

レンズ空間とLM系

山下 正勝

1. 序

よく知られているように、任意のレンズ空間は S^3 内の trivial knot O の適当な Dehn Surgery によって構成することができる。すなわち trivial knot O の exterior である solid torus

$$V_1 = S^3 - N(O), \text{ ただし } N(O) \text{ は trivial knot } O \text{ の正則近傍,}$$

に、別に用意した solid torus $V_2 = D^2 \times S^1$ を境界部分で貼り合わせればよい。

貼り合わせる方法はいろいろあるが、同相写像

$$h : \partial V_2 \rightarrow \partial V_1$$

が1つ与えられれば3次元閉多様体 $M^3 = V_1 \cup_h V_2$ は一意に定まる。貼り合わせに用いるこの同相写像 h のことを名著 “Knots and Links” の著者 Dale Rolfsen は “ V_1 の framing” と呼んでいる。

貼り合わせは framing のホモトピー類（というか、ホモロジー類）によって完全に規制される。すなわち、 m を $V_2 = D^2 \times S^1$ の meridian（この m としては、自然な meridian $\{(x, *) \in \partial D^2 \times S^1 \mid * \in S^1 \text{ は定点}\}$ を考えておけばよい）とすると、 V_1 の2つの framing g, h に対して

$$M_g = V_1 \cup_g V_2 \text{ と } M_h = V_1 \cup_h V_2 \text{ が homeomorphic}$$

$$\Leftrightarrow g(m) \text{ と } h(m) \text{ が homotopic in } \partial V_1$$

$$\Leftrightarrow g(m) \text{ と } h(m) \text{ が homologous in } \partial V_1 \quad (\because \partial V_1 \text{ は torus だから})$$

が成り立つことが知られている。

trivial knot の exterior $V_1 = S^3 - N(O)$ もまた solid torus であるから、knot exterior という立場をしばし忘れて、この V_1 も $V_1 = D^2 \times S^1$ と書き表すことにしよう。 $\partial V_1 = \partial D^2 \times S^1$ 上の定点 (x_0, y_0) を1つ選び、loop $\lambda = \{(x_0, y) \in \partial V_1 = \partial D^2 \times S^1\}$ を ∂V_1 における longitude とし、loop $\mu = \{(x, y_0) \in \partial V_1 = \partial D^2 \times S^1\}$ を ∂V_1 における meridian として固定しておく。

任意の framing $h : \partial V_2 \rightarrow \partial V_1$ に対して、それから誘導される基本群の isomorphism

$$h_* : \pi_1(\partial V_2) \rightarrow \pi_1(\partial V_1)$$

を考えると、 $h_*(m) \in \pi_1(\partial V_1)$ は

$$h_*(m) = p\lambda + q\mu, \text{ ただし } p, q \text{ は互いに素な整数}$$

と書ける。このときに得られる多様体 $M^3 = V_1 \cup_h V_2$ が (p, q) 型のレンズ空間 $L(p, q)$ に他ならない。（この事実を “ $L(p, q)$ の定義” として出発する流儀もある。）

《注意》ここでの “ m ” は $V_2 = D^2 \times S^1$ の meridian “ m ” の homotopy class である。面倒なので、meridian とその homotopy class を安直に同じ記号 m で表した。また λ, μ についても loop とその homotopy class を同じ記号で表している。このような混同は今後も断りなしに行うことがある。

参考までに、レンズ空間の性質としてよく知られている事実を以下に列挙しておく。

- $L(0, 1) = S^2 \times S^1$, $L(1, q) = S^2$, $L(2, 1) = P^3$.
- $L(p, q) = L(p, -q) = L(-p, q) = L(-p, -q)$.
- $L(p, q) = L(p, q + kp)$. k は任意の整数.
- $L(p, q) = L(p, p - q)$.
- $qq' \equiv \pm 1 \pmod{p} \Rightarrow L(p, q) = L(p, q') \pmod{p}$
- $L(p, q) = L(p, q') \Leftrightarrow \pm q' = q^{\pm 1} \pmod{p}$. (Brody)
- $L(p, q) = L(p, q') \Leftrightarrow \exists m; \pm q'q \equiv m^2 \pmod{p}$. (J.H.C.Whitehead)

以前、石井氏と河野氏からアイデアをご教授いただき、連分数表示を利用して勝手な fibered solid torus の DS diagram を描く方法を箱根セミナー報告 [1; 山下] において示すことができた。その内容は後に谷口太聖氏によって、洗練された形で整備された。その内容は [3; 谷口・坪井・山下] のなかで報告されている。

さて、これらの DS-diagrams のなかから任意の 2 つを取り出してそれらを境界部分 (境界の多様体は torus) で貼り合わせると、何らかのレンズ空間の DS-diagram が作れる。

また、昨年の箱根セミナー報告 [2; 山下] において、fibered solid torus の LM 系について報告した。この LM 系の概念を利用すると、作ったレンズ空間の型を決定できる。そのことを報告するのが今回の報告書のおもな目的である。

2. Fibered Solid Torus と LM 系

まず、連分数の記号を以下のように定めることにする。

自然数 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ に対して

$$[a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n] = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}$$

と書く。また規約として、 $[\] = \frac{0}{1}$ と定めておく。

連分数は

$$[a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] = [a_1, \dots, a_{n-1}, a_n]$$

という性質を持っているから、任意の規約分数 $\frac{q}{p}$, $1 \leq q < p$, はその末尾を“1”とする連分数で表すことができる。

[定義] 規約分数 $\frac{q}{p}$, $1 \leq q < p$, に対して、その LM 数 $(\frac{q}{p}, \frac{b}{a}, \frac{d}{c})$ を以下のように定義す

る。

$$\frac{q}{p} = [a_1, \dots, a_{2n-1}, a_{2n}, 1] \text{ならば, } \frac{b}{a} = [a_1, \dots, a_{2n-1}, a_{2n}], \quad \frac{d}{c} = [a_1, \dots, a_{2n-1}],$$

$$\frac{q}{p} = [a_1, \dots, a_{2n}, a_{2n+1}, 1] \text{ならば, } \frac{b}{a} = [a_1, \dots, a_{2n}], \quad \frac{d}{c} = [a_1, \dots, a_{2n}, a_{2n+1}].$$

ただし, $\frac{1}{m+1} = [m, 1], m \geq 1$, の LM 数を

$$([m, 1], [], [m]) = \left(\frac{1}{m+1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{m} \right)$$

と定める。これは勝手に定めた“規約”にすぎない。

$\frac{q}{p}$ 型 fibered solid torus とは, 円柱 $D^2 \times I$ を “ $\frac{q}{p}$ ひねり” して上底と下底を貼り合わせたときのファイバー構造込みの solid torus $D^2 \times S^1$ のことである。円周 ∂D^2 を p 等分した点を $0, 1, 2, \dots, p-1$ とするとき, 下底の点 $(i, 0) \in D^2 \times \{0\}$ から上底の点 $(i+q, 1) \in D^2 \times \{1\}$ に向かう $\partial D^2 \times I$ 上の自然な(そして向きをついた)弧を F_i と表す。

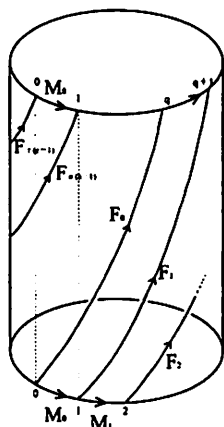


図 1 : Solid Torus の Fiber 構造

基点 $(0, 0)$ から出発した F_0 は torus $\partial D^2 \times S^1$ 上で F_q につながり, 次々に $F_i (0 < i < p)$ を渡り歩く。やがて一巡して出発点の $(0, 0)$ へ戻ってくる。この loop

$$F_0 F_{(1)} F_{(2)} \dots F_{(q-1)}, \quad \sigma(i) \equiv iq \pmod{p}, \quad 0 < \sigma(i) < p$$

が $\frac{q}{p}$ 型 fiber の正体である。この loop はその途中で, meridian 方向の円周 $\partial D^2 \times \{0\}$ 上での

$(0, 0)$ の隣の点 $(1, 0) \in \partial D^2 \times \{0\} \subset \partial D^2 \times S^1$ をただ 1 回通過する。そこでこの loop を $(1, 0)$ で切断して, その前半部分を F_0 , 後半部分を F_1 と表す。すなわち (oriented) path

$$F_0 F_{(1)} F_{(2)} \dots F_{(q-1)}, \quad \sigma(i) \equiv iq \pmod{p}, \quad 0 < \sigma(i) < p$$

のことを

$$F_{0\bullet} = F_{0, \sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(p-1)}$$

と表し, (oriented) path

$$F_1 F_{\tau(1)} F_{\tau(2)} \cdots F_{\tau(p-1)}, \quad \tau(j) \equiv 1 + iq \pmod{p}, \quad 1 \leq \tau(j) \leq p$$

のことを

$$F_{1\bullet} = F_{1, \tau(1), \tau(2), \dots, \tau(p-1)}$$

と表す。

fibered solid torus の DS diagram は一般には図 2 の形で上下対称の図形として表すことができる。いくつかの簡単な具体例は図 3 に示してある。

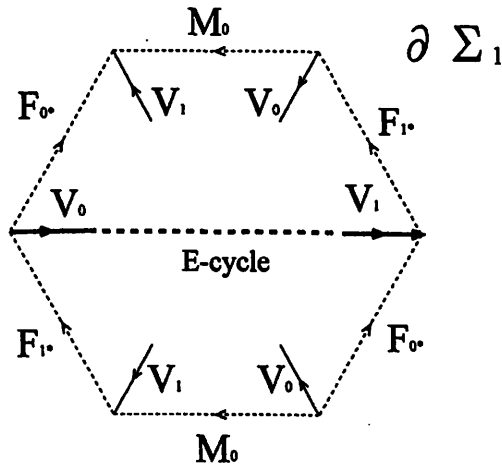


図 2 : Fibered Solid Torus の DS-diagram (模式図)

[定義] Σ を $\frac{q}{p}$ 型 solid torus の DS-diagram とするとき, triad

$$(\Sigma, \widetilde{F_{0\bullet}}, \widetilde{F_{1\bullet}}) = (\Sigma, F_{0\bullet} M_0^{-1}, M_0 F_{1\bullet})$$

のことを $\frac{q}{p}$ 型 solid torus の LM 系という。

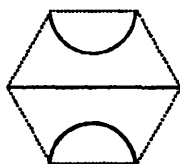
oriented loop $\widetilde{F_{0\bullet}} = F_{0\bullet} \cdot M_0^{-1}$, $\widetilde{F_{1\bullet}} = M_0 F_{1\bullet}$ の homology class on $\partial D^2 \times S^1$ をそれぞれ $\langle \widetilde{F_{0\bullet}} \rangle$, $\langle \widetilde{F_{1\bullet}} \rangle$ で表す。

$\partial D^2 \times S^1$ の meridian m , longitude をそれぞれ loop $(\partial D^2 \times \{0\}) / \sim \subset \partial D^2 \times S^1$, loop $\{0\} \times S^1 \sim \subset \partial D^2 \times S^1$ の homology class とすれば次の性質がある。

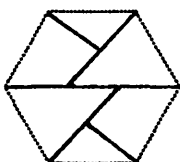
[Proposition]

$$\begin{aligned} aq \equiv 1 \pmod{p} \quad (\Leftrightarrow aq = bp + 1 \ (0 < a, b < p)) \quad \text{ならば} \quad \langle \widetilde{F_{0\bullet}} \rangle &= al + bm \\ 1 + cq \equiv 0 \pmod{p} \quad (\Leftrightarrow 1 + cq = dp \ (0 < c, d < p)) \quad \text{ならば} \quad \langle \widetilde{F_{1\bullet}} \rangle &= cl + dm \end{aligned}$$

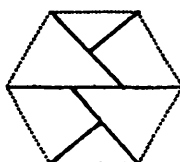
Fibered Solid Torus の DS-diagram



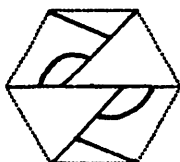
$$\frac{1}{2} = [2] = [1, 1]$$



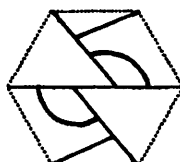
$$\frac{1}{3} = [3] = [2, 1]$$



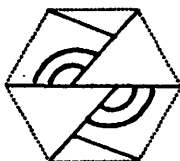
$$\frac{2}{3} = [1, 2] = [1, 1, 1]$$



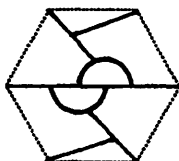
$$\frac{1}{4} = [4] = [3, 1]$$



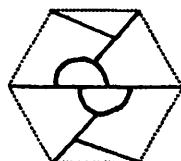
$$\frac{3}{4} = [1, 3] = [1, 2, 2]$$



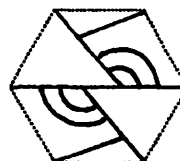
$$\frac{1}{5} = [5]$$



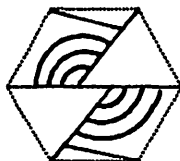
$$\frac{2}{5} = [2, 2]$$



$$\frac{3}{5} = [1, 1, 2]$$



$$\frac{4}{5} = [1, 4]$$



$$\frac{1}{6} = [6] = [5, 1]$$



$$\frac{3}{6} = [1, 5] = [1, 4, 1]$$

図 3 : Fibered Solid Torus の DS-diagram と連分数表示

[2; 山下] での主な結果は次の定理であった。

[定理] $(\Sigma, \widehat{F}_0, \widehat{F}_1)$ を $\frac{q}{p}$ 型 solid torus の LM 系, $\frac{q}{p}$ の LM 数が $(\frac{q}{p}, \frac{b}{a}, \frac{d}{c})$ であるならば,

$$\langle \widehat{F}_0 \rangle = al + bm, \quad \langle \widehat{F}_1 \rangle = cl + dm$$

である。

3. Dehn Surgery

$(\Sigma_1, \widehat{F}_0, \widehat{F}_1), (\Sigma_2, \widehat{G}_0, \widehat{G}_1)$ をそれぞれ $\frac{q}{p}$ 型 solid torus および $\frac{s}{r}$ 型 solid torus の LM

系とするとき, 以下のようにしてレンズ空間の DS-diagram $\Sigma = \frac{q}{p} \# \frac{s}{r}$ を構成する。

一般に, (closed) DS-diagram は 3-ball の表面に描かれる図式であるが, solid torus の DS-diagram $\Sigma, (i = 1, 2)$ は, 我々の作業のためには, 半球の表面に描かれている図式としておくほうが考えやすい。すなわち solid torus $D^2 \times S^1$ の内部の貼り合わせを指定する DS-diagram の部分 $\text{Int } \Sigma_i$ をすべて半球面側に表示し, 半球の平らな円板の内部には貼り合わせの情報になにも記入しないことで fibered solid torus の境界を表すことにする。その円板の縁である円周には 6 つの辺からなる loop で構成される情報 $\partial \Sigma_i$, すなわち

$$\partial \Sigma_1 = M_0 F_0^{-1} \cdot F_1^{-1} M_0^{-1} \cdot F_0 F_1, \quad \partial \Sigma_2 = M_0' G_1 \cdot G_0 M_0'^{-1} \cdot G_1^{-1} G_0^{-1}$$

を記述する。 $\partial \Sigma_i$ の貼り合わせ情報によって円板の縁を貼り合わせると, この円板から solid torus の境界であるトーラス $S^1 \times S^1$ が実現される。

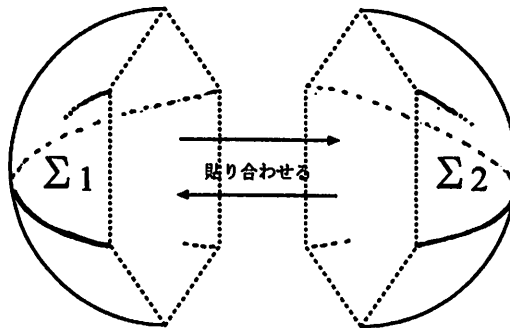


図 4: レンズ空間の DS-diagram $\Sigma = \frac{q}{p} \# \frac{s}{r}$ の作成

このような 2 つの半球状の DS-diagram

$$H_i = (\Sigma_i; \text{Int } \Sigma_i; \partial \Sigma_i), \quad i = 1, 2,$$

を, その円板同士をまるごと, 円周上の自然な identification map

$$h : \partial \Sigma_2 = M_0 G_1 \cdot G_0 M_0^{-1} \cdot G_1^{-1} G_0^{-1} \rightarrow \partial \Sigma_1 = M_0 F_0^{-1} \cdot F_1^{-1} M_0^{-1} \cdot F_0 F_1$$

とマッチするように、ベタッと貼り付けてやれば新たな(closed な、というか境界を持たない)DS-diagram $\Sigma = H_1 \cup H_2$ が得られる。このとき Σ_1 の E-cycle と Σ_2 の E-cycle (註: “E-cycle” とは言ってみたものの、この場合、その正体は両端が境界に触っている path であって、“ Σ_1 の E-cycle” は cycle にはなっていない) が自然につながって、 $\Sigma = H_1 \cup H_2$ の (本物の、かつ自然な) E-cycle になっている。この DS-diagram $\Sigma = H_1 \cup H_2$ に対応する閉多様体が求めるレンズ空間になっているはずである。以後、この Σ のことを

$$\Sigma = \frac{q}{p} \# \frac{s}{r}$$

と表すことにしよう。

DS-diagram は通常、A4 の紙 (とは限らないが…) などに描かれる。そこで上の操作を翻訳してみよう。まず、 $\frac{q}{p}$ 型 fibered solid torus の DS-diagram Σ_1 を台紙とするために、六角形の外側にあった solid torus の境界部分 $\partial \Sigma$ を紙面中央にある六角形の内部に置き換える。

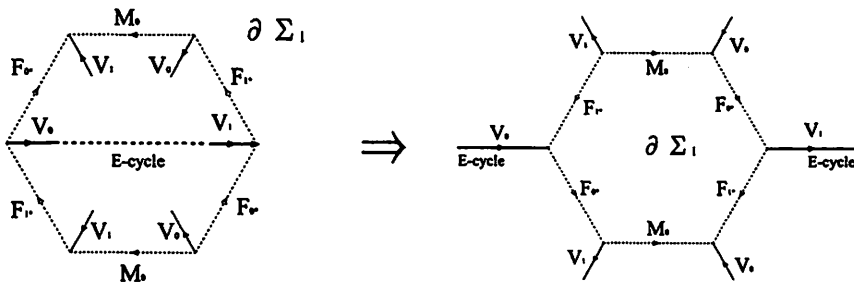


図 5 : 台紙としての DS-diagram 表示の作成

この台紙 Σ_1 の六角形の内部に DS-diagram Σ_2 の六角形本体をそのまま載っける。

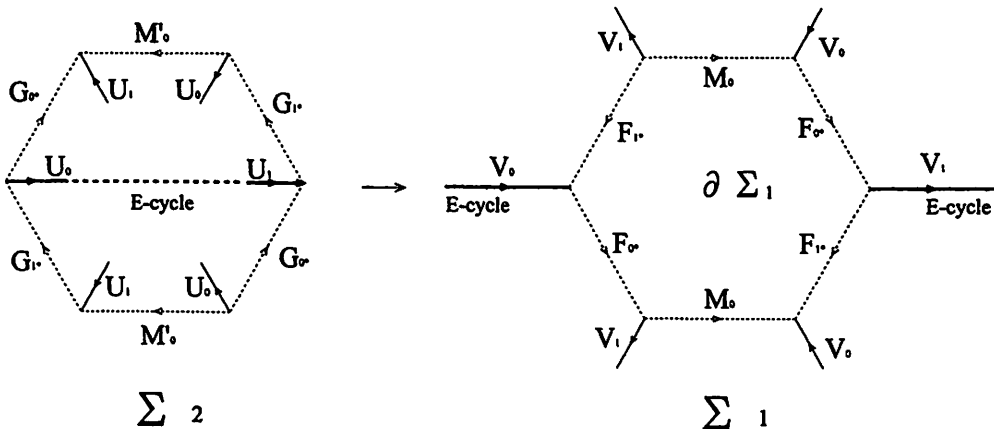


図 6 : E-cycle が繋がるようにして $\text{Int } \Sigma_2$ を台紙 $\partial \Sigma_1$ に搭載

このとき、E-cycle がつながるようにさえ気をつけてやれば、 Σ_2 の上下左右には気を配らなくとも framing は自然に合っているはずである。天地有用(?) というわけ。その後、この縫い筋マークの loop (= 点線部分のチャコ線) を消し、必要に応じてラベルをつけ直せば完成!

5. 実例 : [3] # [4] = L(5, 2)

上の手続きを確認するために、この節では [3] 型と [4] 型の fibered solid torus からレンズ空間の DS-diagram [3] # [4] を具体的に作ってみよう。

[3] # [4] = [4] # [3] なのでどちらでもかまわないのだが、ここでは [3] 型のほうを Σ_1 として台紙に採用してみる (図 7)。六角形の外部にある境界部分を六角形の内部に描けばよいのだから、[3]型 DSdiagram Σ_1 の中心 (= E-cycle 上の辺 X の中点) が無限遠点に移るように反転させてやればよい。実際には、六角形の周上に書き込まれている境界情報 (あるいは E-cycle) に配慮すればいいだけなので、図 7 の左図を上下逆さまにしてやって、まずその境界情報を右図の六角形の周上に写し取り、それを起点として、左図の六角形内部の辺のつながりを右図の六角形外部に写し取って描いてゆけばよい。

これは半球の後ろ側にあった平らな境界部分 $\partial \Sigma$ (すなわち図 7 左図の六角形の外側) が前面に出てきて、内部の DS 部分である $\text{Int } \Sigma$ が裏側の半球面 (すなわち図 7 右図の六角形の外側) に移ったものである。

図 7 では半球の横軸の回りに半球自身をぐるりと半回転してから $\partial \Sigma$ と $\text{Int } \Sigma$ の絵を写し取っている。あるいは別のやり方として、半球の縦軸の周りに半球自身をぐるりと半回転してからその絵を写し取っても、本質的に同等な DS-diagram の表示ができる。それは fibered solid torus の DS-diagram の絵柄とそれらについているラベルの対称性のおかげである。

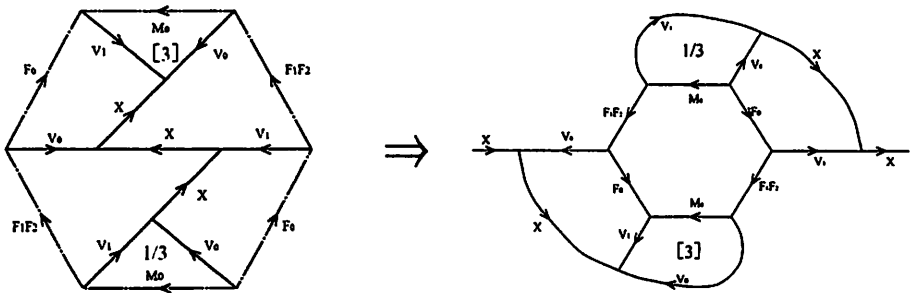


図 7 : [3] 型 DS-diagram の台紙化

この台紙 (図 8-2) の中央にある六角形のなかに [4] 型 DS diagram (図 8-1) をそのまま描き込んでやる。そして六角形の線を消せばレンズ空間の DS-diagram [3] # [4] ができる。

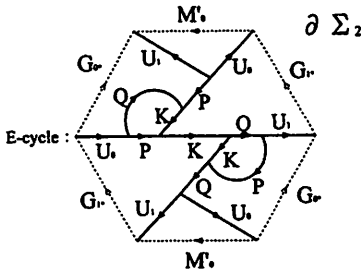


図 8-1 : [4] 型 solid torus の DS-diagram

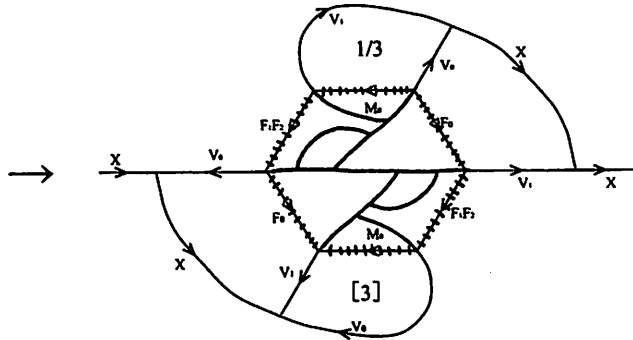


図 8-2 : 台紙 [3]

次に問題になるのはこの [3] # [4] が定めるレンズ空間 $L(p, q)$ の型 (p, q) を決定することである。

$(\Sigma_1, \overline{F_0}, \overline{F_1}), (\Sigma_2, \overline{G_0}, \overline{G_1})$ をそれぞれ [3] = $\frac{1}{3}$ 型 solid torus および [4] =

$\frac{1}{4}$ 型 solid torus の LM 系とする。

[3] = [2, 1] の LM 数は

$$([2, 1], [], [2]) = \left(\frac{1}{3}, \frac{0}{1}, \frac{1}{2}\right)$$

すなわち

$$a = 1, b = 0; c = 2, d = 1$$

である。したがって $\overline{F_0}, \overline{F_1}$ の homology class は

$$\langle \overline{F_0} \rangle = 1 \cdot l + 0 \cdot m$$

$$\langle \overline{F_1} \rangle = 2 \cdot l + 1 \cdot m$$

である。また、[4] = [3, 1] の LM 数は

$$([3, 1], [], [3]) = \left(\frac{1}{4}, \frac{0}{1}, \frac{1}{3}\right)$$

すなわち

$$a' = 1, b' = 0; c' = 3, d' = 1$$

である。したがって $\overline{G_0}, \overline{G_1}$ の homology class は framing $h: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1$ によって

$$h \cdot \langle \overline{G_0} \rangle = 1 \cdot \lambda + 0 \cdot \mu$$

$$h \cdot \langle \overline{G_1} \rangle = 3 \cdot \lambda + 1 \cdot \mu$$

に移る。ただし、 λ, μ はそれぞれ $\frac{1}{3}$ 型 solid torus の longitude, meridian である。

$\frac{1}{3}$ 型 solid torus の framing $h: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1$, such that

$$h(M_0'G_1 \cdot G_0M_0'^{-1} \cdot G_1^{-1}G_0^{-1}) = M_0F_0^{-1} \cdot F_1^{-1}M_0^{-1} \cdot F_0F_1$$

は

$$h(\widetilde{G_0 \bullet}) = h(G_0 M_0^{-1}) = F_1^{-1} M_0^{-1} = (M_0 F_1)^{-1} = \widetilde{F_1 \bullet}^{-1}$$

$$h(\widetilde{G_1 \bullet}) = h(M_0 G_1) = M_0 F_0^{-1} = (F_0 M_0^{-1})^{-1} = \widetilde{F_0 \bullet}^{-1}$$

を意味する。よって homology relation :

$$\langle \widetilde{F_1 \bullet} \rangle = h.(\langle \widetilde{G_0 \bullet} \rangle^{-1}) : 2 \cdot l + 1 \cdot m = -1 \cdot \lambda - 0 \cdot \mu$$

$$\langle \widetilde{F_0 \bullet} \rangle = h.(\langle \widetilde{G_1 \bullet} \rangle^{-1}) : 1 \cdot l + 0 \cdot m = -3 \cdot \lambda - 1 \cdot \mu$$

が得られる。これを m について解くと

$$m = -5\lambda - 2\mu.$$

したがって、このレンズ空間のタイプは $(|-5|, |-2|) = (5, 2)$ だとわかる。すなわち DS-diagram [3] # [4] が表す多様体は $L(5, 2)$ である。

図 8-2 の台紙 [3] に [4] 以外のものを乗せると別のレンズ空間が現れる。また、台紙として、[3] でなく、[2], [4], ... など、どれを採用してもかまわない。

ここでは参考までに、[2], [3], [4] を台紙として作られたレンズ空間の DS-diagram の一覧表の最初の 1 ページ部分を表 1 ~ 表 3 として次ページ以降に掲載しておく。

表の見方について、表 2 を使って簡単に説明する。

- ・上部にある一連の式はレンズ空間 [3] # [*] の型を決定するためのものである。
- ・[*] は下の表中 2 列目に、“連分数” という表題でリストアップされている。
- ・a, b, c, d は [*] の LM 数 $(\frac{q}{p}, \frac{b}{a}, \frac{d}{c})$ のなかに見いだすことができる。
- ・“ $m = (2c - a)\lambda + (2d - b)\mu$ ” とあるのは、[*]-DS の meridian の homology class m が framing homo. $h.$ で移った先 $h.(m)$ が

$$h.(m) = (2c - a)\lambda + (2d - b)\mu$$

と書ける、という情報である。ただし λ, μ は、台紙 [3]-DS の longitude class と meridian class である。これにより、レンズ空間 [3] # [*] の型が $(|2c - a|, |2d - b|)$ 、すなわち [3] # [*] = $L(|2c - a|, |2d - b|)$ である、と判定できる。

- ・表の 1 列目にある“分数”とあるのは連分数 [*] に対応する分数のことである。
- ・表の 3 列目にある“頂点数”というのは [*]-DS の内点の DS 頂点数である。
- ・表の最終列にある“DS 頂点数”というの DS-diagram [3] # [*] の DS 頂点数である。

これらの表を眺めていると、自明な事柄も含めていろいろなことが見えてくる。たとえば、 $S^2 \times S^1$ の DS-diagram は [3] # [*] など、各種の表の中にただ 1 回だけ現れてくる。その理由はたぶん、表の上部にある 2 元連立 1 次方程式の解の性質として説明がつかのんだろう。中学生に聞けば教えてもらえるのかもしれない。が、恥ずかしいので、未だに聞いていない。

一般には同じ $L(p, q)$ を表す異なった DS-diagram [3] # [*] が数多く排出されてくる。これも同じ理由によるのだろう。年老いて、考えることがますます苦手になってきた。

表1:[2]#[*]のパターンから作出されるレンズ空間

$$[2]:(c^*, d^*)=(1, 1), (a^*, b^*)=(1, 0)$$

$$1 \cdot 1 + 1 \cdot m = -a \lambda - b \mu$$

$$1 \cdot 1 + 0 \cdot m = -c \lambda - d \mu$$

$$\Rightarrow$$

$$m = (c-a)\lambda + (d-b)\mu$$

分数	連分数	頂点数	a	b	c	d	c-a	d-b	L(x, y)	備考	DS頂点
1/2	[2]	0	1	0	1	1	0	1	$S^2 \times S^1$		0
1/3	[3]	1	1	0	2	1	1	1	S^3		1
2/3	[1,2]	1	2	1	1	1	1	0	S^3		1
分数	連分数	頂点数	a	b	c	d	c-a	d-b	L(x, y)	備考	DS頂点
1/4	[4]	2	1	0	3	1	2	1	P^3		2
3/4	[1,3]	2	3	2	1	1	2	1	P^3		2
2/5	[2,2]	2	3	1	2	1	1	0	S^3		2
3/5	[1,1,2]	2	2	1	3	2	1	1	S^3		2
分数	連分数	頂点数	a	b	c	d	c-a	d-b	L(x, y)	備考	DS頂点
1/5	[5]	3	1	0	4	1	3	1	L(3, 1)		3
4/5	[1,4]	3	4	3	1	1	3	2	L(3, 2)	=L(3, 1)	3
2/7	[3,2]	3	4	1	3	1	1	0	S^3		3
3/7	[2,3]	3	5	2	2	1	3	1	L(3, 1)		3
4/7	[1,1,3]	3	2	1	5	3	3	2	L(3,2)	=L(3, 1)	3
5/7	[1,2,2]	3	3	2	4	3	1	1	S^3		3
3/8	[2,1,2]	3	3	1	5	2	2	1	P^3		3
5/8	[1,1,1,2]	3	5	3	3	2	2	1	P^3		3
分数	連分数	頂点数	a	b	c	d	c-a	d-b	L(x, y)	備考	DS頂点
1/6	[6]	4	1	0	5	1	4	1	L(4, 1)		4
5/6	[1,5]	4	5	4	1	1	4	3	L(4, 3)	=L(4, 1)	4
2/9	[4,2]	4	5	1	4	1	1	0	S^3		4
4/9	[2,4]	4	7	3	2	1	5	2	L(5, 2)		4
5/9	[1,1,4]	4	2	1	7	4	5	3	L(5, 3)	=L(5, 2)	4
7/9	[1,3,2]	4	4	3	5	4	1	1	S^3		4
3/10	[3,3]	4	7	2	3	1	4	1	L(4, 1)		4
7/10	[1,2,3]	4	3	2	7	5	4	3	L(4, 3)	=L(4, 1)	4
3/11	[3,1,2]	4	4	1	7	2	3	1	L(3, 1)		4
4/11	[2,1,3]	4	3	1	8	3	5	2	L(5, 2)		4
7/11	[1,1,1,3]	4	8	5	3	2	5	3	L(5,3)	=L(5, 2)	4
8/11	[1,2,1,2]	4	7	5	4	3	3	2	L(3,2)	=L(3, 1)	4
5/12	[2,2,2]	4	5	2	7	3	2	1	P^3		4
7/12	[1,1,2,2]	4	7	4	5	3	2	1	P^3		4
5/13	[2,1,1,2]	4	8	3	5	2	3	1	L(3, 1)		4

表2: [3]#[*]のパターンから作出されるレンズ空間

$$[3]:(c^*, d^*)=(2, 1), (a^*, b^*)=(1, 0)$$

$$2 \cdot l + 1 \cdot m = -a \lambda - b \mu$$

$$1 \cdot l + 0 \cdot m = -c \lambda - d \mu$$

$$\Rightarrow$$

$$m = (2c - a) \lambda + (2d - b) \mu$$

分数	連分数	a	b	c	d	2c-a	b-2d	L(x, y)	備考	DS頂点
1/2	[2]	1	0	1	1	1	2	S ³		1
分数	連分数	a	b	c	d	2c-a	b-2d	L(x, y)	備考	DS頂点
1/3	[3]	1	0	2	1	3	2	L(3, 2)	=L(3, 1)	2
2/3	[1,2]	2	1	1	1	0	1	S ² × S ¹		2
分数	連分数	a	b	c	d	2c-a	b-2d	L(x, y)	備考	DS頂点
1/4	[4]	1	0	3	1	5	2	L(5, 2)		3
3/4	[1,3]	3	2	1	1	1	0	S ³		3
2/5	[2,2]	3	1	2	1	1	1	S ³		3
3/5	[1,1,2]	2	1	3	2	4	3	L(4, 3)	=L(4, 1)	3
分数	連分数	a	b	c	d	2c-a	b-2d	L(x, y)	備考	DS頂点
1/5	[5]	1	0	4	1	7	2	L(7, 2)		4
4/5	[1,4]	4	3	1	1	2	1	P ³		4
2/7	[3,2]	4	1	3	1	2	1	P ³		4
3/7	[2,3]	5	2	2	1	1	0	S ³		4
4/7	[1,1,3]	2	1	5	3	8	5	L(8, 5)	=L(8, 3)	4
5/7	[1,2,2]	3	2	4	3	5	4	L(5, 4)	=L(5, 1)	4
3/8	[2,1,2]	3	1	5	2	7	3	L(7, 3)	=L(7, 2)	4
5/8	[1,1,1,2]	5	3	3	2	1	1	S ³		4
分数	連分数	a	b	c	d	2c-a	b-2d	L(x, y)	備考	DS頂点
1/6	[6]	1	0	5	1	9	2	L(9, 2)		5
5/6	[1,5]	5	4	1	1	3	2	L(3, 2)	=L(3, 1)	5
2/9	[4,2]	5	1	4	1	3	1	L(3, 1)		5
4/9	[2,4]	7	3	2	1	3	1	L(3, 1)		5
5/9	[1,1,4]	2	1	7	4	12	7	L(12, 7)	=L(12, 5)	5
7/9	[1,3,2]	4	3	5	4	6	5	L(6, 5)	=L(6, 1)	5
3/10	[3,3]	7	2	3	1	1	0	S ³		5
7/10	[1,2,3]	3	2	7	5	11	8	L(11, 8)	=L(11, 3)	5
3/11	[3,1,2]	4	1	7	2	10	3	L(10, 3)		5
4/11	[2,1,3]	3	1	8	3	13	5	L(13, 5)		5
7/11	[1,1,1,3]	8	5	3	2	2	1	P ³		5
8/11	[1,2,1,2]	7	5	4	3	1	1	S ³		5
5/12	[2,2,2]	5	2	7	3	9	4	L(9, 4)	=L(9, 2)	5
7/12	[1,1,2,2]	7	4	5	3	3	2	L(3, 2)	=L(3, 1)	5
5/13	[2,1,1,2]	8	3	5	2	2	1	P ³		5
8/13	[1,1,1,1,2]	5	3	8	5	11	7	L(11, 7)	=L(11, 4)	5

表3:[4]#[*]のパターンとして作出されるレンズ空間

$$[4]:(c^*, d^*)=(3, 1), (a^*, b^*)=(1, 0)$$

$$3 \cdot l + 1 \cdot m = -a \lambda - b \mu$$

$$1 \cdot l + 0 \cdot m = -c \lambda - d \mu$$

⇒

$$m = (3c-a)\lambda + (3d-b)\mu$$

分数	連分数	頂点数	a	b	c	d	3c-a	3d-b	L(x, y)	備考	DS頂点
1/2	[2]	0	1	0	1	1	2	3	p^3		2
分数	連分数	頂点数	a	b	c	d	3c-a	3d-b	L(x, y)	備考	DS頂点
1/3	[3]	1	1	0	2	1	5	3	L(5, 3)	=L(5, 2)	3
2/3	[1,2]	1	2	1	1	1	1	2	s^3		3
分数	連分数	頂点数	a	b	c	d	3c-a	3d-b	L(x, y)	備考	DS頂点
1/4	[4]	2	1	0	3	1	8	3	L(8, 3)		4
3/4	[1,3]	2	3	2	1	1	0	1	$s^2 \times s^1$		4
2/5	[2,2]	2	3	1	2	1	3	2	L(3, 2)	=L(3, 1)	4
3/5	[1,1,2]	2	2	1	3	2	7	5	L(7, 5)	=L(7, 2)	4
分数	連分数	頂点数	a	b	c	d	3c-a	3d-b	L(x, y)	備考	DS頂点
1/5	[5]	3	1	0	4	1	11	3	L(11, 3)		5
4/5	[1,4]	3	4	3	1	1	1	0	s^3		5
2/7	[3,2]	3	4	1	3	1	5	2	L(5, 2)		5
3/7	[2,3]	3	5	2	2	1	1	1	s^3		5
4/7	[1,1,3]	3	2	1	5	3	13	8	L(13, 8)	=L(13, 5)	5
5/7	[1,2,2]	3	3	2	4	3	9	7	L(9, 7)	=L(9, 2)	5
3/8	[2,1,2]	3	3	1	5	2	12	5	L(12, 5)		5
5/8	[1,1,1,2]	3	5	3	3	2	4	3	L(4, 3)	=L(4, 1)	5
分数	連分数	頂点数	a	b	c	d	3c-a	3d-b	L(x, y)	備考	DS頂点
1/6	[6]	4	1	0	5	1	14	3	L(14, 3)		6
5/6	[1,5]	4	5	4	1	1	2	1	p^3		6
2/9	[4,2]	4	5	1	4	1	7	2	L(7, 2)		6
4/9	[2,4]	4	7	3	2	1	1	0	s^3		6
5/9	[1,1,4]	4	2	1	7	4	19	11	L(19, 11)	=L(19, 8)	6
7/9	[1,3,2]	4	4	3	5	4	11	9	L(11, 9)	=L(11, 2)	6
3/10	[3,3]	4	7	2	3	1	2	1	p^3		6
7/10	[1,2,3]	4	3	2	7	5	18	13	L(18, 13)	=L(18, 5)	6
3/11	[3,1,2]	4	4	1	7	2	17	5	L(17, 5)		6
4/11	[2,1,3]	4	3	1	8	3	21	8	L()		6
7/11	[1,1,1,3]	4	8	5	3	2	1	1	s^3		6
8/11	[1,2,1,2]	4	7	5	4	3	5	4	L(5, 4)	=L(5, 1)	6
5/12	[2,2,2]	4	5	2	7	3	16	7	L(16, 7)		6
7/12	[1,1,2,2]	4	7	4	5	3	8	5	L(8, 5)	=L(8, 3)	6
5/13	[2,1,1,2]	4	8	3	5	2	7	3	L(7, 3)	=L(7, 2)	6

[2] # [*]の表の中にはどれだけの種類のレンズ空間 $L(p, q)$ が現れるのだろうか, と思って, 1つの学級 $L(p, q)$ につき [2] # [*] のなかから DS 生徒の代表 1名ずつを, (p, q) の辞書的順序で並べさせてみた (表 4-1 ~ 4-3)。なんとほとんどの代表が出席していた。この表に現れないで遅れてくるものも多かったが, どうやらすべての $L(p, q)$ について, その代表が [2] # [*] のなかにいるようだ。

どうして...? と考えているうち, そのわけが少しづつわかりかけてきた。

[2] # [*]の表 (表 1) で,

$$m = (c - a)\lambda + (d - b)\mu$$

という関係式があった。このとき $[2] \# [*] \in L(|c - a|, |d - b|)$ である。

問題は, $L(p, q), 0 < q < p$, にふさわしい [2] # [*] が見つかるか, ということである。すなわち

$$|c - a| = p, |d - b| = q \text{ あるいは } c - a = \pm p, \text{ かつ } d - b = \pm q$$

を満たす整数の組 $(a, b; c, d)$ が見つかるか? ということである。この関係はベクトルで

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm p \\ \pm q \end{pmatrix}, \text{ あるいは } \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pm p \\ \pm q \end{pmatrix}$$

と表すことができる。平面内に格子を導入すると, これらのベクトルは原点から格子点に向かうベクトル, すなわち格子点の位置ベクトルであるから, それらの和はまた格子点の位置ベクトルになっている。話を簡単にするために, p, q は互いに素な自然数として

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

を満たす組 $(a, b; c, d)$ について考えてみる。 a, b を互いに素な自然数の組とするとき, 上の関係式を満たす自然数の組 (c, d) は一意に定まる。チェックすべきは c, d として互いに素なものがとれるか? ということだが, たとえば

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix}$$

というように, p, q, a, b が互いに素な自然数であっても c, d は互いに素とは限らない。

(p, q) は与えられていて変更できないので, 目的を達するには $(a, b) = (7, 3)$ などと (a, b) を再調整することが必要であろう。組 (p, q) が具体的に提示されれば現実にはどうにか処理できそうだが, 一般的にどう記述したらよいかわからない。これもまた中学生に教えていただかなければなるまいか。

[3] # [*]の表 (表 2) においては,

$$m = (2c - a)\lambda + (2d - b)\mu$$

という関係式が得られるから

$$\begin{pmatrix} 2c \\ 2d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm p \\ \pm q \end{pmatrix}, \text{ あるいは } 2 \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pm p \\ \pm q \end{pmatrix}$$

を満たす整数の組 $(a, b; c, d)$, ただし $(a, b) = 1$ かつ $(c, d) = 1$, を探せばよい。たぶんこれも OK であろう。

表4-1: レンズ空間のDS-diagrams: [2] # [*] 型のリスト (その1/11)

[43]

分数	連分数 [*]	頂点数	a	b	c	d	c-a	d-b	[2] # [*]	備考	DS頂点
1/2	[2]	0	1	0	1	1	0	1	L(0, 1)	=S ² × S ¹	0
1/3	[3]	1	1	0	2	1	1	1	L(1, 1)	=S ³	1
1/4	[4]	2	1	0	3	1	2	1	L(2, 1)	=P ³	2
1/5	[5]	3	1	0	4	1	3	1	L(3, 1)		3
4/5	[1,4]	3	4	3	1	1	3	2	L(3, 2)	=L(3, 1)	3
1/6	[6]	4	1	0	5	1	4	1	L(4, 1)		4
5/6	[1,5]	4	5	4	1	1	4	3	L(4, 3)	=L(4, 1)	4
1/7	[7]	5	1	0	6	1	5	1	L(5, 1)		5
4/9	[2,4]	4	7	3	2	1	5	2	L(5, 2)		4
5/9	[1,1,4]	4	2	1	7	4	5	3	L(5, 3)	=L(5, 2)	4
6/7	[1,6]	5	6	5	1	1	5	4	L(5, 4)	=L(5, 1)	5
1/8	[8]	6	1	0	7	1	6	1	L(6, 1)		6
7/8	[1,7]	6	7	6	1	1	6	5	L(6, 5)	=L(6, 1)	6
1/9	[9]	7	1	0	8	1	7	1	L(7, 1)		7
4/13	[3,4]	5	10	3	3	1	7	2	L(7, 2)		5
5/11	[2,5]	5	9	4	2	1	7	3	L(7, 3)	=L(7, 2)	5
6/11	[1,1,5]	5	2	1	9	5	7	4	L(7, 4)	=L(7, 3)	5
9/13	[1,2,4]	5	3	2	10	7	7	5	L(7, 5)	=L(7, 2)	5
8/9	[1,8]	7	8	7	1	1	7	6	L(7, 6)	=L(7, 1)	7
1/10	[10]	8	1	0	9	1	8	1	L(8, 1)		8
5/14	[2,1,4]	5	3	1	11	4	8	3	L(8, 3)		5
9/14	[1,1,1,4]	5	11	7	3	2	8	5	L(8, 5)	=L(8, 3)	5
9/10	[1,9]	8	9	8	1	1	8	7	L(8, 7)	=L(8, 1)	8
1/11	[11]	9	1	0	10	1	9	1	L(9, 1)		9
4/17	[4,4]	6	13	3	4	1	9	2	L(9, 2)		6
6/13	[2,6]	6	11	5	2	1	9	4	L(9, 4)	=L(9, 2)	6
7/13	[1,1,6]	6	2	1	11	6	9	5	L(9, 5)	=L(9, 4)	6
13/17	[1,3,4]	6	4	3	13	10	9	7	L(9, 7)	=L(9, 2)	6
10/11	[1,10]	9	10	9	1	1	9	8	L(9, 8)	=L(9, 1)	9
1/12	[12]	10	1	0	11	1	10	1	L(10, 1)		10
5/16	[3,5]	6	13	4	3	1	10	3	L(10, 3)		6
11/16	[1,2,5]	6	3	2	13	9	10	7	L(10, 7)	=L(10, 3)	6
25/28	[1,8,3]	10	9	8	19	17	10	9	L(10, 9)	=L(10, 1)	10
4/21	[5,4]	7	16	3	5	1	11	2	L(11, 2)		7
5/19	[3,1,4]	6	4	1	15	4	11	3	L(11, 3)		6
6/17	[2,1,5]	6	3	1	14	5	11	4	L(11, 4)	=L(11, 3)	6
7/15	[2,7]	7	13	6	2	1	11	5	L(11, 5)	=L(11, 2)	7
8/15	[1,1,7]	7	2	1	13	7	11	6	L(11, 6)	=L(11, 5)	7
11/17	[1,1,1,5]	6	14	9	3	2	11	7	L(11, 7)	=L(11, 4)	6
14/19	[1,2,1,4]	6	15	11	4	3	11	8	L(11, 8)	=L(11, 3)	6
17/21	[1,4,4]	7	5	4	16	13	11	9	L(11, 9)	=L(11, 2)	7
9/22	[2,2,4]	6	5	2	17	7	12	5	L(12, 5)		6
13/22	[1,1,2,4]	6	17	10	5	3	12	7	L(12, 7)	=L(12, 5)	6
4/25	[6,4]	8	19	3	6	1	13	2	L(13, 2)		8
5/21	[4,5]	7	17	4	4	1	13	3	L(13, 3)		7
6/19	[3,6]	7	16	5	3	1	13	4	L(13, 4)	=L(13, 3)	7
9/23	[2,1,1,4]	6	18	7	5	2	13	5	L(13, 5)		6

表4-2: レンズ空間のDS-diagrams: [2]#[*]型のリスト (その2/11)

分数	連分数 [*]	頂点数	a	b	c	d	c-a	d-b	[2]#[*]	備考	DS頂点
8/17	[2,8]	8	15	7	2	1	13	6	L(13, 6)	=L(13, 2)	8
9/17	[1,1,8]	8	2	1	15	8	13	7	L(13, 7)	=L(13, 2)	8
14/23	[1,1,1,4]	6	5	3	18	11	13	8	L(13, 8)	=L(13, 5)	6
13/19	[1,2,6]	7	3	2	16	11	13	9	L(13, 9)	=L(13, 4)	7
16/21	[1,3,5]	7	4	3	17	13	13	10	L(13, 10)	=L(13, 3)	7
21/25	[1,5,4]	8	6	5	19	16	13	11	L(13, 11)	=L(13, 2)	8
5/24	[4,1,4]	7	5	1	19	4	14	3	L(14, 3)		7
7/20	[2,1,6]	7	3	1	17	6	14	5	L(14, 5)		7
13/20	[1,1,1,6]	7	17	11	3	2	14	9	L(14, 9)	=L(14, 5)	7
19/24	[1,3,1,4]	7	19	15	5	4	14	11	L(14, 11)	=L(14, 3)	7
4/29	[7,4]	9	22	3	7	1	15	2	L(15, 2)		9
6/23	[3,1,5]	7	4	1	19	5	15	4	L(15, 4)		7
9/19	[2,9]	9	17	8	2	1	15	7	L(15, 7)	=L(15, 2)	9
10/19	[1,1,9]	9	2	1	17	9	15	8	L(15, 8)	=L(15, 7)	9
17/23	[1,2,1,5]	7	19	14	4	3	15	11	L(15, 11)	=L(15, 4)	7
25/29	[1,6,4]	9	7	6	22	19	15	13	L(15, 13)	=L(15, 2)	9
5/26	[5,5]	8	21	4	5	1	16	3	L(16, 3)		8
7/22	[3,7]	8	19	6	3	1	16	5	L(16, 5)	=L(16, 3)	8
13/30	[2,3,4]	7	7	3	23	10	16	7	L(16, 7)		7
17/30	[1,1,3,4]	7	23	13	7	4	16	9	L(16, 9)	=L(16, 7)	7
15/22	[1,2,7]	8	3	2	19	13	16	11	L(16, 11)	=L(16, 5)	8
21/26	[1,4,5]	8	5	4	21	17	16	13	L(16, 13)	=L(16, 3)	8
4/33	[8,4]	10	25	3	8	1	17	2	L(17, 2)		10
5/29	[5,1,4]	8	6	1	23	4	17	3	L(17, 3)		8
6/25	[4,6]	8	21	5	4	1	17	4	L(17, 4)		8
9/31	[3,2,4]	7	7	2	24	7	17	5	L(17, 5)		7
8/23	[2,1,7]	8	3	1	20	7	17	6	L(17, 6)	=L(17, 3)	8
11/27	[2,2,5]	7	5	2	22	9	17	7	L(17, 7)		7
10/21	[2,10]	10	19	9	2	1	17	8	L(17, 8)	=L(17, 2)	10
11/21	[1,1,10]	10	2	1	19	10	17	9	L(17, 9)	=L(17, 8)	10
16/27	[1,1,2,5]	7	22	13	5	3	17	10	L(17, 10)	=L(17, 7)	7
15/23	[1,1,1,7]	8	20	13	3	2	17	11	L(17, 11)	=L(17, 6)	8
22/31	[1,2,2,4]	7	24	17	7	5	17	12	L(17, 12)	=L(17, 5)	7
19/25	[1,3,6]	8	4	3	21	16	17	13	L(17, 13)	=L(17, 4)	8
24/29	[1,4,1,4]	8	23	19	6	5	17	14	L(17, 14)	=L(17, 3)	8
29/33	[1,7,4]	10	8	7	25	22	17	15	L(17, 15)	=L(17, 2)	10
9/32	[3,1,1,4]	7	25	7	7	2	18	5	L(18, 5)		7
11/28	[2,1,1,5]	7	23	9	5	2	18	7	L(18, 7)		7
17/28	[1,1,1,1,5]	7	5	3	23	14	18	11	L(18, 11)	=L(18, 7)	7
23/32	[1,2,1,1,4]	7	7	5	25	18	18	13	L(18, 13)	=L(18, 5)	7
5/31	[6,5]	9	25	4	6	1	19	3	L(19, 3)		9
6/29	[4,1,5]	8	5	1	24	5	19	4	L(19, 4)		8
7/27	[3,1,6]	8	4	1	23	6	19	5	L(19, 5)	=L(19, 4)	8
8/25	[3,8]	9	22	7	3	1	19	6	L(19, 6)	=L(19, 3)	9
13/35	[2,1,2,4]	7	27	10	8	3	19	7	L(19, 7)		7
14/33	[2,2,1,4]	7	26	11	7	3	19	8	L(19, 8)		7
19/33	[1,1,2,1,4]	7	7	4	26	15	19	11	L(19, 11)	=L(19, 8)	7

表4-3: レンズ空間のDS-diagrams: [2]#[*]型のリスト (その3/11)

[45]

分数	連分数 [*]	頂点数	a	b	c	d	c-a	d-b	[2]#[*]	備考	DS頂点
22/35	[1,1,2,4]	7	8	5	27	17	19	12	L(19, 12)	=L(19, 7)	7
17/25	[1,2,8]	9	3	2	22	15	19	13	L(19, 13)	=L(19, 3)	9
20/27	[1,2,1,6]	8	23	17	4	3	19	14	L(19, 14)	=L(19, 5)	8
23/29	[1,3,1,5]	8	24	19	5	4	19	15	L(19, 15)	=L(19, 4)	8
26/31	[1,5,5]	9	6	5	25	21	19	16	L(19, 16)	=L(19, 3)	9
5/34	[6,1,4]	9	7	1	27	4	20	3	L(20, 3)		9
9/26	[2,1,8]	9	3	1	23	8	20	7	L(20, 7)	=L(20, 3)	9
17/38	[2,4,4]	8	9	4	29	13	20	9	L(20, 9)		8
21/38	[1,1,4,4]	8	29	16	9	5	20	11	L(20, 11)	=L(20, 9)	8
17/26	[1,1,1,8]	9	23	15	3	2	20	13	L(20, 13)	=L(20, 7)	9
29/34	[1,5,1,4]	9	27	23	7	6	20	17	L(20, 17)	=L(20, 3)	9
6/31	[5,6]	9	26	5	5	1	21	4	L(21, 4)		9
7/29	[4,7]	9	25	6	4	1	21	5	L(21, 5)	=L(21, 4)	9
14/37	[2,1,1,1,4]	7	8	3	29	11	21	8	L(21, 8)		7
23/37	[1,1,1,1,1,4]	7	29	18	8	5	21	13	L(21, 13)	=L(21, 8)	7
22/29	[1,3,7]	9	4	3	25	19	21	16	L(21, 16)	=L(21, 5)	9
25/31	[1,4,6]	9	5	4	26	21	21	17	L(21, 17)	=L(21, 4)	9
5/36	[7,5]	10	29	4	7	1	22	3	L(22, 3)		10
9/40	[4,2,4]	8	9	2	31	7	22	5	L(22, 5)		8
9/28	[3,9]	10	25	8	3	1	22	7	L(22, 7)	=L(22, 3)	10
13/32	[2,2,6]	8	5	2	27	11	22	9	L(22, 9)		8
19/32	[1,1,2,6]	8	27	16	5	3	22	13	L(22, 13)	=L(22, 9)	8
19/28	[1,2,9]	10	3	2	25	17	22	15	L(22, 15)	=L(22, 7)	10
31/40	[1,3,2,4]	8	31	24	9	7	22	17	L(22, 17)	=L(22, 5)	8
31/36	[1,6,5]	10	7	6	29	25	22	19	L(22, 19)	=L(22, 3)	10
5/39	[7,1,4]	10	8	1	31	4	23	3	L(23, 3)		10
6/35	[5,1,5]	9	6	1	29	5	23	4	L(23, 4)		9
9/41	[4,1,1,4]	8	32	7	9	2	23	5	L(23, 5)		8
8/31	[3,1,7]	9	4	1	27	7	23	6	L(23, 6)	=L(23, 4)	9
13/43	[3,3,4]	8	10	3	33	10	23	7	L(23, 7)		8
10/29	[2,1,9]	10	3	1	26	9	23	8	L(23, 8)	=L(23, 3)	10
13/33	[2,1,1,6]	8	28	11	5	2	23	9	L(23, 9)		8
16/37	[2,3,5]	8	7	3	30	13	23	10	L(23, 10)		8
21/37	[1,1,3,5]	8	30	17	7	4	23	13	L(23, 13)	=L(23, 10)	8
20/33	[1,1,1,1,6]	8	5	3	28	17	23	14	L(23, 14)	=L(23, 9)	8
19/29	[1,1,1,9]	10	26	17	3	2	23	15	L(23, 15)	=L(23, 8)	10
30/43	[1,2,3,4]	8	33	23	10	7	23	16	L(23, 16)	=L(23, 7)	8
23/31	[1,2,1,7]	9	27	20	4	3	23	17	L(23, 17)	=L(23, 6)	9
32/41	[1,3,1,1,4]	8	9	7	32	25	23	18	L(23, 18)	=L(23, 5)	8
29/35	[1,4,1,5]	9	29	24	6	5	23	19	L(23, 19)	=L(23, 4)	9
34/39	[1,6,1,4]	10	31	27	8	7	23	20	L(23, 20)	=L(23, 3)	10
7/34	[4,1,6]	9	5	1	29	6	24	5	L(24, 5)		9
11/38	[3,2,5]	8	7	2	31	9	24	7	L(24, 7)		8
21/46	[2,5,4]	9	11	5	35	16	24	11	L(24, 11)		9
25/46	[1,1,5,4]	9	35	19	11	6	24	13	L(24, 13)	=L(24, 11)	9
27/38	[1,2,2,5]	8	31	22	7	5	24	17	L(24, 17)	=L(24, 7)	8
27/34	[1,3,1,6]	9	29	23	5	4	24	19	L(24, 19)	=L(24, 5)	9

[参考文献]

- [1] 山下正勝, Fibered Solid Torus の DS-diagram, 箱根セミナ記録 17(2001), 全 23 ページ.
- [2] 山下正勝, Solid Torus の LM 系, 箱根セミナ記録 26(2010), 17-28.
- [3] Taniguchi, Tsuboi, Yamashita, Systematic singular triangulation of all Seifert manifolds, Tokyo J.Math., 28(2005), 539-561