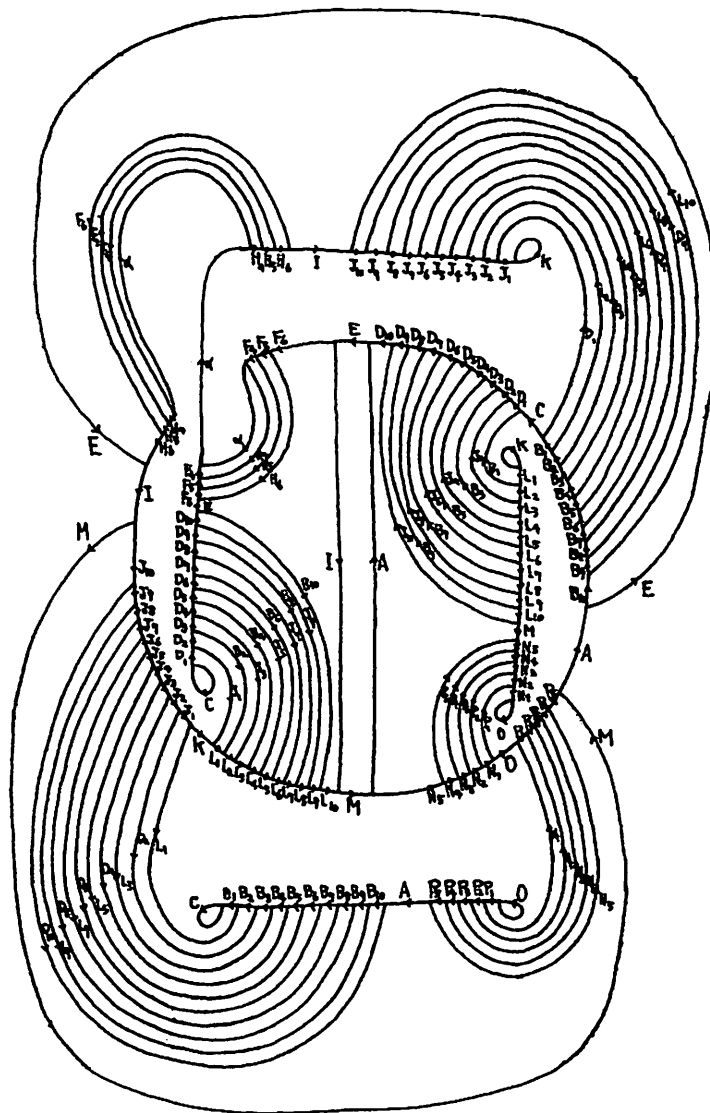


図 11 : A(5, 6, 5) の DS 変形の途中図 1

この図 11 に対して引き続き同様の操作を行う。すなわち 1 辺形 O を含む環境 $\Sigma_2' = \{O, N_1P_1N_2^{-1}P_2^{-1}, \dots, N_4P_4N_5^{-1}P_5^{-1}\};$

$$M^+ \cdot N_5 \cdots N_1 \cdot O \cdot N_1^{-1}P_1^{-1}O \cdot P_1 \cdots P_5 \cdot A^-, A^- \cdot N_5P_5 \cdot M^+, \dots\}$$

において、辺 P_1 に パイピング Φ^+ を行うことを手始めに、以下バタバタとつぶしてゆく。すると図 12 のような DS-diagram が得られる。

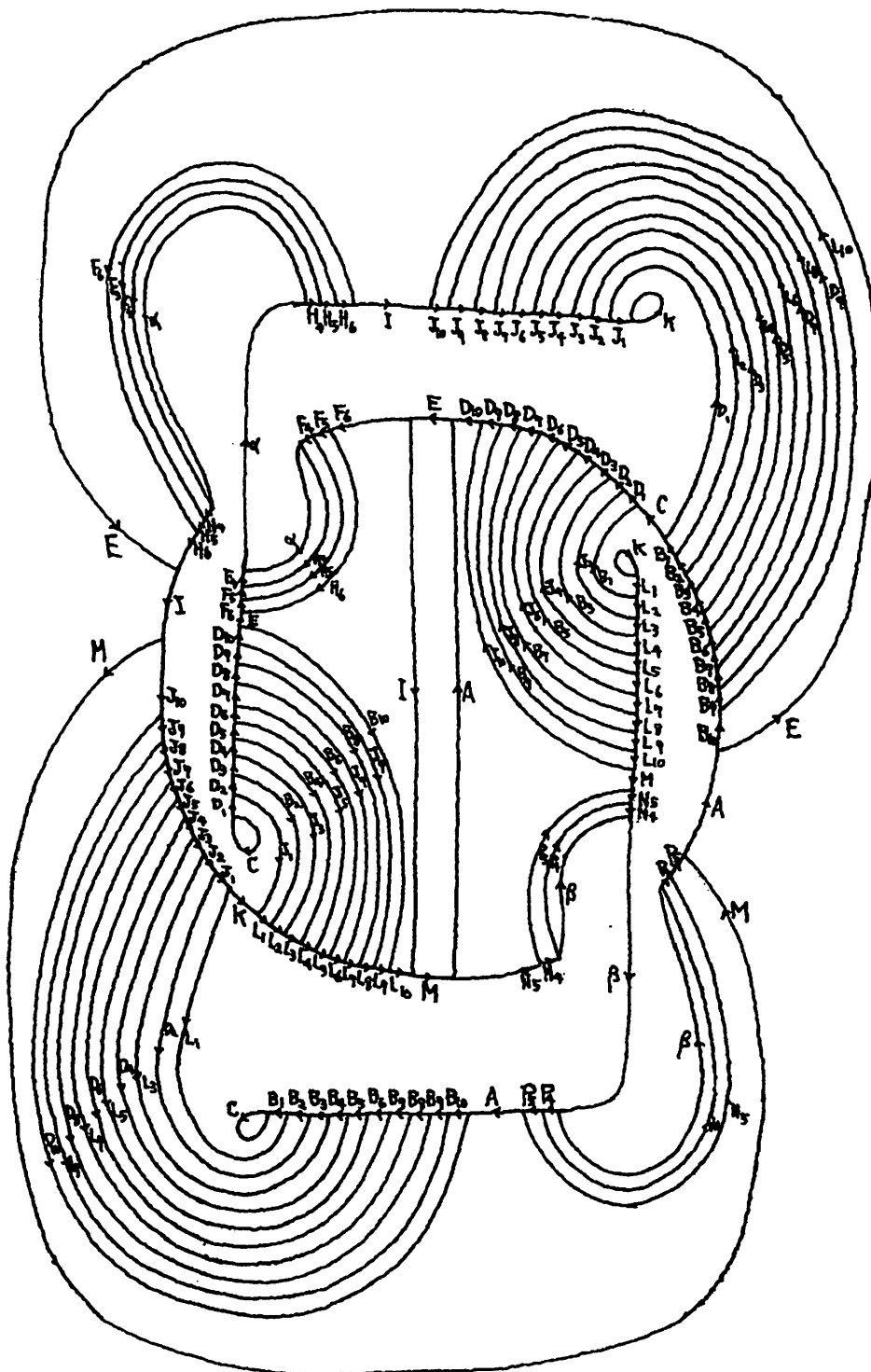


図 12 : $A(5, 6, 5)$ の DS 変形の途中図 2

この DS-diagram を観察してみると

$B_9 \cdots B_1 C D_1 \cdots D_9 J_{10}^{-1} M N_5 N_4 \beta P_4 P_5 A D_{10}^{-1} J_9 \cdots J_1 K L_1 \cdots L_9 B_{10}^{-1} E F_6 F_5 F_4 \alpha H_4 H_5 H_6 L_{10}^{-1}$
 という E-cycle を見つけることができる。この E-cycle を丸い円として描き直すと図 13
 になる。

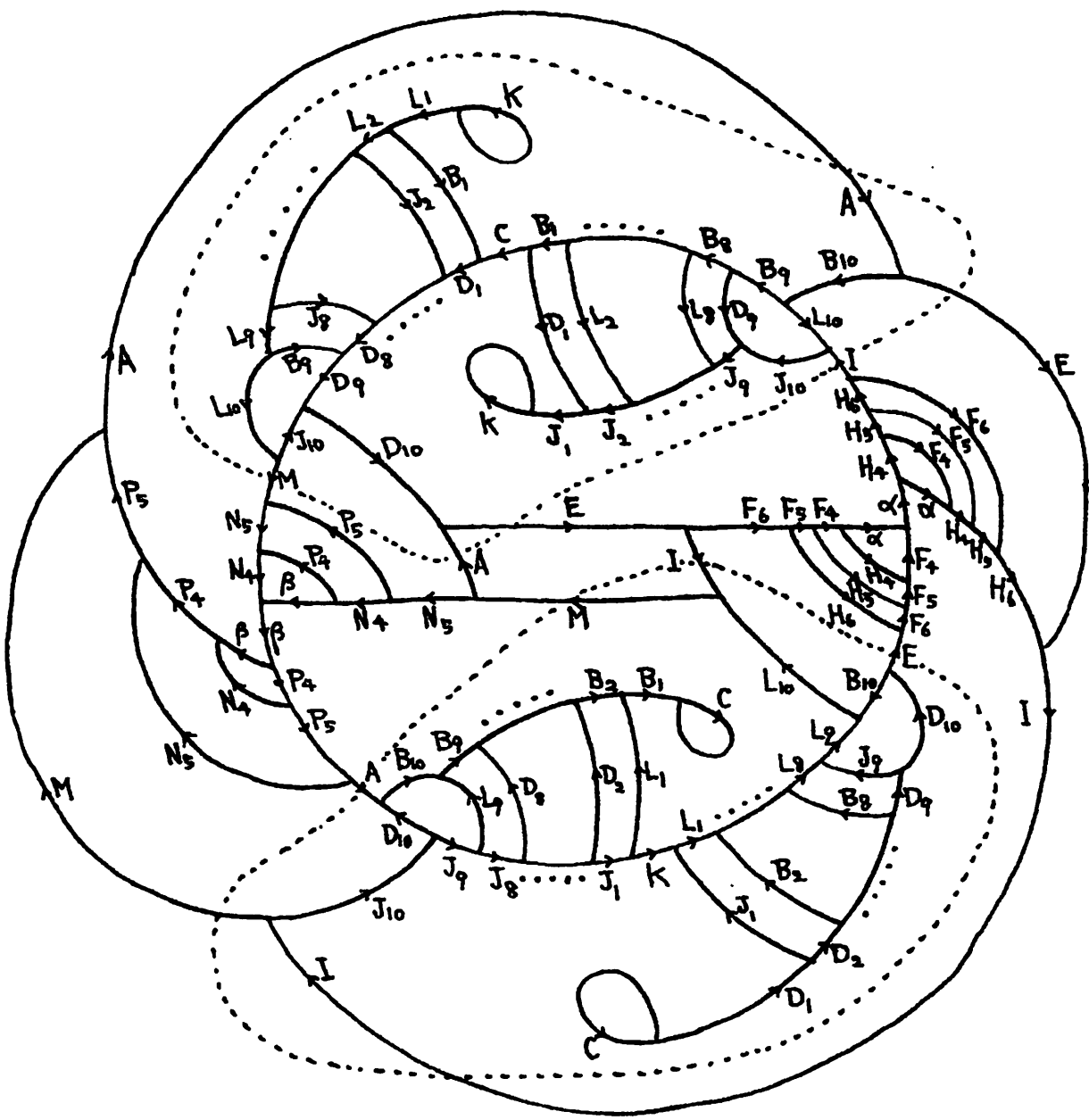


図 13 : A(5, 6, 5) の DS 変形の途中図 3

さてこの図 13 のなかで、1 辺形 K と 1 辺形 C に着目して、それらを含む環境 :

$$\Sigma_3 = \{K, C, B D J_{i+1}^{-1} L_{i+1}^{-1}, J L J B_{i+1}^{-1} L D_{i+1}^{-1} \text{ (ただし } i = 1, 3, 5, 7, 9), B L J_j^{-1} D_{j+1}^{-1}, J D B_{j+1}^{-1} L_j^{-1} \text{ (ただし } j = 2, 4, 6, 8),$$

$$\begin{aligned} & \Gamma^+ \cdot J_4 J_3 J_2 J_1 K J_1^- \cdot D_1^- \cdot CD_1 D_2 D_3 D_4 \cdot E^-, \\ & A^+ \cdot B_4 B_3 B_2 B_1 C B_1^- \cdot L_1^- \cdot KL_1 L_2 L_3 L_4 \cdot M^-, \\ & E^- \cdot B_4 L_4 \cdot \Gamma^+, M^- \cdot J_4 D_4 \cdot A^+, A^+ E^-, \Gamma^+ M^-, \dots \end{aligned}$$

について考える。この環境 Σ_3 を図で示すと、それは図 13 のなかの点線で囲まれた 2 つの領域である。

この部分について図 7 のときと同様な DS 変形を行うと下の図 14 のような DS-diagram を得る。

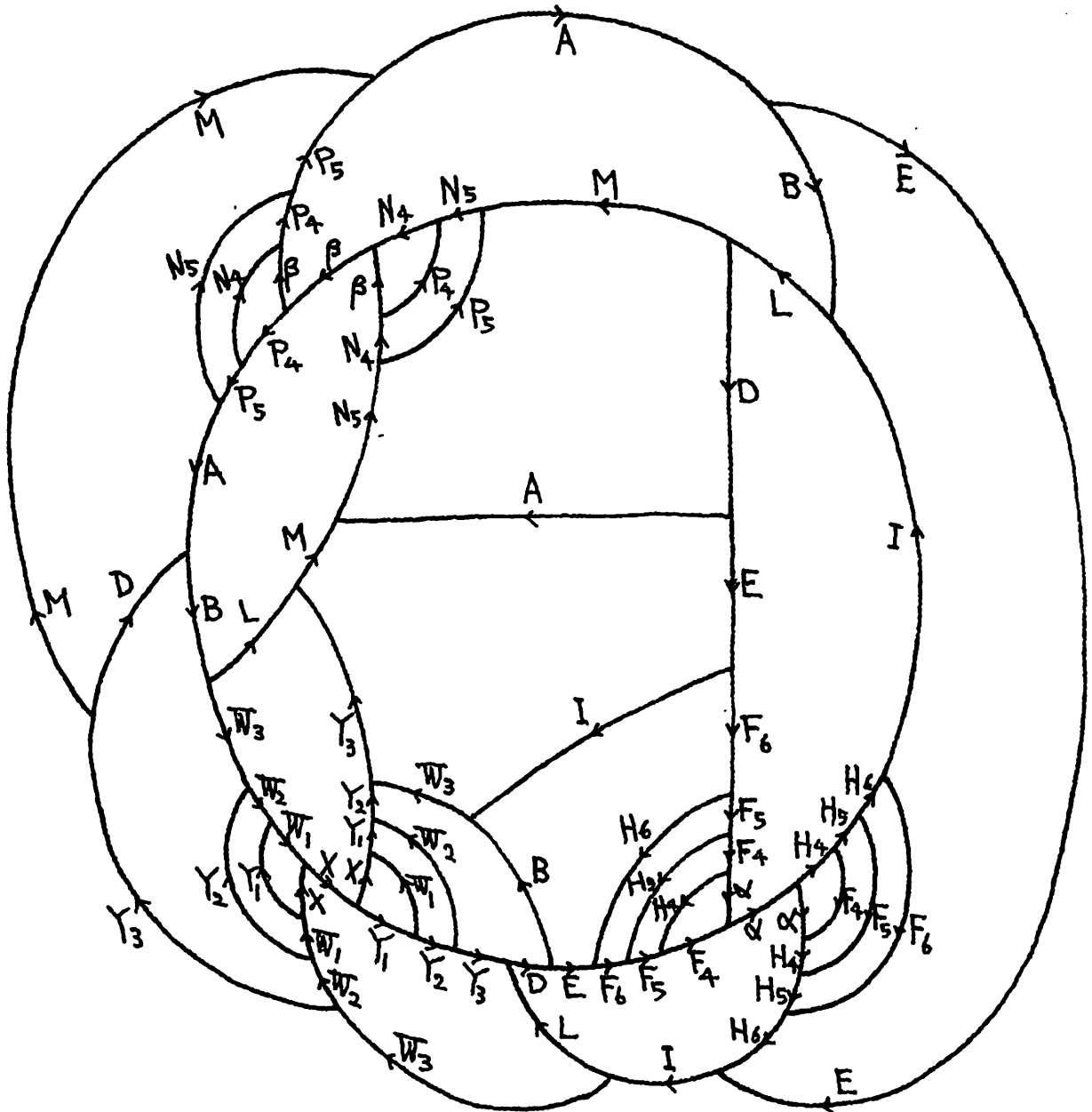


図 14 : A(5, 6, 5) の DS 変形の結果図

さてつぎに、もう一方の DS-diagram $B(3, 2, 3)$ について考える。

この DS-diagram の辺のラベルを図 15 のようにしておく。このときの E-cycle として

$$AB_1 \cdots B_7 CD_2 D_1 EF_1 F_2 GH_1 \cdots H_7 IJ_1 \cdots J_7 KL_3 L_2 L_1 MN_1 N_2 N_3 OP_1 \cdots P_7$$

を採用しておく。

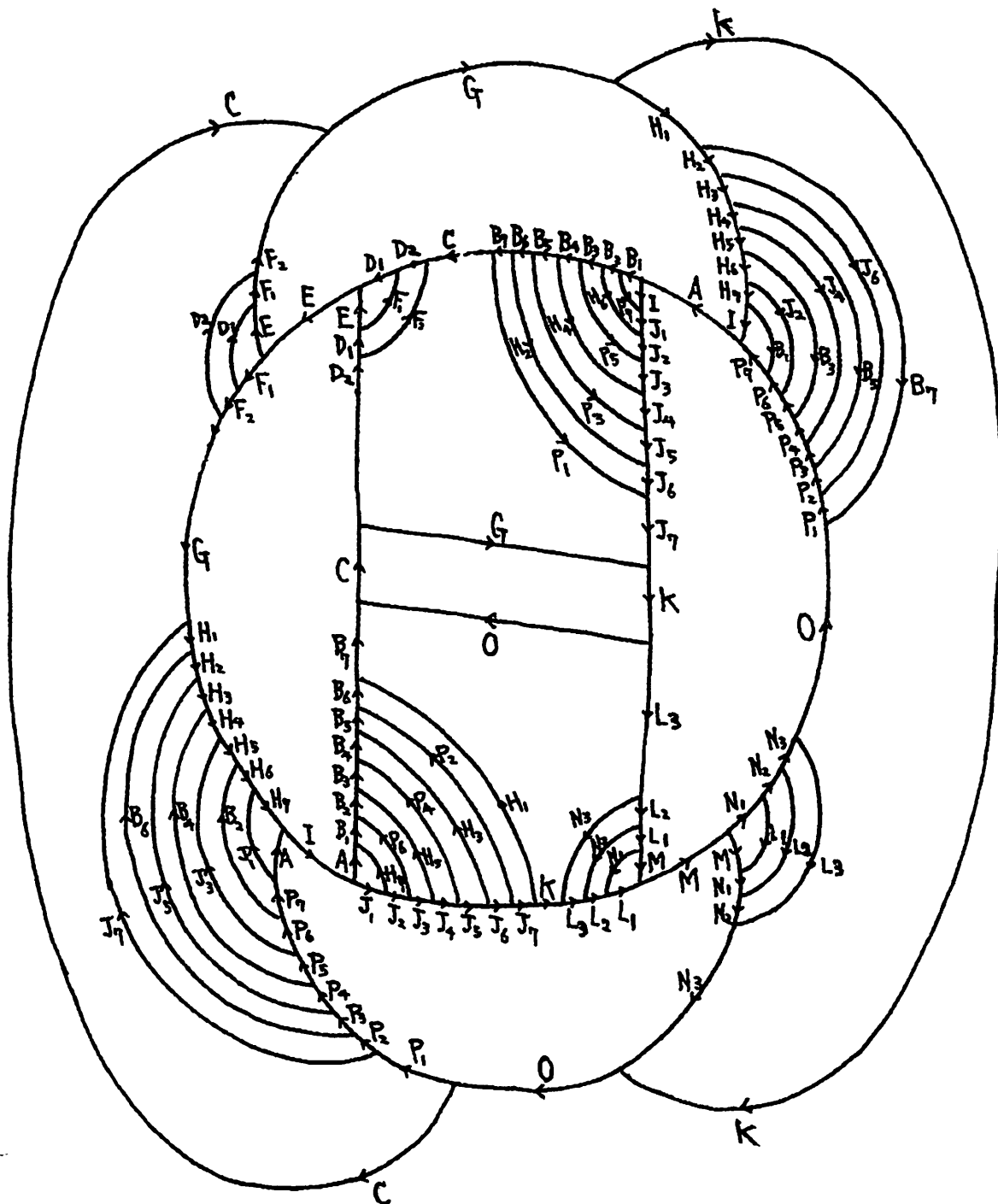


図 15 : $k = 3, m_1 = 2, m_2 = 3 ; B(3, 2, 3)$

この図 15 には、張り合わされるべき 3 辺形の組が

$$J_1H_1A^{-1}, B_1P_1I^{-1}; F_1D_1E^{-1}, N_1L_1M^{-1}$$

の 4 組ある。このうち、 $F_1D_1E^{-1}$ と $N_1L_1M^{-1}$ は“ニアミス”を犯している 3 辺形なので DS-変形ではつぶせないが、 $J_1H_1A^{-1}$ 、 $B_1P_1I^{-1}$ のほうはつぶすことが可能である。そのどちらか一方、どちらでもよいがたとえば 3 辺形 $J_1H_1A^{-1}$ をつぶすことを考える。

すると、 $B(0, 1, 1)$ の DS 変形のとくと同じようにして、自然に図 16 のような新たな DS-diagram を得ることができる。

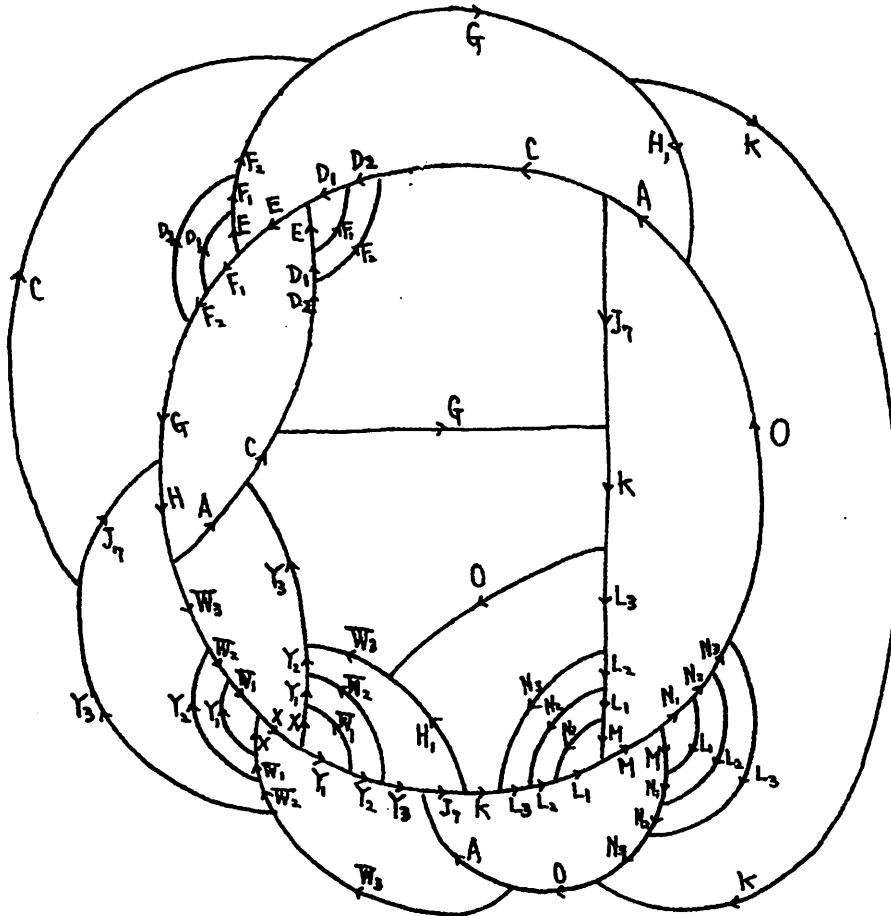


図 16 : $B(3, 2, 3)$ の DS 変形後の図

この DS-diagram は 14 図で示されている DS-diagram と全く同じものであるから

$$A(5, 6, 5) \equiv B(3, 2, 3) (\equiv B(3, 3, 2)) \quad (\text{DS 同値})$$

であることが分かる。

前節とこの節における DS 変形の一連の流れは、一般に

$$A(h, m_1, m_2) \equiv B(h-2, m_1-3, m_2-3) \quad (\text{DS 同値})$$

が成り立つことを示す方法を暗示している。一般には数学的帰納法で明示できるのだが煩雑になるので省略する。

(完)