HAKONE SEMINAR 26(2010)17-28.

Solid Torus の LM系

山 下　正 勝　（東洋大学 理工学部）

1. Solid Torus の LM系

単位円板 D^2 内の各点 $x \in D^2$ を極座標で $x=(r,\ \theta)$ と表すことにしよう。また，D^2 の中心(すなわち $r=0$ のとき)のことを $\vec{0}$ と書き表すことにする。

円柱 $D^2 \times I$ の上底 $D^2 \times \{1\}$ と下底 $D^2 \times \{0\}$ とを D^2 上の identity map で貼り合わせて solid torus $D^2 \times S^1$ を作る。すなわち $D^2 \times S^1 = D^2 \times I / \sim$, $(x, 1) \sim (x, 0))$ である。

solid torus $D^2 \times S^1$ の表面上にある円周

$$M = \partial D^2 \times \{0\} = \{(x,\ 0) \mid x=(1,\ \theta) \in \partial D^2 \subset D^2,\ 0 \in S^1\}$$

には，媒介変数 $\theta : 0 \to 2\pi$ が増加する方向を＋の向きとする自然な向きを入れて，solid torus $D^2 \times S^1$ の **meridean curve**（の代表）として指定しておく。

そしてこの円周 M 上の k 番目 $(k=0, 1, 2, \cdots, p-1)$ の p 等分点

$$\left(\left(1,\ \frac{2k\pi}{p}\right), 0\right) = \left(\left(1,\ \frac{2k\pi}{p}\right), 1\right), \quad k=0, 1, 2, \cdots,\ p-1$$

のことを，(簡単のために) しばしば数字の“k”と略記する。またこのとき，円板 $D^2 \times \{0\}$ $(\subset D^2 \times S^1)$ の中心 $\{\vec{0}\} \times \{0\}$ のことを“∞”または“v”と略記することがある。

頂点 k から頂点 $k+1$ に向かう有向弧 $\subset \partial D^2 \times \{0\} \subset D^2 \times S^1$ を M_k と表す。oriented loop $M = M_0 M_1 \cdots M_{p-1}$ の homology class on $\partial D^2 \times S^1$ を m と表す。

oriented loop $L=(1,\ 0) \times I / \sim\ \subset D^2 \times S^1$ を $D^2 \times S^1$ の **longitude curve**（の代表）として指定する。ただし，媒介変数 $t \in I$ の増大する方向を正の向きとしておく。この L の homology class on $\partial D^2 \times S^1$ を l と表す。

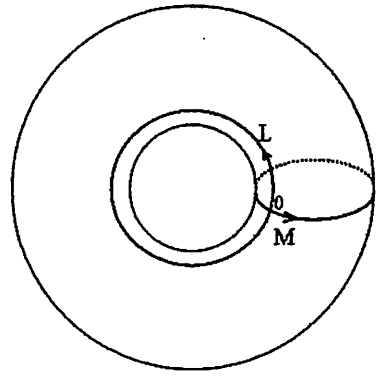


図1：$D^2 \times S^1$ の meridean M と longitude L

以下断らない限り，$p, q\ (1 \leqq q < p)$は互いに素な自然数とする。

ソリッドトーラスの表面上にあって，点kから点$k+q$ (mod. p)に向かう oriented arc

$$\{(x, t) \in \partial\, D^2 \times I / \sim \mid x = \left(1,\ \frac{2(k+tq)\pi}{p}\right),\ 0 \leqq t \leqq 1\}$$

のことをF_kまたは$F_k\left(\frac{q}{p}\right)$と表す。

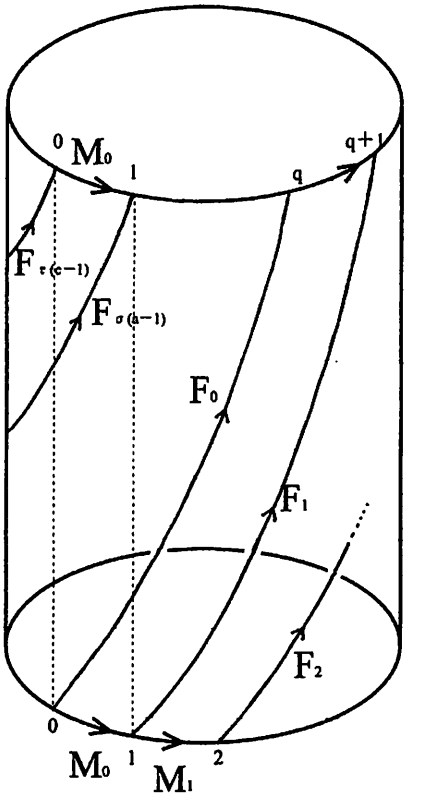


図2：F_0，F_1，… の図

oriented loop $M = M_0M_1 \cdots M_{p-1}$上の$p$個の点$\{\ kq \mid k = 0, \cdots, p-1\}$は，（$(p, q) = 1$だから，$p$を法とすれば）集合としては

$$\{0, q, 2q, 3q, \cdots, (p-1)q \mid (\mathrm{mod.}\ p)\} = \{0, 1, 2, 3, \cdots, p-1\}$$

となるので，

$$aq \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p) \quad \text{となる自然数}\ a\ (1 \leqq a \leqq p-1),$$

および

$$1 + cq \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p) \quad \text{となる自然数}\ c\ (1 \leqq c \leqq p-1),$$

がそれぞれただ一つ存在する。

そこで点 0 から点 $1 = \sigma(a)$ に向かう (oriented) path

$$F_0 F_{\sigma(1)} F_{\sigma(2)} \cdots F_{\sigma(a-1)}, \quad \text{ただし} \quad \sigma(i) \equiv iq \pmod p, \quad 0 \leqq \sigma(i) \leqq p-1$$

のことを $F_{0,\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(a-1)}$，または単に $F_{0\cdot}$ と書く。

同様に，点 1 から点 $0 = \tau(c)$ に向かう (oriented) path

$$F_1 F_{\tau(1)} F_{\tau(2)} \cdots F_{\tau(c-1)}, \quad \text{ただし} \quad \tau(j) \equiv 1 + jq \pmod p, \quad 0 \leqq \tau(j) \leqq p-1$$

のことを $F_{1,\tau(1),\tau(2),\cdots,\tau(c-1)}$，または単に $F_{1\cdot}$ と書く。

定義 triad ($D^2 \times S^1$, $F_{0\cdot}$, $F_{1\cdot}$) を $\frac{q}{p}$**型の (Fibered) solid torus** という。

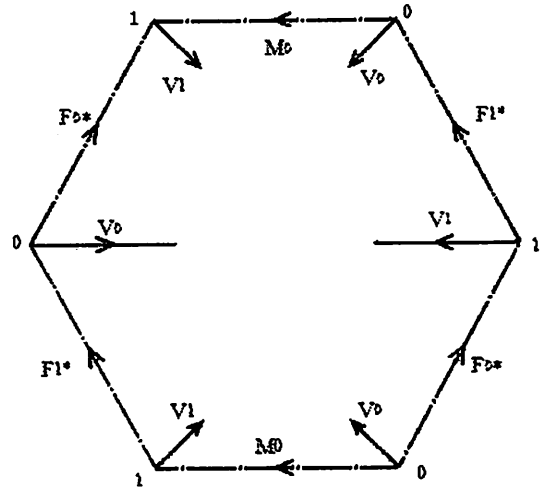


図3 : Fibered Solid Torus ($D^2 \times S^1$, $F_{0\cdot}$, $F_{1\cdot}$) の DS-diagram の境界周辺の図

[定義] oriented loop : $\widetilde{F_{0\cdot}} = F_{0\cdot} M_0^{-1}$, $\widetilde{F_{1\cdot}} = M_0 F_{1\cdot}$ の homology class on $\partial D^2 \times S^1$ をそれぞれ $\langle \widetilde{F_{0\cdot}} \rangle$, $\langle \widetilde{F_{1\cdot}} \rangle$ と表す。対 $(\langle \widetilde{F_{0\cdot}} \rangle, \langle \widetilde{F_{1\cdot}} \rangle) = (al + bm, cl + dm)$ を $\frac{q}{p}$**型 solid torus の LM 系**という。またこのとき，3 対 $(\frac{q}{p}, \frac{b}{a}, \frac{d}{c})$ を $\frac{q}{p}$**型 solid torus の LM 数**という。

$\frac{q}{p}$型 solid torus に対して，以下のことが成り立つ。

[Proposition]

$aq \equiv 1 \pmod p$ すなわち $aq = bp + 1$ $(0 \leqq a, b < p)$ ならば $\langle \widetilde{F_{0\cdot}} \rangle = al + bm$

$1 + cq \equiv 0 \pmod p$ すなわち $1 + cq = dp$ $(0 \leqq c, d < p)$ ならば $\langle \widetilde{F_{1\cdot}} \rangle = cl + dm$

2. 連 分 数

定義　互いに素な自然数 p, $q\,(q<p)$ に対して，自然数 a, b, c, d が

$$aq = bp + 1\ (0 \leqq a, b < p)\ ;\ 1 + cq = dp\ (0 \leqq c, d < p)$$

を満たすならば，3 対 $(\frac{q}{p},\ \frac{b}{a},\ \frac{d}{c})$ を **LM 数**と称することにする。

LM 数は純粋に整数の問題である。その関係を記述するのには，分数の連分数表示が便利である。

記号

自然数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ に対して

$$[a_0\,;\,a_1, a_2, \cdots, a_{n-1},\ a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{\cdots}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

と書くことにする。整数部分の a_0 をセミコロンで切り分けているところが通例の記法とは異なっている。

$a_0 = 0$ のときは，セミコロンまでの部分 “a_0 ;” を省略して，$[a_1,\ a_2,\ \cdots, a_{n-1},\ a_n]$ と書くことにする。すなわち

$$[a_1, a_2, \cdots, a_{n-1},\ a_n] = [0\,;\,a_1, a_2, \cdots, a_{n-1},\ a_n]$$

連分数については以下の星印のような性質がある。

☆　$[a_1, \cdots,\ a_n + 1] = [a_1, \cdots,\ a_n, 1]$

☆　$[b, a_1, \cdots,\ a_n] = \dfrac{1}{b + [a_1,\ \cdots,\ a_n]}$

☆　$[1 + b, a_1, \cdots,\ a_n] + [1, b, a_1, a_2, \cdots,\ a_n] = 1$

☆　$0 < [a_1, \cdots,\ a_n] < 1$ であり，さらに

$$a_1 \geqq 2 \Rightarrow 0 < [a_1,\ a_2, \cdots,\ a_n] < \frac{1}{2}$$

$$a_1 = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < [1,\ a_2, \cdots,\ a_n] < 1$$

3. $[b, a_1, \ldots, a_k, 1]$型のLM数

分数$\frac{q}{p}$ $(0 < q < p)$ は連分数で $[a_1, \ldots, a_k, 1]$ の形に表示することができる。

まず，以下の補助定理を示す。

[補助定理]

(1) $([a_1, \cdots, a_{k-1}, a_k, 1], [a_1, \cdots, a_{k-1}, a_k], [a_1, \cdots, a_{k-1}])$ がLM数

$\Rightarrow$

$([b, a_1, \cdots, a_{k-1}, a_k, 1], [b, a_1, \cdots, a_{k-1}], [b, a_1, \cdots, a_{k-1}, a_k])$ はLM数

(2) $([a_1, \cdots, a_{k-1}, a_k, 1], [a_1, \cdots, a_{k-1}], [a_1, \cdots, a_{k-1}, a_k])$ がLM数

$\Rightarrow$

$([b, a_1, \cdots, a_{k-1}, a_k, 1], [b, a_1, \cdots, a_{k-1}, a_k], [b, a_1, \cdots, a_{k-1}])$ はLM数

((1)の証明)：

$$([a_1, \cdots, a_{k-1}, a_k, 1], [a_1, \cdots, a_{k-1}, a_k], [a_1, \cdots, a_{k-1}]) = (\frac{q}{p}, \frac{t}{s}, \frac{v}{u}),$$

ただし$(p, q) = 1$，$(t, s) = 1$，$(u, v) = 1$ とする。これがLM数であるから

$$sq = tp + 1, \quad 1 + uq = vp$$

が成り立つ。さて，

$$([b, a_1, \cdots, a_{k-1}, a_k, 1], [b, a_1, \cdots, a_{k-1}], [b, a_1, \cdots, a_{k-1}, a_k]) = (\frac{Q}{P}, \frac{T}{S}, \frac{V}{U})$$

とおく。

$$\frac{Q}{P} = [b, a_1, \cdots, a_{k-1}, a_k, 1] = \frac{1}{b + [a_1, \cdots, a_{k-1}, a_k, 1]} = \frac{1}{b + \frac{q}{p}} = \frac{p}{bp + q}$$

$$\therefore P = bp + q, \quad Q = p, \quad (P, Q) = 1$$

$$\frac{T}{S} = [b, a_1, \cdots, a_{k-1}] = \frac{1}{b + [a_1, \cdots, a_{k-1}]} = \frac{1}{b + \frac{v}{u}} = \frac{u}{bu + v}$$

$$\therefore S = bu + v, \quad T = u, \quad (S, T) = 1$$

$$\frac{V}{U} = [b, a_1, \cdots, a_{k-1}, a_k] = \frac{1}{b + [a_1, \cdots, a_{k-1}, a_k]} = \frac{1}{b + \frac{t}{s}} = \frac{s}{bs + t}$$

$$\therefore U = bs + t, \quad V = s, \quad (U, V) = 1$$

したがって

$SQ - TP = (bu + v)p - u(bp + q) = vp - uq = 1 \qquad \therefore \quad SQ = TP + 1$

$VP - UQ = s \cdot (bp + q) - (bs + t) \cdot p = sq - tp = 1 \qquad \therefore \quad 1 + UQ = VP$

すなわち　$([b, a_1, \cdots, a_{k-1}, a_k, 1], [b, a_1, \cdots, a_{k-1}], [b, a_1, \cdots, a_{k-1}, a_k])$ はLM系.　◆

((2)の証明)：

$$([a_1, \cdots, a_{k-1}, a_k, 1], [a_1, \cdots, a_{k-1}], [a_1, \cdots, a_{k-1}, a_k]) = (\frac{q}{p}, \frac{t}{s}, \frac{v}{u})$$

とする。ただし $(p, q) = 1$, $(t, s) = 1$, $(u, v) = 1$. これがLM数であるから

$$sq = tp + 1, \quad 1 + uq = vp$$

が成り立つ。さて,

$$([b, a_1, \cdots, a_{k-1}, a_k, 1], [b, a_1, \cdots, a_{k-1}, a_k], [b, a_1, \cdots, a_{k-1}]) = (\frac{Q}{P}, \frac{T}{S}, \frac{V}{U})$$

とする。

$$\frac{Q}{P} = [b, a_1, \cdots, a_{k-1}, a_k, 1] = \frac{1}{b+[a_1, \cdots, a_{k-1}, a_k, 1]} = \frac{1}{b+\frac{q}{p}} = \frac{p}{bp+q}$$

$$\therefore P = bp + q, \quad Q = p, \quad (P, Q) = 1$$

$$\frac{T}{S} = [b, a_1, \cdots, a_{k-1}, a_k] = \frac{1}{b+[a_1, \cdots, a_{k-1}, a_k]} = \frac{1}{b+\frac{v}{u}} = \frac{u}{bu+v}$$

$$\therefore S = bu + v, \quad T = u, \quad (S, T) = 1$$

$$\frac{V}{U} = [b, a_1, \cdots, a_{k-1}] = \frac{1}{b+[a_1, \cdots, a_{k-1}]} = \frac{1}{b+\frac{t}{s}} = \frac{s}{bs+t}$$

$$\therefore U = bs + t, \quad V = s, \quad (U, V) = 1$$

したがって

$SQ - TP = (bu + v)p - u(bp + q) = vp - uq = 1 \qquad \therefore \quad SQ = TP + 1$

$VP - UQ = s \cdot (bp + q) - (bs + t) \cdot p = sq - tp = 1 \qquad \therefore \quad 1 + UQ = VP$

すなわち　$([b, a_1, \cdots, a_{k-1}, a_k, 1], [b, a_1, \cdots, a_{k-1}], [b, a_1, \cdots, a_{k-1}, a_k])$ はLM系.　◆

[定理]

(1)　$([a_1, 1], [], [a_1])$ はLM数である。ただし, $[] = \frac{0}{1}$ と約束する。

(2)　$([a_1, a_2, 1], [a_1, a_2], [a_1])$ はLM数である。

(3)　$([a_1, a_2, a_3, 1], [a_1, a_2], [a_1, a_2, a_3])$ はLM数である。

(2n)　$([a_1, \cdots, a_{2n-1}, a_{2n}, 1], [a_1, \cdots, a_{2n-1}, a_{2n}], [a_1, \cdots, a_{2n-1}])$ はLM数.

(2n + 1)　$([a_1, \cdots, a_{2n}, a_{2n+1}, 1], [a_1, \cdots, a_{2n}], [a_1, \cdots, a_{2n}, a_{2n+1}])$ はLM数.

(証明)

(1)の場合：$([a_1, 1], [], [a_1]) = (\frac{q}{p}, \frac{b}{a}, \frac{d}{c})$ とおけば, $(\frac{q}{p}, \frac{b}{a}, \frac{d}{c}) = (\frac{1}{a_1+1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{a_1})$.

したがって, $p = a_1 + 1$, $q = 1$; $a = 1$, $b = 0$; $c = a_1$, $d = 1$.

$aq = 1$; $bp + 1 = 1$.　　$\therefore \quad aq = bp + 1$

$$1+cq=1+a_1\,;\ dp=a_1+1. \qquad \therefore\ 1+cq=dp$$

よって　$([a_1, 1],\ [],\ [a_1])$はLM数である。◆

(2)の場合：$([a_1, a_2, 1],\ [a_1, a_2],\ [a_1]) = \left(\frac{a_2+1}{a_1(a_2+1)+1},\ \frac{a_2}{a_1a_2+1},\ \frac{1}{a_1}\right) = \left(\frac{q}{p}, \frac{b}{a}, \frac{d}{c}\right)$

したがって，

$$p=a_1(a_2+1)+1,\ q=a_2+1\,;\ a=a_1a_2+1,\ b=a_2\,;\ c=a_1,\ d=1.$$

$$aq=(a_1a_2+1)(a_2+1)\,;\ bp+1=a_2\{a_1(a_2+1)+1\}+1. \qquad \therefore\ aq=bp+1$$

$$1+cq=1+a_1(a_2+1)\,;\ dp=a_1(a_2+1)+1. \qquad \therefore\ 1+cq=dp$$

よって　$([a_1, a_2, 1],\ [a_1, a_2],\ [a_1])$ はLM数である。◆

(3)の場合：$([a_1,\ a_2,\ a_3, 1],\ [a_1,\ a_2],\ [a_1,\ a_2,\ a_3])$がLM数であることを示したい。
すでに(2)により，$([a_2, a_3, 1],\ [a_2, a_3],\ [a_2])$ はLM数であることが分かっている。
また，補助定理の(1)の $k=2$ により，
$([a_2, a_3, 1],\ [a_2, a_3],\ [a_2])$ がLM数ならば$([b,\ a_2, a_3, 1],\ [b,\ a_2],\ [b,\ a_2, a_3])$ もLM数である。よって $b=a_1$ の場合の$([a_1,\ a_2,\ a_3, 1],\ [a_1,\ a_2],\ [a_1,\ a_2,\ a_3])$もLM数である。◆

以上の(2)，(3)はそれぞれ$(2n)$，$(2n+1)$の $n=1$ における結果に他ならない。そこでこれらを数学的帰納法の出発点とする。

《$k=2n$》帰納法の仮定により，

$$([a_2, \cdots, a_{2n-1},\ a_{2n}, 1],\ [a_2, \cdots, a_{2n-1}],\ [a_2, \cdots, a_{2n-1}, a_{2n}])$$

はLM数である。したがって，定理1の(2)により，

$$([a_1, a_2, \cdots, a_{2n-1},\ a_{2n}, 1],\ [a_1, a_2, \cdots, a_{2n-1}],\ [a_1, a_2, \cdots, a_{2n-1}, a_{2n}])$$

はLM数である。

《$k=2n+1$》帰納法の仮定により，

$$([a_2, \cdots, a_{2n},\ a_{2n+1}, 1],\ [a_2, \cdots, a_{2n}],\ [a_2, \cdots, a_{2n},\ a_{2n+1}])$$

はLM数である。したがって，定理1の(1)により，

$$([a_1, a_2, \cdots, a_{2n-1},\ a_{2n}, 1],\ [a_1, a_2, \cdots, a_{2n},\ a_{2n+1}],\ [a_1, a_2, \cdots, a_{2n}])$$

はLM数である。◆

4. $\frac{1}{2}$型ソリッドトーラスのLM系

$\frac{1}{2}$型の fibered solid torus の DS-diagram は一般の$\frac{q}{p}$型の場合とはパターンが少々異なっている。ここではまず，$\frac{1}{2}$型ソリッドトーラスの DS-diagram の形や LM データについて記述しておこう。DS-diagram は図4の中図から無駄な曲線 M_1 を取り除けば得られる。

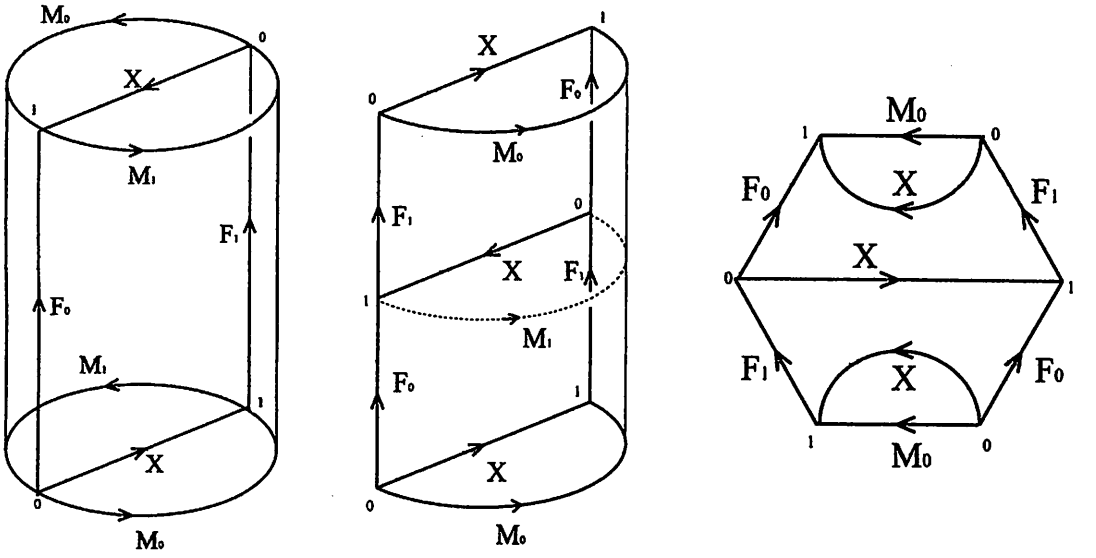


図4：$\frac{1}{2}$型 solid torus の LM データの読み取り元（左図・中図）と DS-diagram（右図）

$\frac{1}{2}$を連分数で表示すると[2]あるいは[1, 1]である。また，上の図4から以下の情報が読み取れる。

$\langle F_{0*} \rangle = 1l + 0m \iff \frac{0}{1} = [\,]$　（$\frac{0}{1}$を“[]”という記号で書く約束にしておく。）

$\langle F_{1*} \rangle = 1l + 1m \iff \frac{1}{1} = [1]$

したがって　$\frac{1}{2}$型の fibered solid torus の LM 数は（$\frac{1}{2}$, $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{1}$），あるいは連分数表示で

$$([2],\ [\,],\ [1]) = ([1, 1],\ [\,],\ [1])$$

と表すことができる。

5. $\frac{1}{3}$型＆$\frac{2}{3}$型のソリッドトーラスのLM系

ここでは$\frac{1}{3}$型および$\frac{2}{3}$型のソリッドトーラスの LM 系について見てみよう。以下の記事に現れる図などは，見比べやすいように，$\frac{1}{3}$型を左に，$\frac{2}{3}$型を右に配置して，左右に並べた形で示してある。

まず，円柱 $D^2 \times I$ を背骨 X まで切り込むための準備として，F_i の捩れが（見かけ上）ま

っすぐに見えるように直しておく（図 5)。

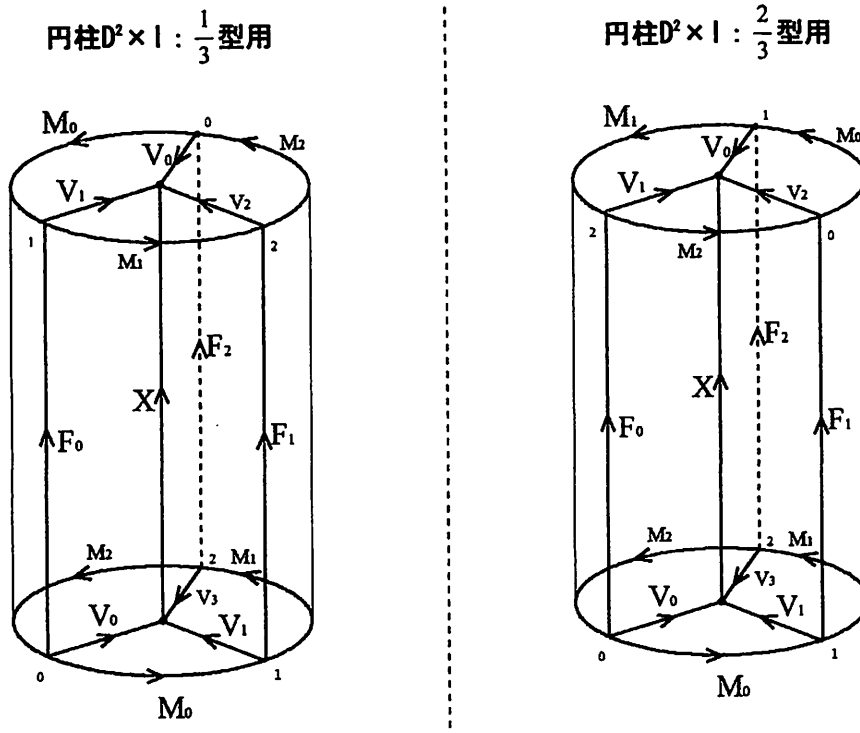


図5：円柱 $D^2 \times I$ の3分割

これを切り込んで三段に積み上げれば$\pm\frac{1}{3}$型 $D^2 \times S^1$ の多面体表示(図 6)が得られる。これは DS-diagram ではないが，無駄な曲線 V_2 と M_1, M_2 を除去すれば，自然に$\pm\frac{1}{3}$型 $D^2 \times S^1$ の DS-diagram が得られる(図7・図8・図9)。

$\frac{1}{3}$型 Solid Torus $D^2 \times S^1$のLMデータ

$$\frac{1}{3} = [3] = [2,1]$$

LM 数：$([2,1],[],[2]) = (\frac{1}{3},\ \frac{0}{1},\ \frac{1}{2})$

$$[] = \frac{0}{1} \iff \langle F_{0*} \rangle = 1l + 0m$$

$$[2] = \frac{1}{2} \iff \langle F_{1*} \rangle = 2l + 1m$$

$\frac{2}{3}$型 Solid Torus $D^2 \times S^1$のLMデータ

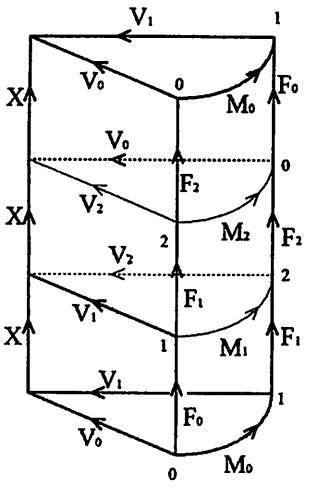
$$\frac{2}{3} = [1,2] = [1,1,1]$$

LM 数：$([1,1,1],[1,1],[1]) = (\frac{2}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{1})$

$$[1,1] = \frac{1}{2} \iff \langle F_{0*} \rangle = 2l + 1m$$

$$[1] = \frac{1}{1} \iff \langle F_{1*} \rangle = 1l + 1m$$

$\frac{1}{3}$型 Solid Torus $D^2\times S^1$の多面体表示



$\frac{2}{3}$型 Solid Torus $D^2\times S^1$の多面体表示

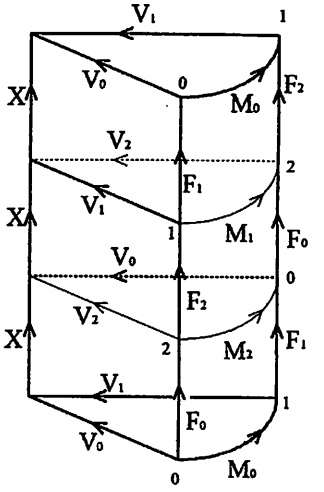
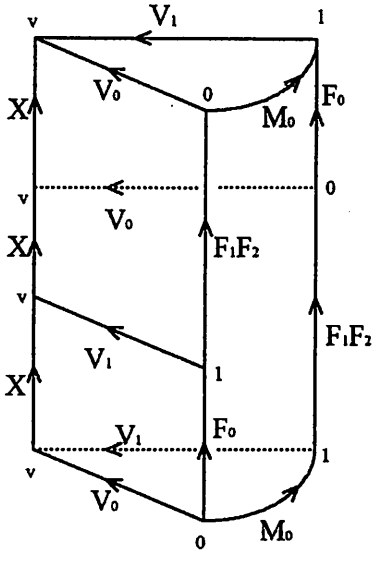


図6：$\pm\frac{1}{3}$型 $D^2\times S^1$ の多面体表示

$\frac{1}{3}$型 Solid Torus $D^2\times S^1$のDS-diagram



$\frac{2}{3}$型 Solid Torus $D^2\times S^1$のDS-diagram

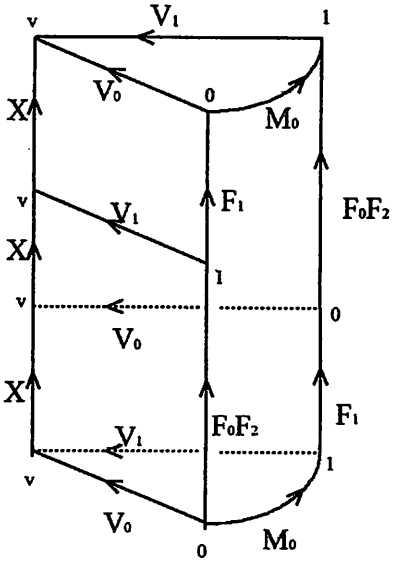
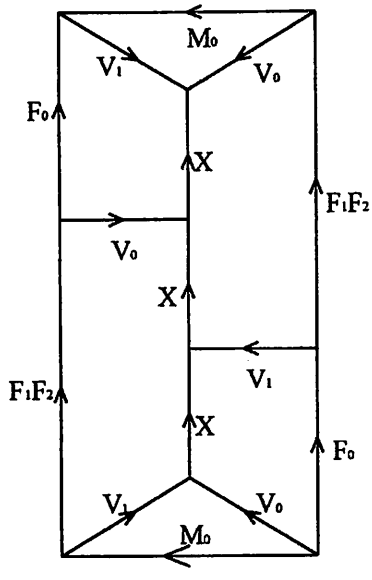


図7：$\pm\frac{1}{3}$型 $D^2\times S^1$ の DS-diagram（立体図）

$\frac{1}{3}$型 Solid TorusのDS-diagram (2)



$\frac{2}{3}$型 Solid Torus のDS-diagram (2)

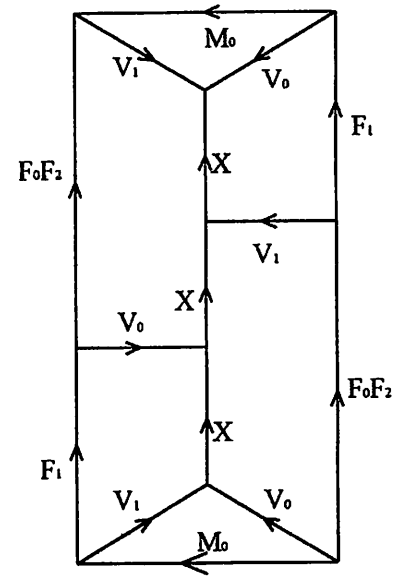
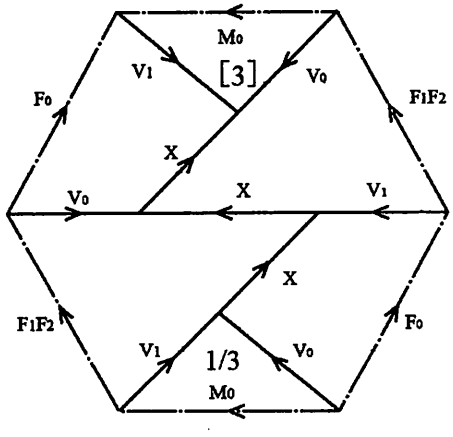


図8：$\pm\frac{1}{3}$型 $D^2\times S^1$ の DS-diagram（平面図）

$\frac{1}{3}$型 Solid TorusのDS-diagram (3)



$\frac{2}{3}$型 Solid Torus のDS-diagram (3)

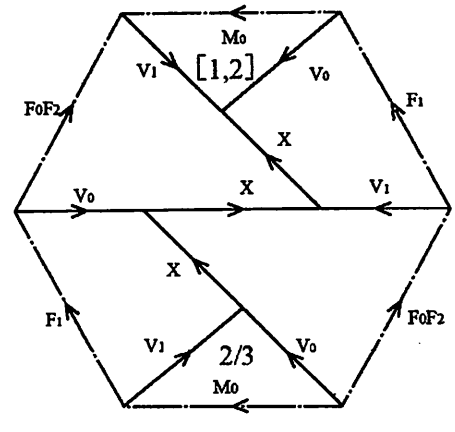


図9：$\pm\frac{1}{3}$型 $D^2\times S^1$ の DS-diagram（正六角形図）

図 9 は$\pm\frac{1}{3}$型 $D^2\times S^1$ の DS-diagram で，正六角形の外部が境界部分の torus になっている。このトーラス部分 $S^1\times S^1$ が正六角形の内部にくるように DS-diagram を描き直すと，図 10 のようになる。

$\frac{1}{3}$型 Solid TorusのDS-diagram（外側）　　$\frac{2}{3}$型 Solid Torus のDS-diagram （外側）

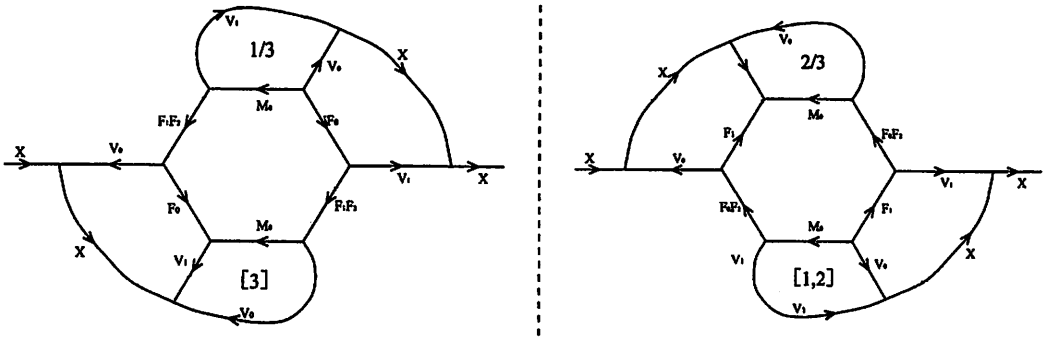


図10：$\pm\frac{1}{3}$型 $D^2\times S^1$ の DS-diagram（外側表示の図）

たとえばこの図 10 の六角形の部分に，種々のソリッドトーラスの DS-diagram の図を貼り付ければ，様々なタイプのレンズ空間の DS-diagram が得られる。ここで述べてきた LM 系（あるいは LM 数）により，これらのレンズ空間 $L(p,\ q)$ のタイプ（すなわち，自然数の組 $(p,\ q)$）は完全に決定できる。

もっとも，レンズ空間の DS-diagram については，すでに横山和夫氏の手による標準形（最小頂点数の DS-diagram ？）がある。

また，レンズ空間の E-cycle 付き DS-diagram の標準形については石井一平氏の block 数に関連する仕事で完成されている。

したがって，この小論で得られるレンズ空間への応用は，彼らの業績のささやかなあと追いにしかすぎない。

（完）