HAKONE SEMINAR 25(2009) 13-37.

DS−diagramの自己同型

山 下　正 勝　(東洋大学 理工学部)

〈背景〉

DS-diagram に対する DS-変形(すなわち DS の辺に沿ったパイピング，あるいはその逆操作である三辺形つぶし)を実践するにあたり，結果として多くの無駄を重ねてきた。原因を探ると，それはどうやら DS-diagram が持つ対称性にあるようである。そこで，同じ DS-diagram を誘導してしまうパイピングの辺を特定するために，**「DS-diagramの自己同型」**という概念を導入することを思い立った。この小論はその手始めに行った実験データの報告である。

§1　自己同型の定義

1.1 DS-diagram：用語と記号

DS-diagram とは 2 次元球面上に描かれた平面グラフを使って 3 次元閉多様体の肢体を描写する方法であって，スパインの権威である池田裕司氏によって考案されたものである。

ちょうど同じ頃に，3 次元多様体上の力学系を研究しておられた石井一平氏が，池田氏とは独立に，多様体上の flow から誘導されるスパインの概念に到達されていた。これは，本間龍雄先生のお言葉を拝借すれば，“良い DS-diagram” のことであった。“DS-diagram with E-cycle” として世間にはびこっているので，知っている人は知っているだろう。(「**“知っている人は知っているだろう。”**とはなんだ？どんなことだって，知っている人は知っているし，知らない人は知らないでいる。あたり前のことだろ？ただの Tautology だ！」「おや，ばれてしまいましたか。じつは津久井編集長から原稿料をせしめようと字数を増やす計画を企んだのでしたが…。」「そういう言い訳がまた字数を増やしているではないか!」「ご協力ありがとうございます。あなた様にまで増やすお手伝いをしていただきまして…，恐縮です。」 編集長，憮然として「… 6 行削除。いや，原稿ごとボツに…」)

DS-diagram の正確な概念(？)，小生は未だ理解していないが，恐れずに書いてみよう。

ここで扱う対象 “DS-diagram” とは，2 次元球面 S^2 上に描かれた有向連結 3-正則グラフ G (＝各辺に向きが指定されている連結グラフで，各頂点では 3 本の辺がくっついているもの)の各頂点，各辺，及び $S^2 - G$ の各開円板にラベルがついている図を指す。ただし，4 点ずつの頂点，3 本ずつの(有向)辺に同じラベルがついている。また，$S^2 - G$ の連結成分である(有向)開円板の 2 枚ずつの面に同じラベルがついている。さらにこれらのラベルは面と辺，辺と頂点の結合関係(incidence relation)に従順であるものとする。これらのラベル付き有向 k-胞体(open k-cell)のことを **k-label** という。

（“*k-label*”と言ってしまうと，*k-cell* の名札か何かだろうという印象を持たれるに違いないので，このネーミングは非常によろしくない。ここでは“同じラベルのついた *k-cell* のクラス”のことを指したいのであるから，“***k-cell class with the same label***”とでも言うべきところである。端折り過ぎて，概念のミスリードを引き起こしてしまった。）

DS-diagram Δ内の 0-label の個数が n であるとき，Δを**頂点数 n の DS-diagram** という。
（「DS-diagram の頂点を数えると $4n$ 個もあるのに“頂点数 n の DS”とは何ごとであるか！」お叱りをいただいてしまいました。「…。そうなんですねえ。エー…，これも呼び損ない，というか日本語使いの下手（へた）がもたらした不具合！ということでお許しを…。」）

頂点数 n の DS-diagram は（DS-diagram という条件を満たすための制約上，必然的に）

- n 個の 0-labels
- $2n$ 個の 1-labels
- $n+1$ 個の 2-labels

から構成されている。球面 S^2 上には下図のように同じ 0-label が 4 カ所に現れる。

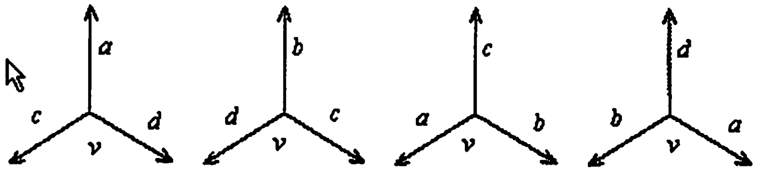


図1：DS-diagramの頂点のラベル v と辺のラベル a, b, c, d の関係

DS-diagram Δ の 2-label X をその境界 ∂ X に沿って X の正の向きに読んだ 1-labels a_i の列

$$a_1^{\varepsilon_1}a_2^{\varepsilon_2}\cdots a_k^{\varepsilon_k} \quad (\text{ただし，} \varepsilon_i \text{ は} +1 \text{ または} -1)$$

を＋X または単に X と表し，$a_k^{-\varepsilon_k}\cdots a_2^{-\varepsilon_2}a_1^{-\varepsilon_1}$ を－X と表す。

［**定義**］ 2 つの DS-diagram $\Delta_1=(S^2, G_1, f_1)$ と $\Delta_2=(S^2, G_2, f_2)$ に対して，S^2 上の homeomorphism $h:(S^2, G_1)\to(S^2, G_2)$ で，$f_2\circ h=(h|P_1)\circ f_1$ をみたすものが存在するとき Δ_1 と Δ_2 は **DS 同値**であるという。ただし，$f_i: S^2\to P_i=S^2/f_i$ $(i=1, 2)$，$h|P_1: P_1\to P_2$ である。

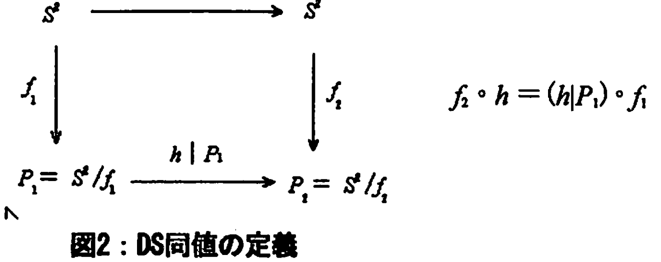


図2：DS同値の定義

ここから先，しばらくの間，いくぶん形式的に記述してゆこう。

(「退屈だなあ。」…。「形式的議論に退屈はつきもの，承知のうえです。なあに，チョットのあいだだけですよ。しばらくの間，おつきあいください。」「しばらく，っていったいいつまで？」「はっきりとは申せませんが，…，ガソリンか何かで『暫定ナントカ税』ってありましたかねえ。暫定期間はどれぐらいでしたっけ。年を取ると物忘れがひどくてイケマセン。」)

1.2 word の C-同値

[定義] symbols の集合$\{a_\lambda\}$に対して

$$w = a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_k^{\varepsilon_k} \quad (a_i \in \{a_\lambda\},\ \ \varepsilon_i = \pm 1)$$

を$\{a_\lambda\}$上の **word** という。このとき $a_k^{-\varepsilon_k} a_{k-1}^{-\varepsilon_{k-1}} \cdots a_2^{-\varepsilon_2} a_1^{-\varepsilon_1}$を w^{-1} と表す。

word w に対して

$$a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} a_3^{\varepsilon_2} \cdots a_k^{\varepsilon_k} \sim a_2^{\varepsilon_2} a_3^{\varepsilon_2} \cdots a_k^{\varepsilon_k} \cdot a_1^{\varepsilon_1}$$

から得られる同値関係“$\sim$”で $w \sim w'$ が導かれるならば，2 つの words w と w' は **C-同値 (cyclically equivalent)** であるといい，$w' = w$ と表す。w の C-同値類を$[w]$と表す。

また，$w' \sim w$ または $w' \sim w^{-1}$ であるならば $|w'| = |w|$ と表し，w と w' は **AC-同値 (absolutely cyclically equivalent)** であるという。w の AC-同値類を$|[w]|$と表す。

[定義] symbols$\{a_\lambda\}$上の words の C-同値類の集合

$$\Gamma_1 = \{[w_p],\ p = 1,2,\cdots,m \ \big|\ w_p = a_{p1}^{\varepsilon_{p1}} a_{p2}^{\varepsilon_{p2}} \cdots a_{pk}^{\varepsilon_{p,k(p)}} \ (\varepsilon_{pi} = \pm 1)\ \}$$

と symbols$\{b_\mu\}$上の words の C-同値類の集合

$$\Gamma_2 = \{[u_q],\ q = 1,2,\cdots,m \ \big|\ u_q = b_{q1}^{\varepsilon_{q1}} b_{q2}^{\varepsilon_{q2}} \cdots b_{qk'}^{\varepsilon_{q,k(q)}} \ (\varepsilon_{qj} = \pm 1)\ \}$$

に対して，$\{a_\lambda^{\pm}\}$ から$\{b_\mu^{\pm}\}$の上への 1 : 1 対応$f : \{a_\lambda^{\pm}\} \to \{b_\mu^{\pm}\}$で

(1) $f(a_\lambda^{\varepsilon_\lambda}) = b_\mu^{\varepsilon_\mu}$ ならば $f(a_\lambda^{-\varepsilon_\lambda}) = b_\mu^{-\varepsilon_\mu}$

を満たし，かつ

(2) (必要ならば番号 q の順序を変えて)各 p ($p = 1, 2, \cdots, m$)に対して

$$|\,[f(a_{p1}^{\varepsilon_{p1}}) f(a_{p2}^{\varepsilon_{p2}}) \cdots f(a_{pk}^{\varepsilon_{p,k(p)}})]\,| = |\ b_{q1}^{\varepsilon_{q1}} b_{q2}^{\varepsilon_{q2}} \cdots b_{qk'}^{\varepsilon_{q,k(q)}}\,|$$

を満たすものが存在するならば，Γ_1 と Γ_2 は **WS-同値(equivalent as a Word System)** であるといい $\Gamma_1 \equiv \Gamma_2$ (WS−同値) と表す。

1.3 DS-diagram の symbolic representation

［**定義**］ DS-diagram の 1 つの 2-label

$$X = a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_k^{\varepsilon_k} \quad (\text{ただし,}\quad \varepsilon_i \text{は}+1\text{または}-1)$$

に対して，その C-同値類を

$$[X] = (\varepsilon_1 a_1,\ \varepsilon_2 a_2,\ \cdots,\ \varepsilon_k a_k)$$

と表し，2-label X の **positive symbolic representation** という。

※ この$(\varepsilon_1 a_1,\ \varepsilon_2 a_2,\ \cdots,\ \varepsilon_k a_k)$のことを，河野正晴氏の記法に従って，

『* $\varepsilon_1 a_1,\ \varepsilon_2 a_2, \cdots,\ \varepsilon_k a_k$』と表すことも多い。

またこのとき，$-X = a_k^{-\varepsilon_k} \cdots a_2^{-\varepsilon_2}\ a_1^{-\varepsilon_1}$の C-同値類

$$[-X] = (-\varepsilon_1 a_1,\ -\varepsilon_2 a_2,\ \cdots,\ -\varepsilon_k a_k)$$

を X の "**negative**" **symbolic representation** という。

［**定義**］ 頂点数 n の DS-diagram Δ の 2-labels X_1, X_2, $\cdots$, X_{n+1} に対して，X_i の AC-同値類，すなわち positive symbolic representation, の集合$\{[X_1], [X_2], \cdots, [X_{n+1}]\}$を Δ の **symbolic representation** といい，（記号を節約して） $\Gamma(\Delta) = \{X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_{n+1}\}$と書く。

※ 今後も X_i とその C-同値類$[X_i]$をいちいち区別せずに混同して使うことにする。

［**定義**］ symbols$\{a_\lambda\}$上の word の（形式的な）C-同値類の集合

$$\Gamma = \{[w_p] \mid \text{各 } w_p \text{ は word},\ p = 1,2,\cdots,n+1\}$$

に対して，$\Gamma \equiv \Gamma(\Delta)$となるような DS-diagram Δ の symbolic representation $\Gamma(\Delta) = \{X_1, X_2, \cdots, X_{n+1}\}$が存在するならば，$\Gamma$を **DS-representation** という。

［**定理**］ **Δ_1, Δ_2 を（n 頂点の）DS-diagram，$\Gamma(\Delta_1)$，$\Gamma(\Delta_2)$をそれぞれ Δ_1, Δ_2 の DS-representation とする。このとき**

$$|\Gamma(\Delta_1)| \equiv |\Gamma(\Delta_2)| \ (AC\text{-同値}) \ \Leftrightarrow \ \Delta_1 \text{と} \Delta_2 \text{は DS 同値}$$

が成り立つ.

この定理については，遙かな昔に箱根セミナーかどこかでしゃべったことがあって，その場では（表現はともかく）証明の内容についてはおおむね容認していただいた記憶がある。紙に残すつもりでいたが，生来の怠け者で，さぼってしまった。今ではそのときのノートすら探せない。"老いる" ということは，小生の場合 "呆ける" ということと同義語だった。じつに情けない。そのことに気がつかずに，これまでずっと怠け続けてきたことがもっと情けない。

この定理の１つの意味は

『1 つの DS-representation はただ 1 つの DS-diagram を表す』

ということである。(←)はほぼ明らかであるが，DS-diagram が貼り合わせの写像を内包していることをおもえば，(→)はそんなに明らかなことではない。

また，もう一つの意味は

『DS-representation においては，面(2-label)同士の結合関係を明示する必要はない』

ということである。

したがって今後は DS-diagram とその DS-representation を混同して，どちらも同じ記号で Δ などと表すことにする。

1.4 P-置換

[定義] m 個の symbols からなる集合 $A=\{a_\lambda \mid \lambda=1,2,\cdots,m\}$ に対して，$\pm A=\{\pm a_\lambda \mid \lambda=1,2,\cdots,m\}$ 上の置換 $\sigma:\pm A\to\pm A$ で

$$\sigma(-a_\lambda)=-\sigma(a_\lambda) \quad \cdots\cdots\cdots \quad (*)$$

を満たすもの，すなわち

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_m \\ \sigma(a_1) & \sigma(a_2) & \cdots & \sigma(a_m) & -\sigma(a_1) & -\sigma(a_2) & \cdots & -\sigma(a_m) \end{pmatrix}$$

を A 上の **P-置換**（Permutation for **Pasting**）ということにする。

P-置換の規則(*)があるので，$A=\{a_\lambda,\ \lambda=1,\ 2,\ \cdots,\ m\}$ の各元 a_λ に対する $\sigma(a_\lambda)$ が定まれば，その時点ですでに P-置換 σ は確定する。そこでこの P-置換のことを，半分だけ明示して

$$\sigma=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \\ \sigma(a_1) & \sigma(a_2) & \cdots & \sigma(a_m) \end{pmatrix}$$

と略記する。

頂点数 n の DS-diagram Δ の 1-labels は $2n$ 個ある。それらを自然数 $1\sim 2n$ で表し，その全体を $E(\Delta)=\{1,2,\cdots,2n\}$ と表す。このとき $E(\Delta)$ 上の P-置換

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2n\text{-}1 & 2n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(2n\text{-}1) & \sigma(2n) \end{pmatrix}$$

のことを(上の行も省略して)

$$[\sigma(1)\ \ \sigma(2)\ \ \cdots\ \ \sigma(2n\text{-}1)\ \ \sigma(2n)]$$

とも表す。

$E(\Delta)=\{1,2,\cdots,2n\}$ 上の P-置換の(形式的な)総数を $\#(n)$ と書くと

$$\#(1)=8,\quad \#(2)=4\,!\cdot 2^4=24\times 16=384,\quad \#(3)=6\,!\cdot 2^5=46480,\ \cdots$$

となる。一般に

$$\#(n)=(2n)!\cdot 2^{2n}$$

である。

頂点数nのDS-diagram $\Delta=\{X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_{n+1}\}$ の1-labels $E(\Delta)=\{1, 2, \cdots, 2n\}$上のP-置換$\sigma$について考える。$\Delta$の2-label

$$X_i=(\varepsilon_{i1}a_{i1},\ \varepsilon_{i2}a_{i2},\ \cdots,\ \varepsilon_{ik}a_{i,k(i)}),\ a_{ij}\in\{1, 2, \cdots, 2n\},$$

に対して

$$\sigma(X_i)=(\varepsilon_{i1}\sigma(a_{i1}),\ \varepsilon_{i2}\sigma(a_{i2}),\ \cdots,\ \varepsilon_{ik}\sigma(a_{i,k(i)}))$$

と定義する。このとき

$$\langle\sigma\rangle=\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_{n+1} \\ \sigma(X_1) & \sigma(X_2) & \cdots & \sigma(X_{n+1}) \end{pmatrix}$$

が$\Delta=\{X_1, X_2, \cdots, X_{n+1}\}$上のP-置換であるならば$\langle\sigma\rangle$を$\Delta$上で$\sigma$から**誘導された**(induced) **P-置換**という。

この場合も，あらかじめ上の行の排列$(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_{n+1})$が了解されているときは，下の行だけを明示して，

$$\langle\sigma\rangle=\langle\sigma(X_1),\ \sigma(X_2),\ \cdots,\ \sigma(X_{n+1})\rangle$$

と表す。

さて，これで“DS-diagramの自己同型”の定義に必要な言葉の準備が整った。

1.5 DS-diagramの自己同型

[定義] $\Delta=\{X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_{n+1}\}$を頂点数$n$のDS-diagramとし，$E(\Delta)=\{1, 2, \cdots, 2n\}$を$\Delta$の1-labelsの全体とする。$E(\Delta)$上のP-置換$\sigma: E(\Delta)\to E(\Delta)$に対して，

$$\langle\sigma\rangle=\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_{n+1} \\ \sigma(X_1) & \sigma(X_2) & \cdots & \sigma(X_{n+1}) \end{pmatrix}$$

がΔ上の誘導P-置換であるならば，σをDS-diagram Δ上の**自己同型**という。

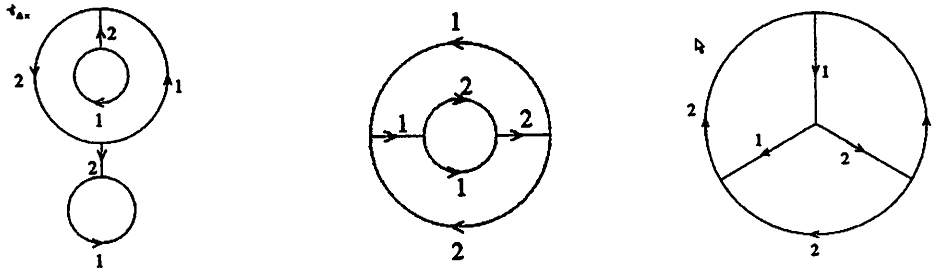
DS-diagram Δ上の自己同型σ，τに対して，積$\sigma\tau$を(どちらでもよいが，ここでは)“σの後にτを施す”という順序にしておく。このとき積$\sigma\tau$もΔ上の自己同型であるから次の(ほとんど自明な)事実がある。

[定理] DS-diagram Δ上の自己同型の全体は(合成を積の演算として)群をなす.

§2　1頂点DSの自己同型

頂点 1 の DS-diagram は次の 3 種類である。

池田(1-1)：X=* 1　　　Y=* 2 2 1 -2 1　　：tkk(1,5)：$M^3 = S^3$
池田(1-2)：X=* 1 -2　　Y=* 1 1 2 2　　　：tkk(2,4)：$M^3 = L(4,1)$
池田(1-3)：X=* 1 1 2　Y=* 2 2 -1　　　　：tkk(3,3)：$M^3 = L(5,1)$



池田(1-1)：S^3(あわび)　　池田(1-2)：L(4, 1)　　池田(1-3)：L(5, 2)

図3　頂点1のDS-diagramの図

これらの 1 頂点 DS-diagram の 1-labels の全体は $E(\Delta)=\{1,2\}$ であるが，その P-置換は形式上，全部で 8 種類ある。それを列挙すると

$$\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2\\1&-2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2\\-1&2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2\\-1&-2\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2\\2&-1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2\\-2&-1\end{pmatrix}$$

である。

次の表はこれらを自己同型とそうでないもの(＊印)に仕分けたものである。

	$\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2\\1&-2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2\\-1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2\\-1&-2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2\\-2&-1\end{pmatrix}$
池田(1-1)	⟨X,Y⟩	＊	＊	⟨-X,-Y⟩	＊	＊	＊	＊
池田(1-2)	⟨X,Y⟩	＊	＊	⟨-X,-Y⟩	⟨-X,Y⟩	＊	＊	⟨X,-Y⟩
池田(1-3)	⟨X,Y⟩	＊	＊	⟨-X,-Y⟩	＊	⟨Y,-X⟩	⟨-Y,X⟩	＊

表１：1頂点DS-diagramの自己同型一覧表

上の表はシラミつぶしに調べて判定した結果に過ぎなくて，数学的な味わいはどこにもない。そこでいま，簡単に分かる範囲で，その結果の理由をいくつか探ってみる。

もない。そこでいま，簡単に分かる範囲で，その結果の理由をいくつか探ってみる。

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$は恒等変換だから，第1列がすべて自己同型であるのは明らかである。

(これはじつに数学的である！…かな？)

(b) 池田(1-1)の1辺形 X＝(1) は自己同型で自身に移るしかないから，$1 \to \pm 2$ であるようなP-変換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \pm 2 & * \end{pmatrix}$ (すなわち池田(1-1)の行の5列～8列) が“アワビ”の自己同型になることはありえない。

この教訓から次の(自明な)啓示を得る。

[Proposition 1] ΔをDS-diagram, σをΔ上の自己同型とする。そのとき，Δの2-label Xがn-gonならば，$\sigma(X)$もn-gonである.

DS-diagram Δの1-labelは，端点の0-labelが一致するとき**loop型**，異なるとき**arc型**という。loop型の0-labelは**1辺形型**(図4)と**zigzag型**(図5)の2つのタイプに分かれる。

[Proposition 2] ΔをDS-diagram, σをΔ上の自己同型，aをΔの1-labelとする。そのとき次が成り立つ。

(1) Δの1-label aが1辺形型ならば，$\sigma(a)$も1辺形型1-label.

(2) Δの1-label aがzigzag型ならば，$\sigma(a)$もzigzag型1-label.

(3) Δの1-label aがarc型ならば，$\sigma(a)$もarc型1-label.

(c) 池田(1-2)はただ1つの2gon X＝(1, -2)を持つ。したがってこのXは自己同型でX自身に移るしかない。このとき

$$1 \to 1 \text{ ならば，} \quad X=(1,-2) \longrightarrow \sigma(X)=(1,-2)$$
$$1 \to -1 \text{ ならば，} \quad X=(1,-2) \longrightarrow \sigma(X)=(-1,\ 2)$$

である。言い換えると，

$$\sigma(1)=1 \Rightarrow \sigma(2)=2\ ; \quad \sigma(1)=-1 \Rightarrow \sigma(2)=-2$$

となる。$1 \to \pm 2$ の場合も同様にして

$$1 \to 2 \text{ ならば，} \quad X=(1,-2) \longrightarrow \sigma(X)=(2,-1)$$
$$1 \to -2 \text{ ならば，} \quad X=(1,-2) \longrightarrow \sigma(X)=(-2,1)$$

すなわち

$$\sigma(1)=2 \Rightarrow \sigma(2)=1\ ; \quad \sigma(1)=-2 \Rightarrow \sigma(2)=-1$$

となる。結局，σが自己同型であるためには$\sigma(1)$と$\sigma(2)$は同符号でなければならない。したがって，池田(1-2)の行のうちの半分は「＊」となる。

[**Proposition 3**] Δが 2-gon を保有する DS-diagram で，$X=(\varepsilon_1 a,\ \varepsilon_2 b)$を$\Delta$の 2-label とする。ただし$a,\ b\in E(\Delta)$. このとき，$\Delta$上の自己同型$\sigma$がこの 2-gon X を自分自身(X または$-$X)に移すならば，$\sigma(a)$と$\sigma(b)$は同符号である。

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$の列が自己同型になっているのは当たり前のように見えるが，じつはそうでもない。これについては次の性質がある。

[定理] 頂点数nの DS-diagram Δの 1-labels $E(\Delta)=\{1, 2, \cdots, 2n-1, 2n\}$上の P-置換

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ -1 & -2 & \cdots & -(2n-1) & -2n \end{pmatrix}$$

がΔ上の自己同型であるならば，$n=1$である.

[証明]

DS-diagram Δの 2 つの 1-labels $k,\ j\in E(\Delta)$に対して，$\cdots k^{\varepsilon_k} j^{\varepsilon_j}\cdots$となる 2-label は（存在するとしても）$\Delta$内にはただ 1 つしかなく，かつ，その 2-label 上のただ 1 個所にしか現れることはない。言い換えると，2-label 上の 2 つの文字列$\cdots k^{\varepsilon_k} j^{\varepsilon_j}\cdots$だけの情報で 2-label は完全に確定する。これは DS-diagram の著しい特徴である。

またこれから示す定理においては，σの仮定から DS-diagram Δの任意の 1-label kに対して$|\sigma(k)|=k$である。このことをまず強調しておく。

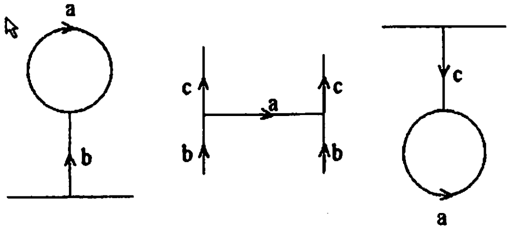


図4：1辺形型

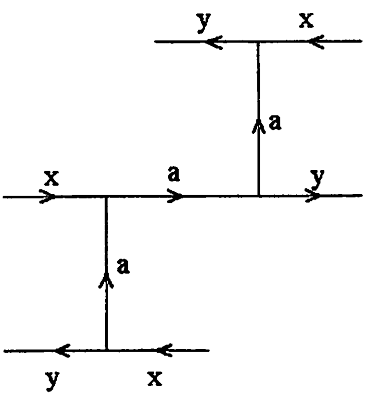


図5：ジグザグ型

[定理の証明]

(Case 1) Δがaが一辺形 $a\in E(\Delta)$を含む場合：

$$\Delta=\{a,\ \cdots bab^{-1}\cdots,\ \cdots c^{-1}ac\cdots,\ \cdots\}$$

$$\Delta \to \sigma(\Delta) = \{a^{-1},\ \cdots b^{-1}a^{-1}b\cdots,\ \cdots ca^{-1}c^{-1}\cdots,\ \cdots\}$$
$$|\sigma(\Delta)| = \{a,\ \cdots b^{-1}ab\cdots,\ \cdots cac^{-1}\cdots,\ \cdots\}$$

かつ$|\sigma(\Delta)|=|\Delta|$であるから，この場合は$b=c$とならざるを得ない。
結果としてΔは頂点数1のDS-diagram 池田(1-1)，通称“あわび”にならざるを得ない。

(Case 2) Δがジグザグ形の1-label $a\in E(\Delta)$を含む場合：

$$\Delta = \{\cdots xaay\cdots,\ \cdots yax\cdots,\ \cdots\}$$
$$\Delta \to \sigma(\Delta) = \{\cdots x^{-1}a^{-1}a^{-1}y^{-1}\cdots,\ \cdots y^{-1}a^{-1}x^{-1}\cdots,\ \cdots\}$$
$$|\sigma(\Delta)| = \{\cdots yaax\cdots,\ \cdots xaxy\cdots,\ \cdots\})$$

この場合は必然的に$x=y$となるので，Δは頂点数1の(3種類ある)DS-diagramのいずれかになる。

(Case 3) Δが1辺形の1-labelもジグザグ形の1-labelも含まない場合：
任意の1-label $a\in E(\Delta)$に対してその周辺の状況は

$$\Delta = \{\cdots pas\cdots,\ \cdots qat\cdots,\ \cdots rau\cdots,\ \cdots\}$$

となっている。したがって

$$\sigma(\Delta) = \{\cdots p^{-1}a^{-1}s^{-1}\cdots,\ \cdots q^{-1}a^{-1}t^{-1}\cdots,\ \cdots r^{-1}a^{-1}u^{-1}\cdots,\ \cdots\}$$
$$|\sigma(\Delta)| = \{\cdots sap\cdots,\ \cdots taq\cdots,\ \cdots uar\cdots,\ \cdots\}$$

であるから$\{s,\ t,\ u\}=\{p,\ q,\ r\}$である。すなわち，たとえば$s$は$p,\ q,\ r$のどれか1つになって1-label aの根っこにつながっているはずである。$t,\ u$についても同様である。したがってこの場合のΔは頂点数が2のDS-diagramでなければならない。

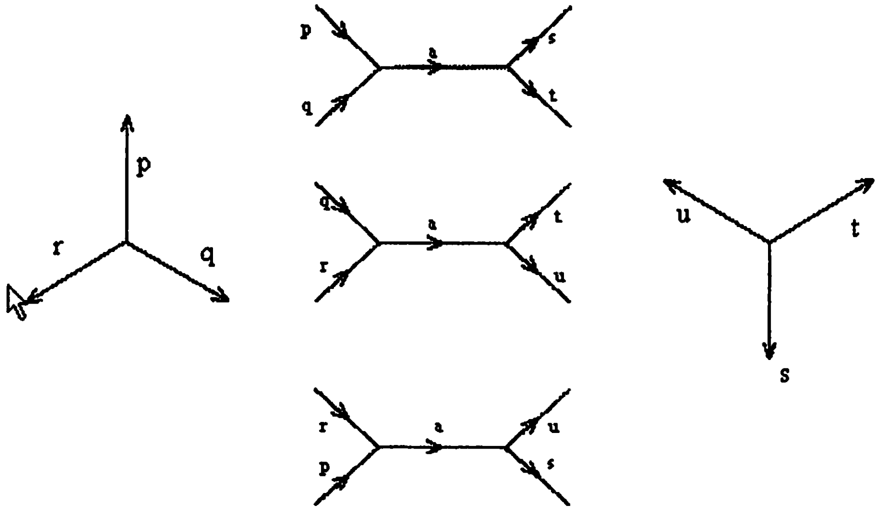


図6：アーク型

ところで，頂点数が$n=2$のDS-diagramは次節で列挙する12種類であるが，それらのなかで1辺形の1-labelもジグザグ形の1-labelも含まないものは池田(2-10)と池田

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2n-1 & 2n \\ -1 & -2 & \cdots & -(2n-1) & -2n \end{pmatrix}$$

は自己同型にならない。結局この場合(＝**Case 3**)は起こり得ない。■

頂点数 n の DS-diagram $\Delta=\{X_1, X_2, \cdots, X_{n+1}\}$ の 1-labels を $E(\Delta)=\{1, 2, \cdots, 2n\}$ とする。このとき Δ 上の自己同型 $\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(2n) \end{pmatrix}$ のことを(以前にも断ったように，紙面の節約のため下の行だけを明示して) $[\sigma(1)\ \ \sigma(2)\ \cdots\ \sigma(2n)]$ と表すことにする。また $\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_{n+1} \\ \sigma(X_1) & \sigma(X_2) & \cdots & \sigma(X_{n+1}) \end{pmatrix}$ のことを(やはり下の行だけで) $\langle \sigma(X_1), \sigma(X_2), \cdots, \sigma(X_{n+1})\rangle$ または単に $\langle\sigma\rangle$ と表すことにする。

以下, Δ 上の自己同型 σ に関する記述を簡単にするために，いくつかの記号を導入しておく。

・ Δ の 1-label $a\in\{1, 2, \cdots, 2n\}$ に対して

$$\sigma(a)=\varepsilon\ b,\qquad ただし\ b\in\{1, 2, \cdots, 2n\},\quad \varepsilon=\pm 1,$$

であるとき，$|\sigma(a)|=b$ と表す。

・ Δ の 1-labels の部分集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}\subset\{1, 2, \cdots, 2n\}$ に対して

$$\sigma(a_i)=\varepsilon_i b_i,\qquad ただし\ b_i\in\{1, 2, \cdots, 2n\},\quad \varepsilon_i=\pm 1,\ i=1, 2, \cdots, k$$

であるとき，順序づけられた組 $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ に対して

$$|\sigma(a_1, a_2, \cdots, a_k)|=(b_1, b_2, \cdots, b_k)$$

と表し，(順序を気にせず)集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ の行き先だけを記述するときは

$$|\sigma\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}|=\{b_1, b_2, \cdots, b_k\}$$

と表す。

・ Δ の 2-label X に対して $\sigma(X)=\varepsilon\ Y$ であるとき，$|\sigma(X)|=Y$ と表す。

《DS データについて》 DS-diagram の概念はいまから四半世紀前，**池田裕司氏** [*Ikeda, H.-Inoue, N, Invitation to DS-diagrams, Kobe J. Math.*, 2 (1985), 169-186] によって初めて世に公開された。このなかに 1 頂点の DS 全 3 図 & 2 頂点の DS 全 12 図が載っている。

・ **石井一平氏**は 3 次元球面の 4 頂点(E-cycle 付き)DS の全図などを我々に提供された。

・ **横山和夫氏**は 1986 年に，任意のレンズ空間に対する DS を製作された。それは紀伊国屋書店の本『*Topology and Computer Science*』に掲載されている。

・ **河野正晴氏**は 1989 年 12 月の『低次元トポロジー上智研究集会』において 3 頂点 DS が全部で 63 個あることを報告され，そのすべてのデータと図を提供された。

・ その後，ロシアの **Matveev 氏**からは石井一平氏を通じて頂点数 6 までの DS 図を提供していただいた。

小生が現在用いているデータはおもにこれらの方々の労作を基礎としている。とくに今回の報告は池田氏と河野氏のデータを（両氏に無断で）使用・公開している。

§3　2頂点および3頂点のDSの自己同型

池田氏により作出された2頂点 DS-diagrams(全12種)について，それぞれの自己同型を個別に求めたものを以下に列挙しておく。対象にしている DS-diagram Δ の自己同型の全体，すなわち自己同型群を Aut(Δ)と表すことにする。

****
池田(2-1)：S^3：tkk(1,1,10)：X =* 1， Y =* 3， Z =* 1 2 4 1 -4 3 4 2 3 -2
****

Aut(Δ)$\sim$ $\langle x, y \mid x^2 = y^2 = (xy)^2 = 1\rangle = D_2$：　Aut($\Delta$)の位数は 4.
生成元：$x =$ [-1 -4 -3 -2]，$y =$ [3 4 1 2]
Aut(Δ)=｛ 1 = [1 2 3 4]，$x =$ [-1 -4 -3 -2]，$y =$ [3 4 1 2]，$xy =$ [-3 -2 -1 -4] ｝
$\langle x\rangle$ = ⟨-X, -Y, -Z⟩，$\langle y\rangle$ = ⟨+Y, +X, +Z⟩，$\langle xy\rangle$ = ⟨-Y, -X, -Z⟩　◆
****
池田(2-2)：S^3：tkk(1,4,7)：X =* 1， Y =* 3 3 4 2， Z =* 1 2 -3 4 1 -4 -2
****

Aut(Δ)$\sim$ $\langle x, y \mid x^2 = 1\rangle = Z_2$：　Aut($\Delta$)の位数は 2.
生成元：$x =$ [-1 -4 -3 -2]
Aut(Δ)=｛ 1 = [1 2 3 4]，$x =$ [-1 -4 -3 -2] ｝
$\langle x\rangle$ = ⟨-X, -Y, -Z⟩　◆
****
池田(2-3)：P^3：tkk(1,3,8)：X =* 1， Y =* 4 2 3， Z =* 3 3 4 1 -4 -2 1 2
****

Aut(Δ)$\sim$ $\langle x, y \mid x^2 = 1\rangle = Z_2$：　Aut($\Delta$)の位数は 2.
生成元：$x =$ [-1 -4 -3 -2]
Aut(Δ)=｛ 1 = [1 2 3 4]，$x =$ [-1 -4 -3 -2] ｝
$\langle x\rangle$ = ⟨-X, -Y, -Z⟩　◆
****
池田(2-4)：L(3, 1)： tkk(2,5,5)：X =* 2 4， Y =* 1 1 2 -3 4， Z =* 3 3 4 -1 2
****

Aut(Δ)$\sim$ $\langle x, y \mid x^2 = y^2 = (xy)^2 = 1\rangle = D_2$：　Aut($\Delta$)の位数は 4.
生成元：$x =$ [-1 -4 -3 -2]，$y =$ [3 4 1 2]
Aut(Δ)=｛ 1 = [1 2 3 4]，$x =$ [-1 -4 -3 -2]，$y =$ [3 4 1 2]，$xy =$ [-3 -2 -1 -4] ｝
$\langle x\rangle$ = ⟨-X, -Y, -Z⟩，$\langle y\rangle$ = ⟨+X, +Z, +Y⟩，$\langle xy\rangle$ = ⟨-X, -Z, -Y⟩　◆
****
池田(2-5)：$S^2 \times S^1$：tkk(2,4,6)：X =* 2 -4， Y =* 1 4 3 2， Z =* 1 2 3 -1 -4 -3
****

Aut(Δ)$\sim$ $\langle x, y \mid x^2 = y^2 = (xy)^2 = 1\rangle = D_2$：　Aut($\Delta$)の位数は 4.
生成元：$x =$ [-1 -4 -3 -2]，$y =$ [3 4 1 2]
Aut(Δ)=｛ 1 = [1 2 3 4]，$x =$ [-1 -4 -3 -2]，$y =$ [3 4 1 2]，$xy =$ [-3 -2 -1 -4] ｝

$\langle x\rangle$ = ⟨-X, -Y, -Z⟩, $\langle y\rangle$ = ⟨+X, -Y, +Z⟩, $\langle xy\rangle$ = ⟨-X, +Y, -Z⟩ ◆

****

池田(2-6)：$S^2\times_\tau S^1$：tkk(2,4,6)：X =* 2 4， Y =* 1 -4 3 -2， Z =* 1 1 2 3 3 4

****

Aut(Δ)～ $\langle x, y \mid x^2 = y^2 = (xy)^2 = 1\rangle = D_2$： Aut(Δ)の位数は 4.

生成元：x = [-1 -4 -3 -2]，y = [3 4 1 2]

Aut(Δ)= { 1 = [1 2 3 4]，x = [-1 -4 -3 -2]，y = [3 4 1 2]，xy = [-3 -2 -1 -4] }

$\langle x\rangle$ = ⟨-X, -Y, -Z⟩, $\langle y\rangle$ = ⟨+X, +Y, +Z⟩, $\langle xy\rangle$ = ⟨-X, -Y, -Z⟩ ◆

****

池田(2-7)：S^3：tkk(1,1,10)：X =* 3， Y =* 4， Z =* 1 -2 -3 2 4 -2 1 -4 -1 3 ◆

****

Aut(Δ)～ $\langle x, y \mid x^2 = y^2 = (xy)^2 = 1\rangle = D_2$： Aut(Δ)の位数は 4.

生成元：$x = x$ = [-1, -2, 4, 3]，y = [2, 1, 3, 4]

Aut(Δ)= { 1 = [1 2 3 4]，x = [-1, -2, 4, 3]，y = [2, 1, 3, 4]，xy = [-2, -1, 4, 3] }

$\langle x\rangle$ = ⟨+Y, +X, -Z⟩, $\langle y\rangle$ = ⟨+X, +Y, -Z⟩, $\langle xy\rangle$ = ⟨+Y, +X, +Z⟩ ◆

****

池田(2-8)：L(3,1)：tkk(1,2,9)：X =* 2， Y =* 3 -4， Z =* 1 1 3 2 -3 1 4 2 -4

****

Aut(Δ)～ $\langle x, y \mid x^2 = 1\rangle = \boldsymbol{Z}_2$

Aut(Δ)の位数は 2.

生成元：x = [-1, -2, 4, 3]

Aut(Δ)= { 1 = [1 2 3 4]，x = [-1, -2, 4, 3] }

$\langle x\rangle$ = ⟨-X, -Y, -Z⟩ ◆

****

池田(2-9)：L(7, 2)：tkk(3,4,5)：X =* 1 2 3， Y =* 4 4 -2 -3， Z =* 1 1 -3 -4 -2

****

Aut(Δ)～ $\langle x, y \mid x^2 = 1\rangle = \boldsymbol{Z}_2$： Aut(Δ)の位数は 2.

生成元：x = [-1, -3, -2, -4]

Aut(Δ)= { 1 = [1 2 3 4]，x = [-1, -3, -2, -4] }

$\langle x\rangle$ = ⟨-X, -Y, -Z⟩ ◆

****

池田(2-10)：Q-Space：tkk(4,4,4)：X =* 1 2 3 4， Y =* 1 4 -2 -3， Z =* 2 1 -3 -4

****

【結論】池田(2-10)上の自己同型群の位数は24で，それは4次の対称群 S_4 と同型である。

****

位数 4 の生成元：α = [2 3 4 1]，β = [2 -4 -1 3]，γ = [-3 -4 2 1].

$\langle\alpha\rangle$ = ⟨+X, +Z, -Y⟩, $\langle\beta\rangle$ = ⟨-Y, +X, + Z⟩, $\langle\gamma\rangle$ = ⟨+Z, +Y, -X⟩

α^2 = [3 4 1 2]， α^3 = [4 1 2 3]， $\alpha^4 = I$

β^2 = [-4 -3 -2 -1]，β^3 = [-3 1 4 -2]，$\beta^4 = I$

γ^2 = [-2 -1 -4 -3]，γ^3 = [4 3 -1 -2]，$\gamma^4 = I$

****

位数 3 の生成元：$\kappa=$ [1 4 -2 -3]，$\lambda=$ [-2 -3 1 4]，$\mu=$ [3 2 -4 -1]，$\nu=$ [-4 -1 3 2].

$\kappa^2=$ [1 -3 -4 2]，$\kappa^3=I$
$\lambda^2=$ [3 -1 -2 4]，$\lambda^3=I$
$\mu^2=$ [-4 2 1 -3]，$\mu^3=I$
$\nu^2=$ [-2 4 3 -1]，$\nu^3=I$

****

位数 2 の生成元：

[-1 -2 4 3]，[-1 3 2 -4]，[-1 -4 -3 -2]，[2 1 -3 -4]，[-3 -2 -1 -4]，[4 -2 -3 1].

****

池田(2-11)：L(8, 3)：tkk(4,4,4)：X =* 1 2 3 4， Y =* 2 2 -1 -3， Z =* 4 4 -3 -1

****

$\mathrm{Aut}(\Delta)\sim\langle x,y\mid x^2=y^2=(xy)^2=1\rangle=D_2$：　Aut(Δ)の位数は 4.

生成元：$x=$ [-1 -4 -3 -2]，$y=$ [3 4 1 2]

Aut(Δ)＝{ 1 = [1 2 3 4]，$x=$ [-1 -4 -3 -2]，$y=$ [3 4 1 2]，$xy=$ [-3 -2 -1 -4] }

$\langle x\rangle$ = ⟨-X, -Z, -Y⟩，$\langle y\rangle$ = ⟨+X, +Z, +Y⟩，$\langle xy\rangle$ = ⟨-X, -Y, -Z⟩　◆

****

池田(2-12)：L(5,1)：tkk(3,3,6)：X =* 2 4 -1， Y =* 4 2 -3， Z =* 1 1 2 3 3 4

****

$\mathrm{Aut}(\Delta)\sim\langle x,y\mid x^2=y^2=(xy)^2=1\rangle=D_2$：　Aut(Δ)の位数は 4.

生成元：$x=$ [-1 -4 -3 -2]，$y=$ [3 4 1 2]

Aut(Δ)＝{ 1 = [1 2 3 4]，$x=$ [-1 -4 -3 -2]，$y=$ [3 4 1 2]，$xy=$ [-3 -2 -1 -4] }

$\langle x\rangle$ = ⟨-X, -Y, -Z⟩，$\langle y\rangle$ = ⟨+Y, +X, +Z⟩，$\langle xy\rangle$ = ⟨-Y, -X, -Z⟩　◆

****

《注意》

池田(2-6)：$S^2\times_\tau S^1$：tkk(2,4,6)において

$\langle y\rangle=\langle 1\rangle$，かつ $\langle xy\rangle=\langle x\rangle$

という事実がある。理由は分からないが，多様体が向き付け不能だからかな？とも思う。

3 頂点の DS-diagram 全 63 種類においては(向き付け不能な多様体に対しても)，このような現象は起こっていない。すなわち

$$\langle\sigma\rangle=\langle\tau\rangle\Leftrightarrow\sigma=\tau$$

この事実については，3 頂点 DS-diagrams の自己同型一覧表(表 3)を見ていただきたい。もっともこの表が正しいという保証はない。(最初の“正しい”表からすでに数回誤りが見つかった。)

筆を擱くにあたって，2010 年の初夢を一つ：

向き付け可能な閉多様体のDS-diagramの自己同型σ，τに対して

$$\langle\sigma\rangle=\langle\tau\rangle\quad\Rightarrow\quad\sigma=\tau$$

****

表2:頂点数 1&2 のDSの自己同型

1頂点 DS-diagram の自己同型群 Aut(Δ)

Δ	多様体の種類	$\pi_1(M)$	Aut(Δ)	位数	tkk-data	v-data	Face X	Face Y		G=Aut(Δ)	x	y or $\langle x^2\rangle$	xy or $\langle x^3\rangle$	$\langle x\rangle$	$\langle y\rangle$ or $\langle x^2\rangle$	$\langle xy\rangle$ or $\langle x^3\rangle$
池田 (1-1)	S^3	1	Z_2	2	(1,5)	1	1	1 2 2 1 -2		$\langle x \mid x^2=1\rangle$	[-1, -2]	-	-	⟨-X, -Y⟩	-	-
池田 (1-2)	L(4, 1)	Z_4	D_2	4	(2,4)	1	1 -2	1 1 2 2		$\langle x, y \mid x^2=y^2=(xy)^2=1\rangle$	[-1, -2]	[-2, -1]	[2, 1]	⟨-X, -Y⟩	⟨X, -Y⟩	⟨-X, Y⟩
池田 (1-3)	L(5, 2)	Z_5	Z_4	4	(3,3)	1	1 1 2	2 2 -1		$\langle x \mid x^4=1\rangle$	[2, -1]	[-1, -2]	[-2, 1]	⟨Y, -X⟩	⟨-X, -Y⟩	⟨-Y, X⟩

2頂点 DS-diagram の自己同型群 Aut(Δ)

Δ	多様体の種類	$\pi_1(M)$	Aut(Δ)	位数	tkk-data	v-data	Face X	Face Y	Face Z	G=Aut(Δ)	x	y	xy	$\langle x\rangle$	$\langle y\rangle$	$\langle xy\rangle$
池田 (2-1)	S^3	1	D_2	4	(1,1,10)	1	1	3	1 2 4 1 -4 3 4 2 3 -2	$\langle x \mid x^2=y^2=(xy)^2=1\rangle$	[-1,-4,-3,-2]	[-3,-2,-1,-4]	[3,4,1,2]	⟨-X,-Y,-Z⟩	⟨Y,X,Z⟩	⟨-Y,-X,-Z⟩
池田 (2-2)	S^3	Z_4	Z_2	2	(1,4,7)	1	1	3 3 4 2	1 2 -3 4 1 -4 -2	$\langle x \mid x^2=1\rangle$	[-1,-4,-3,-2]	-	-	⟨-X,-Y,-Z⟩	-	-
池田 (2-3)	P^3	Z_2	Z_2	2	(1,3,8)	1	1	4 2 3	3 3 4 1 -4 -2 1 2	$\langle x \mid x^2=1\rangle$	[-1,-4,-3,-2]	-	-	⟨-X,-Y,-Z⟩	-	-
池田 (2-4)	L(3,1)	Z_3	D_2	4	(2,5,5)	1	2 4	1 1 2 -3 4	3 3 4 -1 2	$\langle x \mid x^2=y^2=(xy)^2=1\rangle$	[-1,-4,-3,-2]	[-3,-2,-1,-4]	[3,4,1,2]	⟨-X,-Y,-Z⟩	⟨X,Z,Y⟩	⟨-X,-Z,-Y⟩
池田 (2-5)	$S^2\times S^1$	Z	D_2	4	(2,4,6)	2	2 -4	1 4 3 2	1 2 3 -1 -4 -3	$\langle x \mid x^2=y^2=(xy)^2=1\rangle$	[-1,-4,-3,-2]	[-3,-2,-1,-4]	[3,4,1,2]	⟨-X,-Y,-Z⟩	⟨X,-Y,Z⟩	⟨-X,Y,-Z⟩
池田 (2-6)	$S^2\times_{\tau} S^1$	Z	D_2	4	(2,4,6)	1	2 4	1 -4 3 -2	1 1 2 3 3 4	$\langle x \mid x^2=y^2=(xy)^2=1\rangle$	[-1,-4,-3,-2]	[-3,-2,-1,-4]	[3,4,1,2]	⟨-X,-Y,-Z⟩	⟨-X,-Y,-Z⟩	⟨X,Y,Z⟩
池田 (2-7)	S^3	1	D_2	4	(1,1,10)	1	3	4	1 -2 -3 2 4 -2 1 -4 -1 3	$\langle x \mid x^2=y^2=(xy)^2=1\rangle$	[-1,-2,4,3]	[-2,-1,4,3]	[2,1,3,4]	⟨Y,X,-Z⟩	⟨X,Y,-Z⟩	⟨Y,X,Z⟩
池田 (2-8)	L(3,1)	Z_3	Z_2	2	(1,2,9)	1	2	3 -4	1 1 3 2 -3 1 4 2 -4	$\langle x \mid x^2=1\rangle$	[-1,-2,4,3]	-	-	⟨-X,-Y,-Z⟩	-	-
池田 (2-9)	L(7,2)	Z_7	Z_2	2	(3,4,5)	1	1 3 4	2 2 -3 -4	1 1 -4 -2 -3	$\langle x \mid x^2=1\rangle$	[-1,-4,-3,-2]	-	-	⟨-X,-Y,-Z⟩	-	-
池田 (2-10)	Q-space	Q	S_4	24	(4,4,4)	2	1 2 3 4	1 4 -2 -3	2 1 -3 -4	4次の対称群	(Aut(Δ)の元の総数が24個あるので本文中の記事を参照)					
池田 (2-11)	L(8,3)	Z_8	D_2	4	(4,4,4)	1	1 2 3 4	2 2 -1 -3	4 4 -3 -1	$\langle x \mid x^2=y^2=(xy)^2=1\rangle$	[-1,-4,-3,-2]	[-3,-2,-1,-4]	[3,4,1,2]	⟨-X,-Y,-Z⟩	⟨X,Z,Y⟩	⟨-X,-Y,-Z⟩
池田 (2-12)	L(5,1)	Z_5	D_2	4	(3,3,6)	1	2 4 -1	4 2 -3	1 1 2 3 3 4	$\langle x \mid x^2=y^2=(xy)^2=1\rangle$	[-1,-4,-3,-2]	[-3,-2,-1,-4]	[3,4,1,2]	⟨-X,-Y,-Z⟩	⟨Y,X,Z⟩	⟨-Y,-X,-Z⟩

表3：3頂点DS-diagramの自己同型（全2枚中の1枚目）

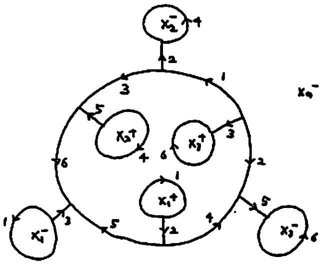
K-番号	多様体の種類	$\pi_1(M)$	自己同型群 G	Gの位数	tkk-data	v-data	Face X	Face Y	Face Z	Face W	自己同型群の群表示	自己同型群の生成元		生成元:Faceの貼り先の対応関係	
												x	y	⟨x⟩	⟨y⟩
(K3-00)	S^3	1	D_3	6	(1,1,1,15)	#0	1	4	6	1 2 4 -2 3 6 -3 1 3 -5 -4 5 6 -5 -2	$\langle x,y \mid x^2=y^2=(xy)^3=1\rangle$	[-6,-5,-3,-4,-2,-1]	[-1,-3,2,-6,-5,-4]	⟨-Z, -Y, -X, -W⟩	⟨-X, -Z, -Y, -W⟩
(K3-01)	S^3	1	Z_2	2	(1,1,1,15)	#0	1	4	6	1 2 4 -2 3 6 -3 1 3 -5 -4 5 -6 -5 -2	$\langle x \mid x^2=1\rangle$	[-1,3,2,-6,-5,-4]	-	⟨-X, -Z, -Y, -W⟩	-
(K3-02)	L(3,1)	Z_3	Z_2	2	(1,1,7,9)	#0	1	4	1 2 4 -2 3 -5 -2	1 3 6 -5 4 5 6 6 -3	$\langle x \mid x^2=1\rangle$	[-4,-2,5,-1,3,-6]	-	⟨Y, X, -Z, -W⟩	-
(K3-03)	L(3,1)	Z_3	Z_2	2	(1,1,7,9)	#0	1	4	1 2 4 -2 3 -5 -2	1 3 6 6 -5 4 5 6 -3	$\langle x \mid x^2=1\rangle$	[-4,-2,5,-1,3,-6]	-	⟨Y, -X, -Z, -W⟩	-
(K3-04)	S^3	1	Z_2	2	(1,1,7,9)	#0	1	4	1 3 -5 4 5 6 -3	1 2 4 -2 3 6 6 -5 -2	$\langle x \mid x^2=1\rangle$	[-4,-2,5,-1,3,-6]	-	⟨-Y, -X, -Z, -W⟩	-
(K3-05)	S^3	1	Z_2	2	(1,1,7,9)	#0	1	4	1 3 -5 4 5 6 -3	1 2 5 -6 -6 -3 2 4 -2	$\langle x \mid x^2=1\rangle$	[-4,-2,5,-1,3,-6]	-	⟨-Y, -X, -Z, -W⟩	-
(K3-06)	P^3	Z_2	Z_2	2	(1,1,8,8)	#0	1	4	1 2 4 -2 3 6 -5 -2	1 3 -5 4 5 6 6 -3	$\langle x \mid x^2=1\rangle$	[-4,-2,5,-1,3,-6]	-	⟨-Y, -X, -Z, -W⟩	-
(K3-07)	P^3	Z_2	Z_2	2	(1,1,8,8)	#0	1	4	1 2 4 -2 3 6 -5 -2	1 3 -6 -6 -5 4 5 -3	$\langle x \mid x^2=1\rangle$	[-4,-2,5,-1,3,-6]	-	⟨-Y, -X, -Z, -W⟩	-
(K3-08)	S^3	1	Z_2	2	(1,1,2,14)	#1	1	6	2 -3	1 2 4 -5 -3 1 3 4 6 -4 5 6 -5 -2	$\langle x \mid x^2=1\rangle$	[-1,3,2,5,4,-6]	-	⟨-Y, -X, -Z, -W⟩	-
(K3-09)	S^3	1	1	1	(1,1,2,14)	#1	1	6	2 -3	1 2 4 -5 4 6 -4 -3 -1 3 5 6 -5 -2	⟨ | ⟩	-	-	-	-
(K3-10)	$S^2\times S^1$	Z	D_2	4	(1,1,4,12)	#1	1	6	2 4 -5 -3	1 2 -3 1 3 4 6 -4 5 6 -5 -2	$\langle x,y \mid x^2=y^2=(xy)^2=1\rangle$	[-1,3,2,5,4,-6]	[6,-4,-5,-2,-3,1]	⟨-Y, -X, -Z, -W⟩	⟨Y, X, -Z, W⟩
(K3-11)	$S^2\times_{\tau} S^1$	Z	D_2	4	(1,1,4,12)	#1	1	6	2 4 -5 -3	1 2 -3 -1 3 4 6 -4 5 6 -5 -2	$\langle x,y \mid x^2=y^2=(xy)^2=1\rangle$	[1,3,2,5,4,6]	[6,-4,-5,-2,-3,1]	⟨X, Y, -Z, -W⟩	⟨Y, X, -Z, W⟩
(K3-12)	S^3	1	1	1	(1,1,5,11)	#1	1	6	1 2 4 -5 -2	1 3 -2 3 5 6 -5 4 -6 -4 -3	⟨ | ⟩	-	-	-	-
(K3-13)	S^3	1	Z_4	4	(2,2,7,7)	#1	2 -3	4 -5	1 1 2 4 6 -5 -3	1 3 4 -6 -6 -5 -2	$\langle x \mid x^4=1\rangle$	[6,-4,-5,-3,-2,-1]	-	⟨Y, -X, W, -Z⟩	-
(K3-14)	S^3	1	Z_2	2	(1,2,3,12)	#1	1	2 -3	4 -5	1 2 4 6 -5 -3 1 3 4 -6 -6 -5 -2	$\langle x \mid x^2=1\rangle$	[-1,3,2,5,4,-6]	-	⟨-X, -Y, -Z, -W⟩	-
(K3-15)	L(4,1)	Z_4	Z_2	2	(1,2,3,12)	#1	1	2 -3	4 6 -5	1 2 4 -5 -3 1 3 4 -6 -6 -5 -2	$\langle x \mid x^2=1\rangle$	[-1,3,2,5,4,-6]	-	⟨-X, -Y, -Z, -W⟩	-
(K3-16)	L(5,2)	Z_5	Z_2	2	(1,2,4,11)	#1	1	2 -3	4 6 6 -5	1 2 4 -5 -3 1 3 4 -6 -5 -2	$\langle x \mid x^2=1\rangle$	[-1,3,2,5,4,-6]	-	⟨-X, -Y, -Z, -W⟩	-
(K3-17)	S^3	1	1	1	(1,2,5,10)	#1	1	2 -3	1 2 4 -5 -2	1 3 4 6 -5 4 -6 -6 -5 -3	⟨ | ⟩	-	-	-	-
(K3-18)	P^3	Z_2	Z_2	2	(1,2,5,10)	#1	1	4 -5	2 4 6 -5 -3	1 2 -3 1 3 4 -6 -6 -5 -2	$\langle x \mid x^2=1\rangle$	[-1,3,2,5,4,-6]	-	⟨-X, -Y, -Z, -W⟩	-
(K3-19)	L(4,1)	Z_4	1	1	(1,2,6,9)	#1	1	2 -3	1 2 4 6 -5 -2	1 3 4 -5 4 -6 -6 -5 -3	⟨ | ⟩	-	-	-	-
(K3-20)	S^3	1	Z_2	2	(1,2,6,9)	#1	1	4 -5	2 4 6 6 -5 -3	1 2 -3 1 3 4 -6 -5 -2	$\langle x \mid x^2=1\rangle$	[-1,3,2,5,4,-6]	-	⟨-X, -Y, -Z, -W⟩	-
(K3-21)	L(5,2)	Z_5	1	1	(1,2,7,8)	#1	1	2 -3	1 2 4 6 6 -5 -2	1 3 4 -5 4 -6 -5 -3	⟨ | ⟩	-	-	-	-
(K3-22)	L(3,1)	Z_3	Z_2	2	(1,2,6,9)	#1	1	4 -5	2 4 6 6 -5 -3	1 2 -3 1 3 4 -6 -5 -2	$\langle x \mid x^2=1\rangle$	[-1,3,2,5,4,-6]	-	⟨-X, -Y, -Z, -W⟩	-
(K3-23)	S^3	1	Z_2	2	(1,3,6,8)	#1	1	4 6 -5	2 4 -6 -6 -5 -3	1 2 -3 1 3 4 -5 -2	$\langle x \mid x^2=1\rangle$	[-1,3,2,5,4,-6]	-	⟨-X, -Y, -Z, -W⟩	-
(K3-24)	L(3,1)	Z_3	Z_2	2	(1,4,4,9)	#1	1	2 4 -5 -3	4 6 6 -5	1 2 -3 1 3 4 -6 -5 -2	$\langle x \mid x^2=1\rangle$	[-1,3,2,5,4,-6]	-	⟨-X, -Y, -Z, -W⟩	-
(K3-25)	P^3	Z_2	Z_2	2	(1,4,5,8)	#1	1	4 6 6 -5	2 4 -6 -5 -3	1 2 -3 1 3 4 -5 -2	$\langle x \mid x^2=1\rangle$	[-1,3,2,5,4,-6]	-	⟨-X, -Y, -Z, -W⟩	-
(K3-26)	L(4,1)	Z_4	D_2	4	(2,2,6,8)	#1	2 -3	4 -5	1 2 4 6 -5 -3	1 1 3 4 -6 -6 -5 -2	$\langle x,y \mid x^2=y^2=(xy)^2=1\rangle$	[-1,3,2,5,4,-6]	[-6,-4,-5,-2,-3,-1]	⟨-X, -Y, -Z, -W⟩	⟨-Y, -X, -Z, W⟩
(K3-27)	L(5,2)	Z_5	Z_4	4	(2,2,7,7)	#1	2 -3	4 -5	1 1 2 4 6 -5 -3	1 3 4 -6 -6 -5 -2	$\langle x \mid x^4=1\rangle$	[6,-4,-5,-3,-2,-1]	-	⟨-Y, X, -W, Z⟩	-
(K3-28)	S^3	1	Z_2	2	(2,3,5,8)	#1	2 -3	4 6 -5	1 2 4 -5 -3	1 1 3 4 -6 -6 -5 -2	$\langle x \mid x^2=1\rangle$	[-1,3,2,5,4,-6]	-	⟨-X, -Y, -Z, -W⟩	-
(K3-29)	L(5,2)	Z_5	Z_2	2	(2,3,6,7)	#1	2 -3	4 6 -5	1 1 2 4 -5 -3	1 3 4 -6 -6 -5 -2	$\langle x \mid x^2=1\rangle$	[-1,3,2,5,4,-6]	-	⟨-X, -Y, -Z, -W⟩	-
(K3-30)	S^3	1	Z_2	2	(2,4,5,7)	#1	2 -3	4 6 6 -5	1 2 4 -5 -3	1 1 3 4 -6 -5 -2	$\langle x \mid x^2=1\rangle$	[-1,3,2,5,4,-6]	-	⟨-X, -Y, -Z, -W⟩	-

-17-

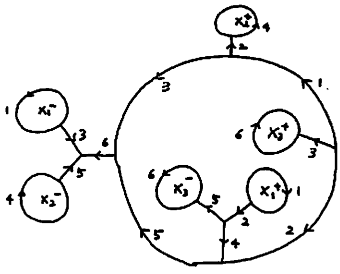
表3：3頂点DS-diagramの自己同型（全2枚中の2枚目）

K-番号	多様体の種類	$\pi_1(M)$	自己同型群 G	Gの位数	tkk-data	v-data	Face X	Face Y	Face Z	Face W	自己同型群の群表示	自己同型群の生成元		生成元:Faceの貼り先の対応関係	
												x	y	⟨x⟩	⟨y⟩
(K3-31)	L(4,1)	Z_4	Z_2	2	(2,4,6,6)	#1	2 -3	4 6 6 -5	1 1 2 4 -5 -3	1 3 4 -6 -5 -2	$\langle x \mid x^2=1\rangle$	[-1,3,2,5,4,-6]	-	⟨-X, -Y, -Z, -W⟩	-
(K3-32)	L(6,1)	Z_6	D_2	4	(3,3,4,6)	#1	1 2 -3	4 6 -5	2 4 -5 -3	1 1 3 4 -6 -6 -5 -2	$\langle x,y \mid x^2=y^2=(xy)^2=1\rangle$	[-1,3,2,5,4,-6]	[-6,-4,-5,-2,-3,-1]	⟨-X, -Y, -Z, -W⟩	⟨-Y, -X, -Z, W⟩
(K3-33)	L(10,3)	Z_{10}	Z_4	4	(3,3,6,6)	#1	1 2 -3	4 6 -5	1 1 3 4 -5 -2	2 4 -6 -6 -5 -3	$\langle x \mid x^4=1\rangle$	[-6,-4,-5,-3,-2,1]	-	⟨-Y, X, W, -Z⟩	-
(K3-34)	L(9,2)	Z_9	Z_2	2	(3,4,4,7)	#1	1 2 -3	2 4 -5 -3	4 6 6 -5	1 1 3 4 -6 -5 -2	$\langle x \mid x^2=1\rangle$	[-1,3,2,5,4,-6]	-	⟨-X, -Y, -Z, -W⟩	-
(K3-35)	L(11,3)	Z_{11}	Z_2	2	(3,4,5,6)	#1	1 2 -3	4 6 6 -5	2 4 -6 -5 -3	1 1 3 4 -5 -2	$\langle x \mid x^2=1\rangle$	[-1,3,2,5,4,-6]	-	⟨-X, -Y, -Z, -W⟩	-
(K3-36)	L(12,5)	Z_{12}	D_2	4	(4 4 4 6)	#1	1 1 2 -3	2 4 -5 -3	4 6 6 -5	1 3 4 -6 -5 -2	$\langle x,y \mid x^2=y^2=(xy)^2=1\rangle$	[-1,3,2,5,4,-6]	[-6,-4,-5,-2,-3,-1]	⟨-X, -Y, -Z, -W⟩	⟨-Z, -Y, -X, W⟩
(K3-37)	L(13,5)	Z_{13}	Z_4	4	(4,4,5,5)	#1	1 1 2 -3	4 6 6 -5	1 3 4 -5 -2	2 4 -6 -5 -3	$\langle x \mid x^4=1\rangle$	[-6,-4,-5,-3,-2,1]	-	⟨-Y, X, W, -Z⟩	-
(K3-38)	L(3,1)	Z_3	1	1	(1,2,3,12)	#2	1	4 -5	2 4 -3	1 2 5 -3 -1 3 -6 4 -6 5 -6 -2	⟨ | ⟩	-	-	-	-
(K3-39)	S^3	1	1	1	(1,2,5,10)	#2	1	4 -5	1 2 4 -6 -2	1 3 -4 6 -3 2 5 -6 5 -3	⟨ | ⟩	-	-	-	-
(K3-40)	S^3	1	1	1	(1,2,5,10)	#2	1	4 -5	1 2 4 -6 -2	1 3 -5 6 -5 -2 3 -4 6 -3	⟨ | ⟩	-	-	-	-
(K3-41)	P^3	Z_2	Z_2	2	(1,2,5,10)	#2	1	4 -5	2 4 -6 -5 -3	1 2 5 -6 4 -3 -1 3 -6 -2	$\langle x \mid x^2=1\rangle$	[1,3,2,-5,-4,-6]	-	⟨X, Y, -Z, -W⟩	-
(K3-42)	$S^2\times S^1$	Z	Z_2	2	(1,3,5,9)	#2	1	2 4 -3	1 2 5 -6 -2	1 3 -5 4 -5 6 -4 6 -3	$\langle x \mid x^2=1\rangle$	[-1,2,3,4,6,5]	-	⟨-X, Y, -Z, -W⟩	-
(K3-43)	$S^2\times_\tau S^1$	Z	Z_2	2	(1,3,5,9)	#2	1	2 4 -3	1 2 5 -6 -2	1 3 -6 4 -5 6 -4 5 -3	$\langle x \mid x^2=1\rangle$	[-1,2,3,4,6,5]	-	⟨-X, Y, -Z, -W⟩	-
(K3-44)	L(3,1)	Z_3	Z_2	2	(1,3,7,7)	#2	1	2 4 -3	1 2 5 -4 5 -6 -2	1 3 -5 6 -4 6 -3	$\langle x \mid x^2=1\rangle$	[-1,3,2,-4,-6,-5]	-	-	-
(K3-45)	P^3	Z_2	1	1	(1,4,5,6)	#2	1	4 -5 4 -6	1 2 5 -6 -2	1 3 -4 -2 3 -5 6 -3	⟨ | ⟩	-	-	-	-
(K3-46)	S^3	1	Z_2	2	(1,5,5,7)	#2	1	1 2 4 -5 -2	1 3 -5 6 -3	2 6 -4 5 -6 4 -3	$\langle x \mid x^2=1\rangle$	[-1,3,2,-6,-5,-4]	-	⟨-X, -Z, -Y, W⟩	-
(K3-47)	L(4,1)	Z_4	D_6	12	(2,2,2,12)	#3	1 -2	3 -4	5 -6	1 5 -3 1 6 -3 2 6 -4 2 5 -4	$\langle x,y \mid x^2=y^2=(xy)^6=1\rangle$	[-1,-2,5,6,3,4]	[3,4,1,2,-6,-5]	⟨-X, Z, Y, -W⟩	⟨Y, X, Z, -W⟩
(K3-48)	S^3	1	Z_2	2	(2,2,3,11)	#3	1 -2	3 -4	1 5 -3	1 6 -3 2 5 -6 -2 4 -6 5 -4	$\langle x \mid x^2=1\rangle$	[3,4,1,2,-5,-6]	-	⟨Y, X, -Z, -W⟩	-
(K3-49)	S^3	1	Z_2	2	(2,2,3,11)	#3	1 -2	3 -4	1 5 -3	1 6 -4 2 6 -3 2 5 -6 5 -4	$\langle x \mid x^2=1\rangle$	[3,4,1,2,-5,-6]	-	⟨Y, X, -Z, -W⟩	-
(K3-50)	L(5,2)	Z_5	Z_2	2	(2,2,5,9)	#3	1 -2	3 -4	1 5 -6 5 -3	1 6 -4 2 6 -3 2 5 -4	$\langle x \mid x^2=1\rangle$	[3,4,1,2,-5,-6]	-	⟨Y, X, -Z, -W⟩	-
(K3-51)	L(4,1)	Z_4	D_2	4	(2,2,6,6)	#3	1 -2	3 -4	1 5 -3 2 6 -4	1 6 -5 -2 4 -5 6 -3	$\langle x,y \mid x^2=y^2=(xy)^2=1\rangle$	[3,4,1,2,-5,-6]	[2,1,4,3,6,5]	⟨Y, X, -Z, -W⟩	⟨-X, -Y, Z, -W⟩
(K3-52)	P^3	Z_2	Z_2	2	(2,3,3,10)	#3	1 -2	1 5 -3	1 6 -4	2 5 -6 5 -4 3 -4 2 6 -3	$\langle x \mid x^2=1\rangle$	[-1,-2,6,5,4,3]	-	⟨-X, -Z, -Y, -W⟩	-
(K3-53)	S^3	1	1	1	(2,3,5,8)	#3	1 -2	1 5 -3	1 6 -4 3 -4	2 5 -6 5 -4 2 6 -3	⟨ | ⟩	-	-	-	-
(K3-54)	$P^2\times S^1$	$Z_2\times Z$	D_2	4	(2,4,6,6)	#3	1 -2	3 -5 6 -4	1 5 -4 1 6 -3	2 5 -6 -2 4 -3	$\langle x,y \mid x^2=y^2=(xy)^2=1\rangle$	[1,2,4,3,6,5]	[-1,-2,5,6,3,4]	⟨X, -Y, Z, -W⟩	⟨-X, -Y, -Z, -W⟩
(K3-55)	$P^2\times S^1$	$Z_2\times Z$	D_2	4	(2,4,6,6)	#3	1 -2	3 -5 6 -4	1 5 -4 2 6 -3	1 6 -5 -2 3 -4	$\langle x,y \mid x^2=y^2=(xy)^2=1\rangle$	[2,1,4,3,6,5]	[-1,-2,5,6,3,4]	⟨-X,-Y, Z, -W⟩	⟨-X, -Y, -Z, -W⟩
(K3-56)	L(4,1)	Z_4	Z_2	2	(2,5,5,6)	#3	1 -2	1 5 -3 4 -3	1 6 -5 6 -4	2 5 -4 2 6 -3	$\langle x \mid x^2=1\rangle$	[1,2,4,3,6,5]	-	⟨-X, -Z, -Y, -W⟩	-
(K3-57)	L(5,1)	Z_5	D_3	6	(3,3,3,9)	#3	1 5 -3	1 6 -4	2 5 -4	1 -2 3 -4 3 -6 5 -6 -2	$\langle x,y \mid x^2=y^2=(xy)^3=1\rangle$	[-1,-2,6,5,4,3]	[-5,-6,-3,-4,-1,-2]	⟨-Y, -X, -Z, -W⟩	⟨-X, -Z, -Y, -W⟩
(K3-58)	L(7,2)	Z_7	Z_2	2	(3,3,5,7)	#3	1 5 -3	1 6 -4	1 -2 3 -6 -2	2 5 -6 5 -4 3 -4	$\langle x \mid x^2=1\rangle$	[-1,-2,6,5,4,3]	-	⟨-Y, -X, -Z, -W⟩	-
(K3-59)	$S^2\times_\tau S^1$	Z	Z_2	2	(3,4,5,6)	#3	1 5 -3	1 -2 3 -4	2 5 -6 5 -4	1 6 -4 3 -6 -2	$\langle x \mid x^2=1\rangle$	[3,4,1,2,-5,-6]	-	⟨-X, Y, -Z, W⟩	-
(K3-60)	L(8,3)	Z_8	Z_2	2	(3,5,5,5)	#3	1 5 -3	1 -2 1 6 -4	2 5 -4 3 -4	2 6 -5 6 -3	$\langle x \mid x^2=1\rangle$	[-1,-2,5,6,3,4]	-	⟨-X, -Y, -W, -Z⟩	-
(K3-61)	Q-space	⟨2,2,2⟩	D_3	6	(3,5,5,5)	#3	1 5 -4	1 -2 1 6 -3	2 5 -6 5 -3	2 6 -4 3 -4	$\langle x,y \mid x^2=y^2=(xy)^3=1\rangle$	[-1,-2,6,5,4,3]	[4,3,2,1,-5,-6]	⟨-X, -Y, -W, -Z⟩	⟨-X, -W, -Z, -Y⟩
(K3-62)	D-space	⟨2,2,3⟩	D_6	12	(4,4,4,6)	#3	1 -2 3 -4	1 5 -6 -2	3 -6 5 -4	1 6 -4 2 5 -3	$\langle x,y \mid x^2=y^2=(xy)^6=1\rangle$	[-1,-2,6,5,4,3]	[3,4,1,2,-6,-5]	⟨-Y, -X, -Z, -W⟩	⟨X, Z, Y, -W⟩

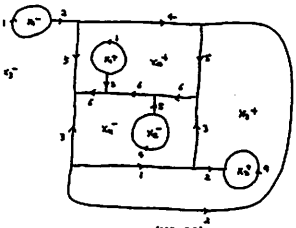
3 頂点 DS-diagram の図 一覧：(K3-00 ～ K3-07)



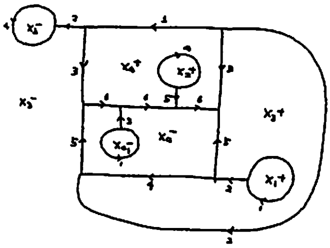
(K3-00)



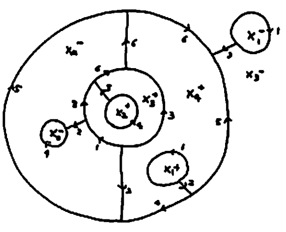
(K3-01)



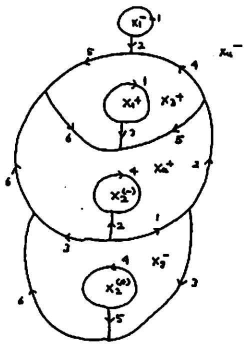
(K3-02)



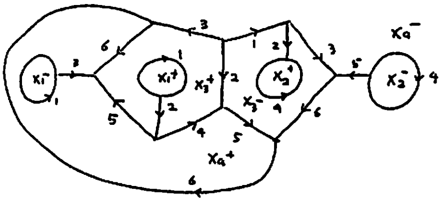
(K3-03)



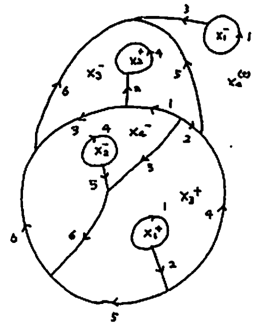
(K3-04)



(K3-05)

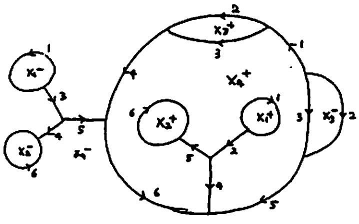


(K3-06)

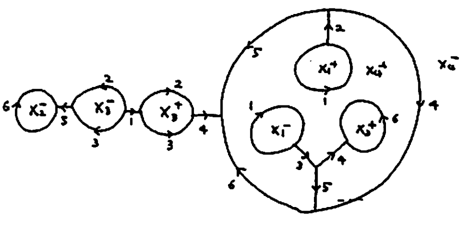


(K3-07)

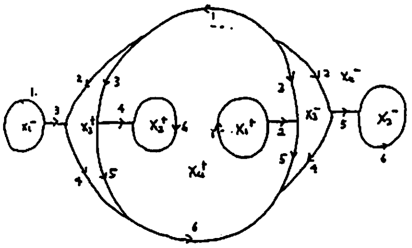
3 頂点 DS-diagram の図 一覧：(K3-08 ～ K3-15)



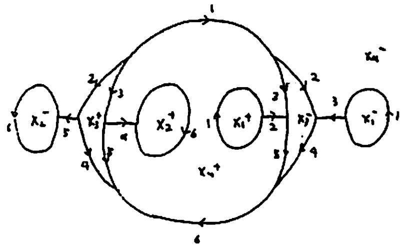
(K3-08)



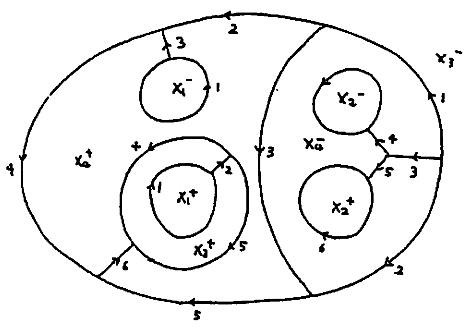
(K3-09)



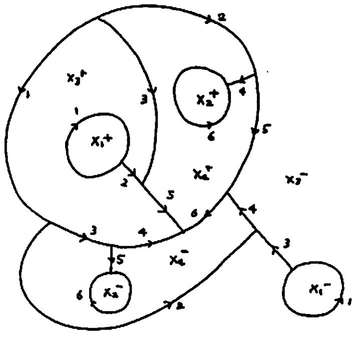
(K3-10)



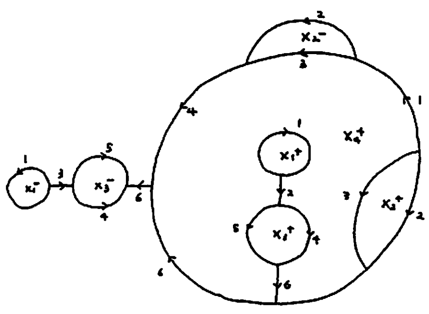
(K3-11)



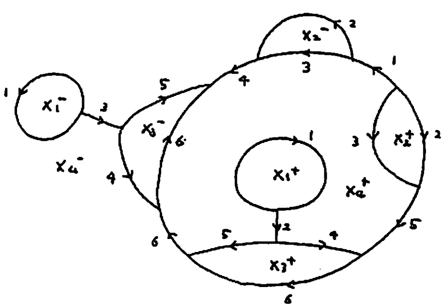
(K3-12)



(K3-13)

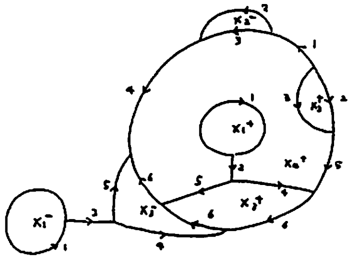


(K3-14)

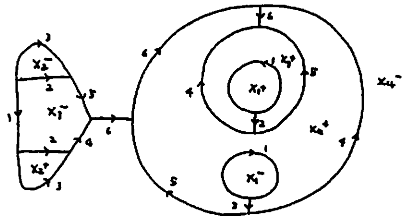


(K3-15)

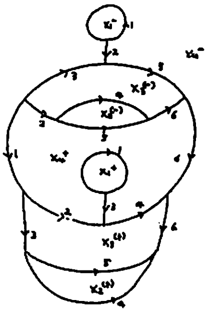
3 頂点 DS 図 全 63 図一覧：(K 3-16 ～ K3-23)



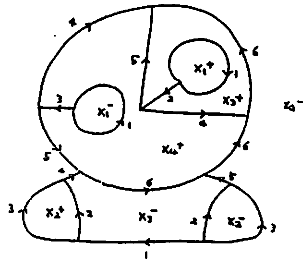
(K3-16)



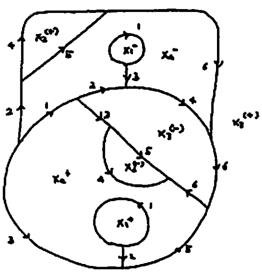
(K3-17)



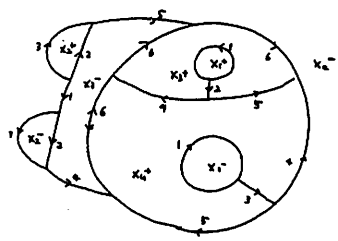
(K3-18)



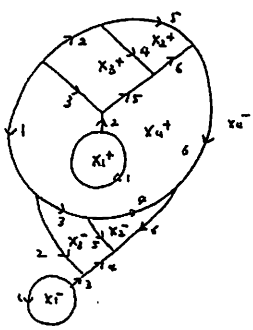
(K3-19)



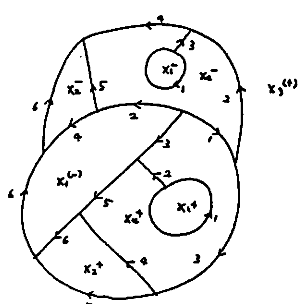
(K3-20)



(K3-21)

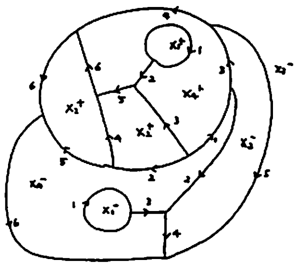


(K3-22)

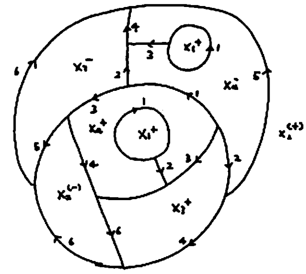


(K3-23)

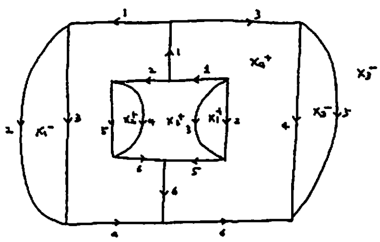
3 頂点 DS 図 全 63 図一覧：(K3-24 ～ K3-31)



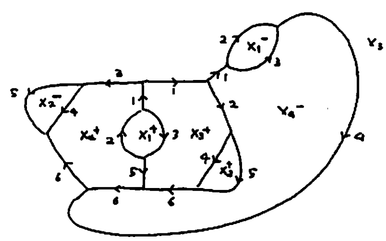
(K3-24)



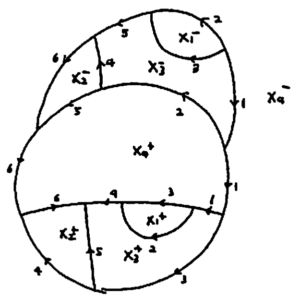
(K3-25)



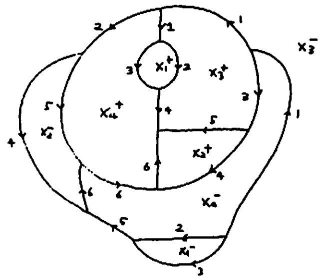
(K3-26)



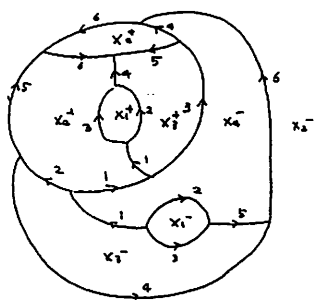
(K3-27)



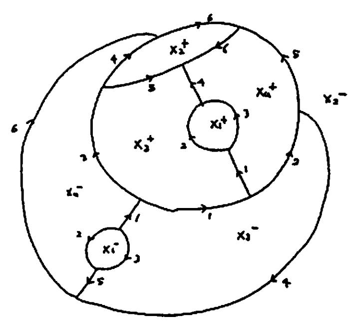
(K3-28)



(K3-29)

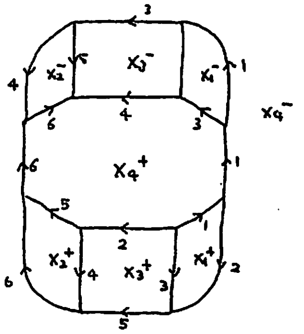


(K3-30)

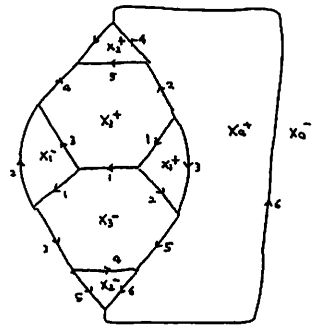


(K3-31)

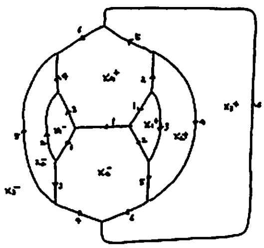
3 頂点 DS 図　全 63 図一覧：(K3-32 ～ K3-39)



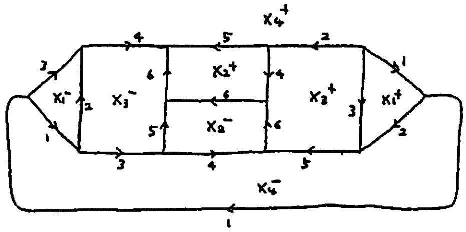
(K3-32)



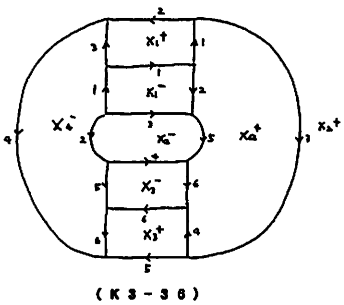
(K3-33)



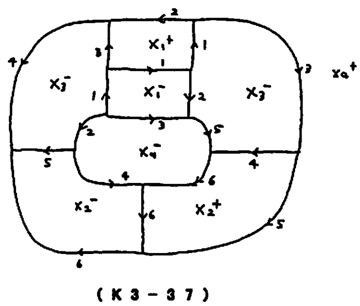
(K3-34)



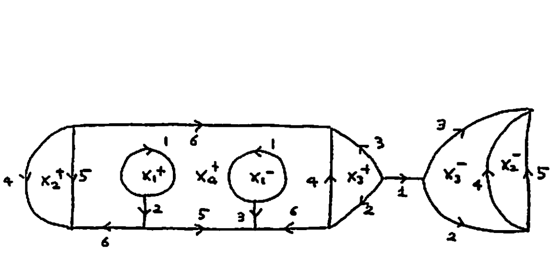
(K3-35)



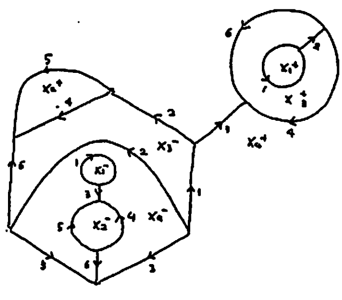
(K3-36)



(K3-37)

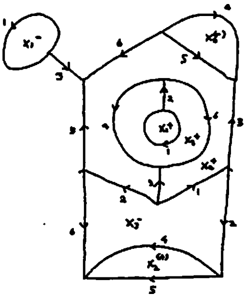


(K3-38)

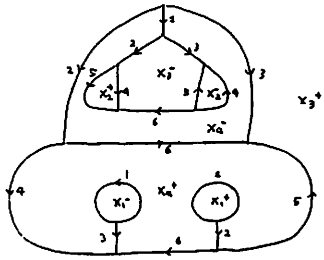


(K3-39)

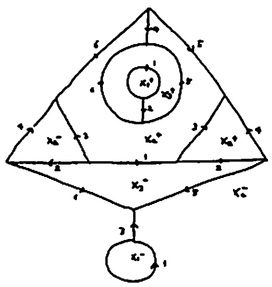
3 頂点 DS 図 全 63 図一覧：(K3-40 ～ K3-47)



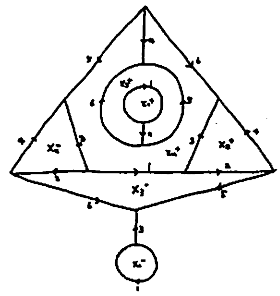
(K3-40)



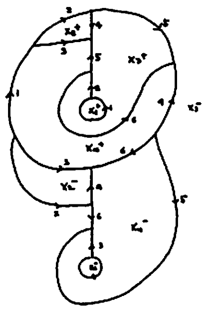
(K3-41)



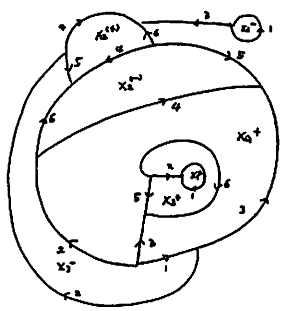
(K3-42)



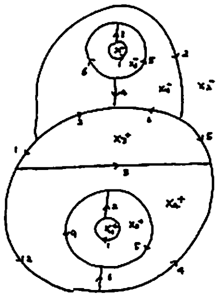
(K3-43)



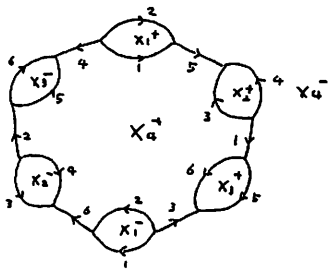
(K3-44)



(K3-45)

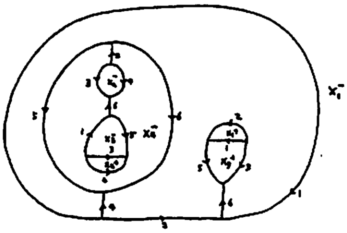


(K3-46)

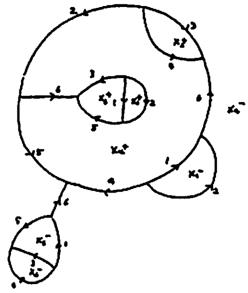


(K3-47)

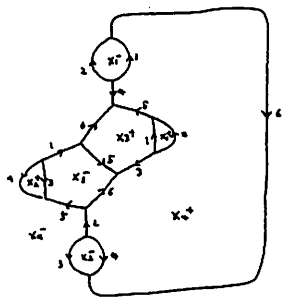
3 頂点 DS 図　全 63 図一覧：(K3-48 ～ K3-55)



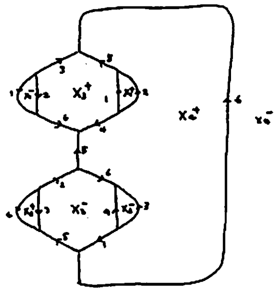
(K3-48)



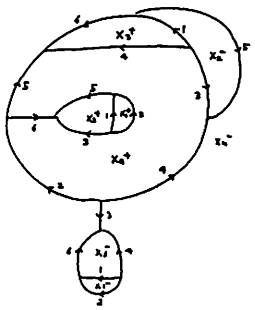
(K3-49)



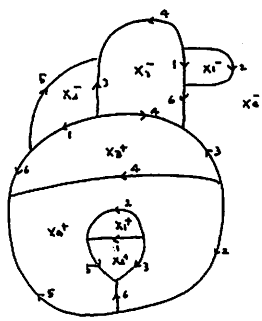
(K3-50)



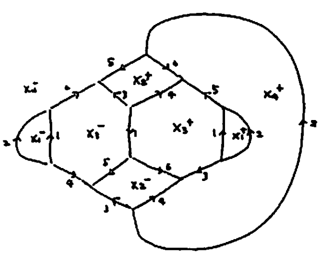
(K3-51)



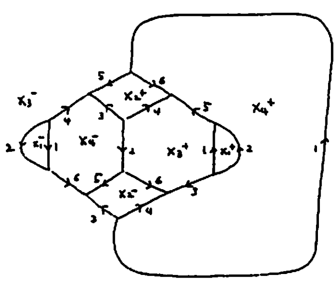
(K3-52)



(K3-53)

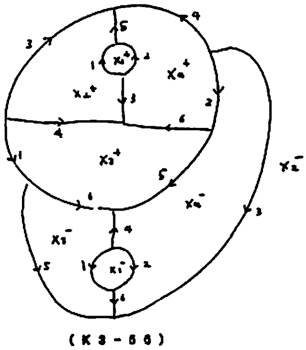


(K3-54)

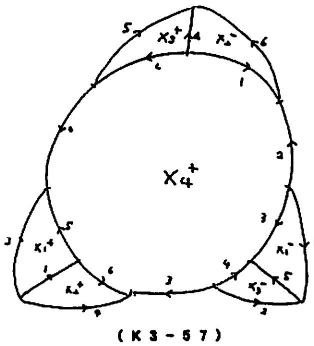


(K3-55)

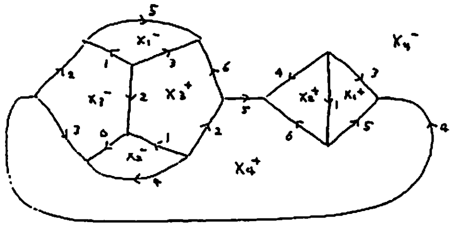
3 頂点 DS 図　全 63 図一覧：(K3-56 ～ K3-62)



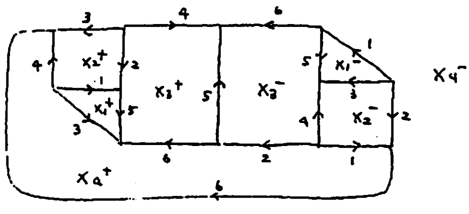
(K3-56)



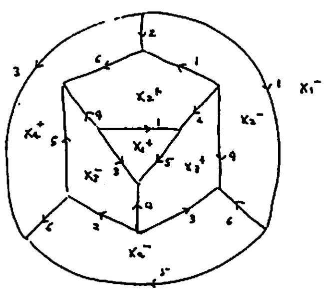
(K3-57)



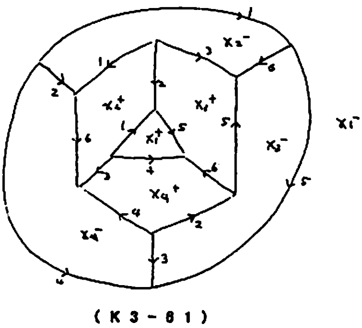
(K3-58)



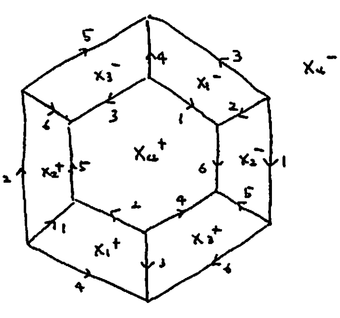
(K3-59)



(K3-60)



(K3-61)



(K3-62)