

## Fibred Solid Torus の DS-diagram

東洋大学 工学部      山下 正勝

### 1. Seifert fiber space

円柱  $D^2 \times I$  について考える。ここで  $D^2$  は単位円板、すなわち

$$D^2 = \{r e^{i\theta} = \exp \theta i \in \mathbb{C} \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

で、 $I = [0, 1]$  は閉区間である。さて、整数  $p, q$  ( $p > 0$ ) に対して

$$h_{p,q}(r \exp \theta i, 1) = (r \exp (\theta + 2\pi q/p)i, 0)$$

という貼り合わせのための同相写像

$$h_{p,q} : D^2 \times \{1\} \rightarrow D^2 \times \{0\}$$

によって円柱  $D^2 \times I$  の上底  $D^2 \times \{1\}$  と下底  $D^2 \times \{0\}$  とを貼り合わせてられるものを  $(p, q)$  型の fibred solid torus という。このとき任意の 1 点  $x \in D^2$  に対して、線分  $\{x\} \times I$  の端点に (一般には) 他の線分  $\{y\} \times I$ ,  $y \in D^2$ , がつながり、その先にまた別の線分がつながって  $\dots$ , といった具合に次々につながって行って、やがて 1 本の単純閉曲線となる。この閉曲線を (fibred solid torus の) fiber という。

$p, q$  ( $q < p$ ) が互いに素な自然数であるとき、 $(p, q)$  型の fibred solid torus のことを “ $q/p$  型” である” ということにしよう。このとき、円板の中心  $O = (0, 0) \in D^2$  に対しては、 $D^2 \times I$  の中心線  $\{O\} \times I$  の両端をつないで得られる単純閉曲線が fiber である。

それ以外では  $D^2 \times I$  の  $p$  本の線分

$$\{x_k \times I \subset D^2 \times I \mid x_k = r \exp (\theta + 2kq\pi/p)i \in D^2, r \neq 0, k = 0, 1, 2, \dots, p-1\}$$

がつぎつぎにつながって行って、fibred solid torus  $D^2 \times I$  内の 1 本の単純閉曲線となる。これらが fiber である。

$(1, 0)$  型の fibred solid torus は、どの fiber もねじれていない “自明な” fibred solid torus である。これを “ $0/1$  型” ということにしよう。

3次元多様体  $M$  が単純閉曲線の和集合として、 $M = \cup H_\lambda$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , と表され、それが以下の性質を持っているとき、 $M$  を Seifert fiber space という：

(1)  $\mu \neq \nu$  ならば  $H_\mu \cap H_\nu = \emptyset$ 。

(2) 任意の単純閉曲線  $H \in \{H_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$  に対して、 $H$  の  $M$  における近傍  $U$  として、 $U = \cup H_\alpha$ ,  $\alpha \in A \subset \Lambda$ , かつ 対  $(U, H)$  から fibred solid torus とその中心線の対  $(D^2 \times S^1, (0, 0) \times S^1)$  への fiber を保つ同相写像が存在するものがとれる。

ここで、“fiber を保つ同相写像” というのは、各単純閉曲線  $H_\alpha \subset U$  が  $D^2 \times S^1$  の 1 本の fiber の上に移されることを指す。

各単純閉曲線  $H \in \{H_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$  を Seifert fiber space  $M$  の fiber といい、 $U$  を  $H$  の fiber nbd という。fiber nbd  $U$  はそれ自身、fibred solid torus の構造を持っている。 $U$  の fibred

*solid torus* としての *type* を  $(p, q)$  とするとき,  $(p, q) = (1, 0)$ , すなわち *fiber* 構造が直積の状態 (と *fiber preserving homeo.*) ならば *fiber*  $H$  は ordinal, そうでない (すなわち, まわりの *fiber* がいささかでもよじれている) ならば exceptional であるという。

曲面  $F$  に対して, 直積空間  $F \times S^1$  には各 *fiber* が *ordinal* であるような *Seifert fiber space* の構造を (自然に) 導入することができる。

一方, (*compact* な) *Seifert fiber space*  $M$  には *exceptional fibers* は高々有限個しか存在しないので, それらのまわりの (互いに交わらない) *fiber nbd* を取り除いてやれば, 残りの空間は (ほとんど) 直積構造状態になっているだろう。

したがって, 曲面  $F$  上の (互いに *disjoint* な)  $m$  個の開円板  $D_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) を選んで直積空間  $F \times S^1$  から  $\cup D_k \times S^1$  を取り除き, そのかわりに各種の *fibred solid torus* を埋め直してやれば, さまざまな *Seifert fiber space* を得ることができる。

そこで, 直積空間  $F \times S^1$  の (直積構造を内蔵した) *DS-diagram* と *fibred solid torus* の (*fiber* 構造を内蔵した) *DS-diagram* を用意しておけば種々の *Seifert fiber space* の *DS-diagram* を作ることができる。

曲面  $F$  が球面  $S^2$  の場合,  $S^2 \times S^1$  の (最も簡単な) *DS-diagram* として

$$\text{池田 (2-6) : } \Delta = \{BD, AD^1CB^1, AABCCD\}$$

がある。これは *E-cycle*  $e = ABCD$  を持っている (図 1)。

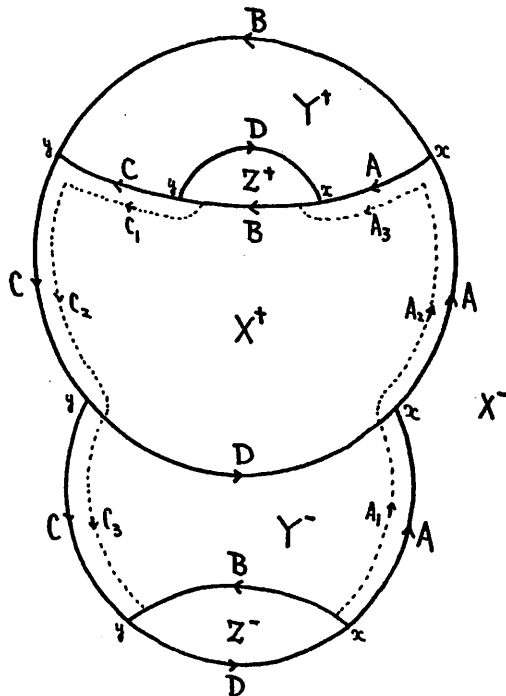


図 1 池田 (2-6) という *DS-diagram*  $\Delta$  とその中の *2-label*  $X = AABCCD$

この *DS-diagram* のひとつの 2-label  $X = AABCCD$  に対応する *DS-knot*  $K(X)$  は, *spine*  $f(\Delta) \subset S^2 \times S^1$  の *open 2-disk*  $f(X)$  を 1 回だけ通過する *simple loop* であるが, それは  $\{x\} \times S^1 \subset S^2 \times S^1$

(と *ambient isotopic*) である (図 2 参照)。したがって  $K(X)$  の *homotopy class* を  $t$  とすると,  $t$  は  $\pi_1(S^2 \times S^1) = Z \sim \langle t \mid \rangle$  の *generator* である。ちなみに他の 2-labels  $Y = A'BC'D'$ ,  $Z = B'D'$  に対応する *DS-knot*  $K(Y)$  および  $K(Z)$  の *homotopy class* はそれぞれ  $2t$  および  $3t$  である。この事実も図 1 または図 2 から分かる。

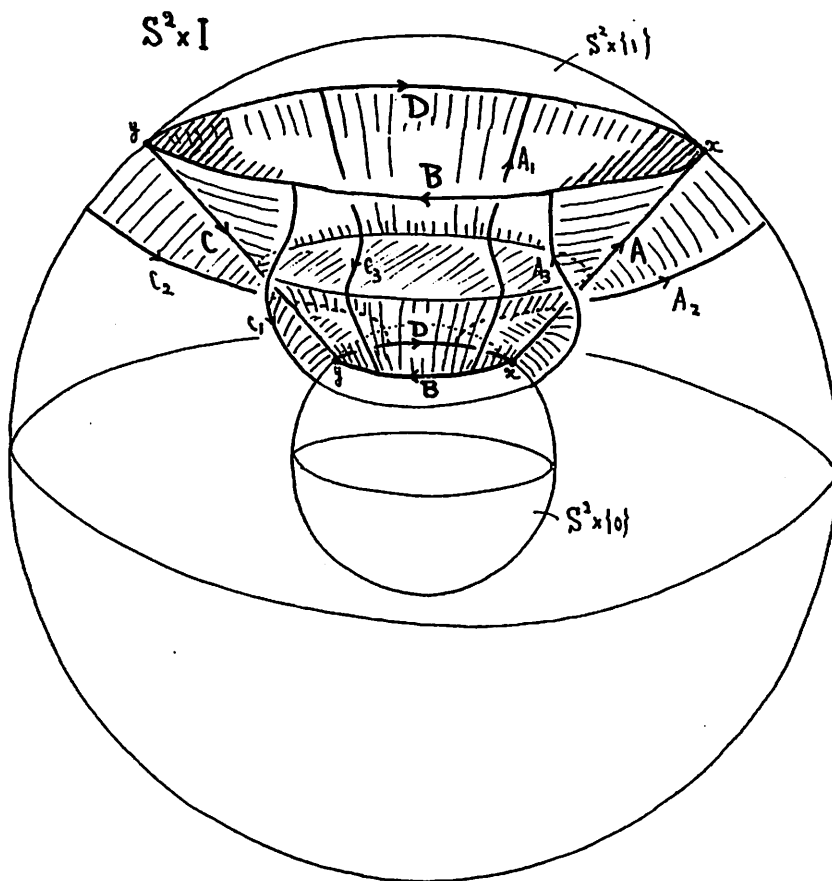


図 2 池田 (2-6) に対応する  $S^2 \times S^1 - \text{Int}B^3$  の *spine* の素

上の図 2 は図 1 の *DS-diagram* に対応する *closed fake surface* の作り方を示唆したものである。図では  $S^2 \times I$  のなかに *closed fake surface* の素が仕込んである。2-label (すなわち  $S^2 \times S^1$  内の 2-cell)  $X = AABCCD$  を作るために,  $S^2 \times I$  内で  $A_2A_1BC_1C_2D$  に 2-cell を貼っておく。Y, Z の素も作っておく。そこで天  $S^2 \times \{1\}$  と底  $S^2 \times \{0\}$  を自然に貼り合わせる。すると  $S^2 \times S^1$  内に欲しかった *closed fake surface* も自然に求めることができる。

さて、この *DS-diagram*  $\Delta$  の *DS-knot*  $K(X)$ ,  $X = AABCCD$ , を実現する  $m$  本の平行な *knots* の *tubular nbd* を取り除くと直積空間  $F(m) \times S^1$  が得られる。ここで  $F(m)$  は球面  $S^2$  から  $m$  個の穴を開けて得られる *punctured 2-sphere* (=穴あき *disk*) である。

$F(m) \times S^1$  には自明な *fiber* 構造を入れておく。 $m = 1, 2, 3$  の場合には、このような *trivial Seifert fiber space*  $F(m) \times S^1$  の *DS-diagram* はそれぞれ図3, 図6, 図7のようになる。

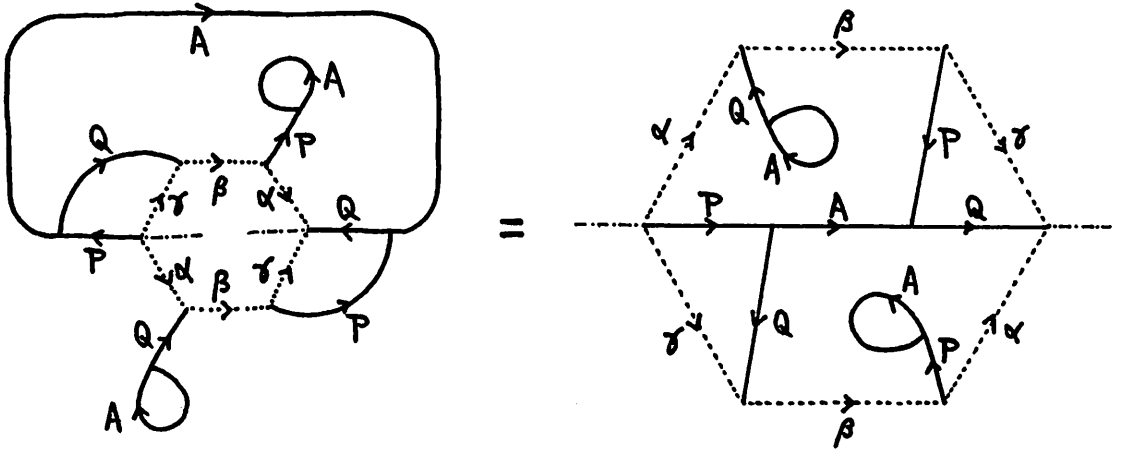


図3 :  $F(1) \times S^1$  の *DS-diagram*

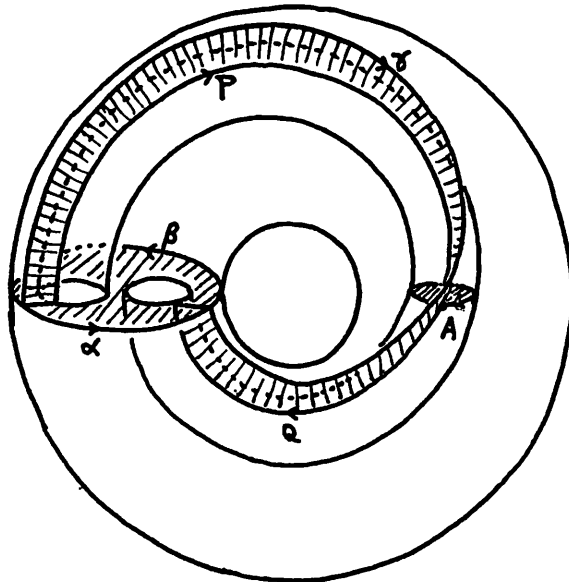


図4 :  $D^2 \times S^1 - \text{Int} B^3$  の *spine* (坪井さん作)

図3は *solid torus*  $D^2 \times S^1$  の *DS-diagram* であるが、さらに  $0/1$  型 (=直積型) の *fibred solid torus* の構造を内蔵した *DS-diagram* にもなっている。これらの事実を説明するにはどうすればいいかと思案していたら、坪井恵子さんが彼女の宝石箱からこの *DS-diagram* に対応する *spine* (図4) を取り出して見せてくれた。

$Int(D^2 \times S^1)$  のなかに小さな  $3\text{-ball } B^3$  を選び  $W = D^2 \times S^1 - Int B^3$  をうまく *collapse* してゆくと、この *spine* が得られる。図3はこの *spine* に対応している *DS-diagram* であるので、この *spine* を観察すれば上の事実是一目瞭然である。なるほど。

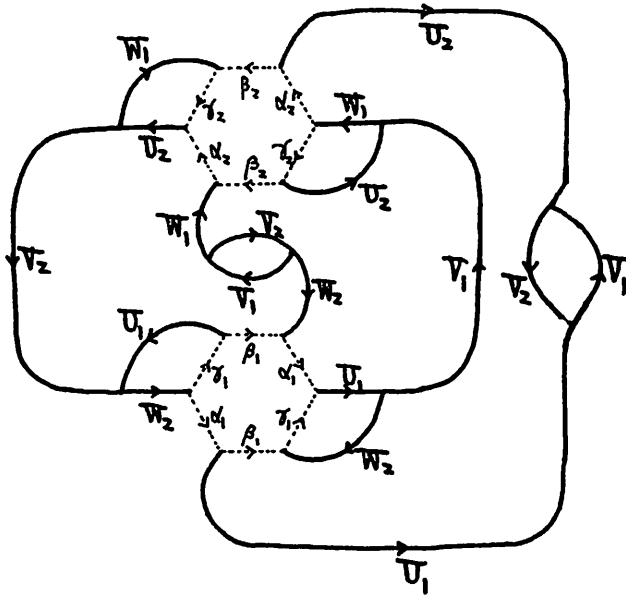


図5 :  $F(2) \times S^1$  の *DS-diagram*

この図5の *2-gon* をつぶすと図6のようになる。特殊な場合を除いてはこちらのほうが便利である。図5 (あるいは図6) のなかにある2つの六角形は、 $F(2) \times S^1$  の境界  $\partial(F(2) \times S^1)$  である2つのトーラスを表している。

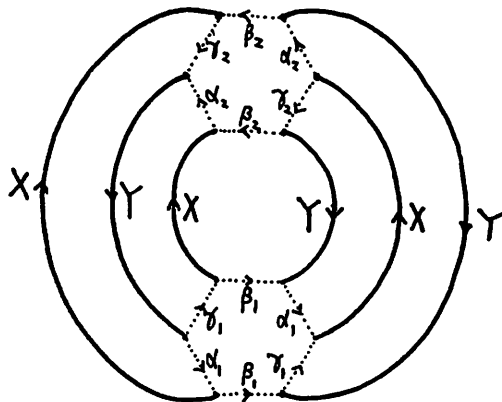


図6 :  $F(2) \times S^1$  の (簡略化された) *DS-diagram*

下の図7は  $S^2 \times S^1$  から3本の平行な *solid torus* (の内部) を取り除いた  $F(3) \times S^1$  の *DS-diagram* である。3つの六角形はそれぞれ  $\partial(F(2) \times S^1)$  の連結成分であるトーラス部分を表している。

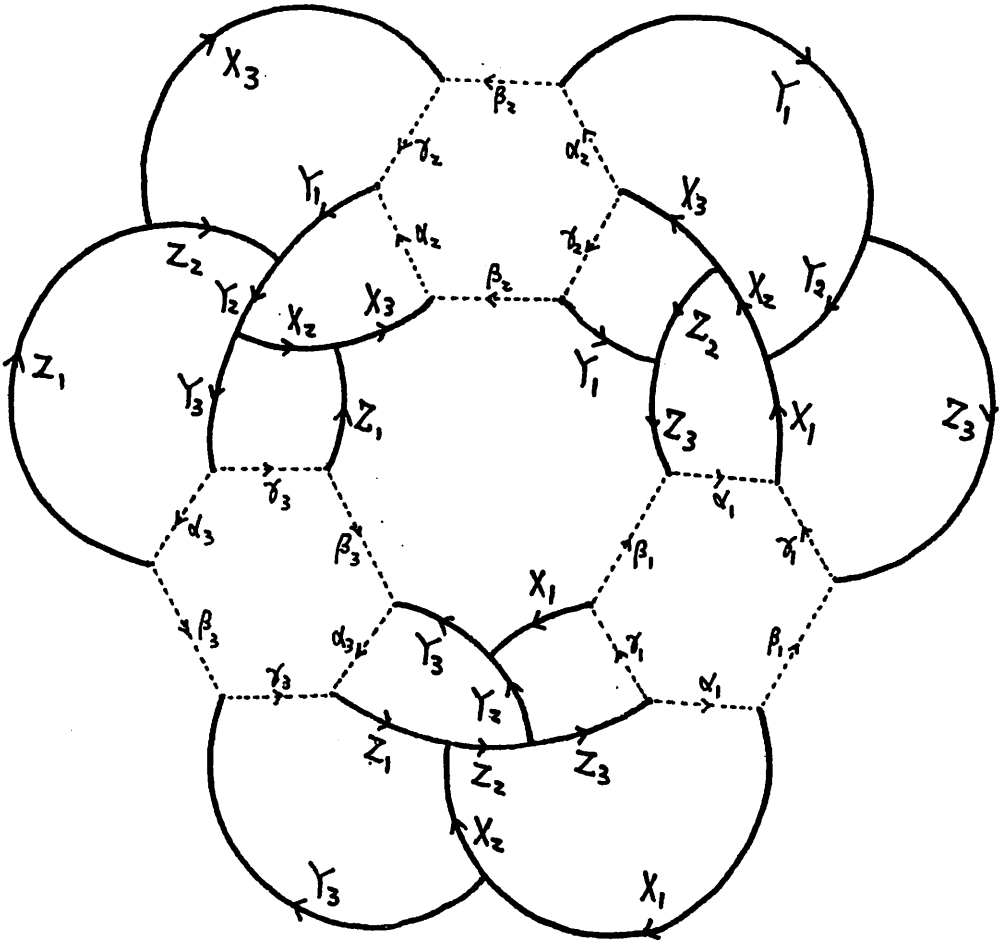


図7 :  $F(3) \times S^1$  の *DS-diagram*

一般に、 $F(m) \times S^1$  には *trivial* な *fiber* 構造が入れているので、境界部分の各連結成分であるトーラスにおいてもそれぞれの *fiber* は (よじれることなく) まっすぐに走っている。このトーラス部分に  $q/p$  型の *fibered solid torus* を自然に張り付けるためには、 $q/p$  型の *fibered solid torus* の境界であるトーラスにおいて *fiber* がまっすぐに走っているような *DS-diagram* を用意する必要がある。その工夫をした *DS-diagram* について解説することがこの報告の主な目的である。

2. *fibred solid torus* の *DS-diagram* の (豚才流) 作り方

多面体表現を *DS* 化する例のやり方で,  $q/p$  型の *fibred solid torus* の *DS-diagram* を求めた。ワンパターンである。その作り方の概略を  $p = 7$  の場合について述べておこう。

$2/7$  型の *fibred solid torus* は図8のように, *torus* 上を7周している(というか, "meridean と7回交わっている") 1本の *fiber* に平行な *fibers* で表面を埋めつくし, その *fiber* 構造を保つように *solid torus* 全体に *fiber* 構造を拡張して得られる。したがって  $2/7$  型の *fibred solid torus* の多面体表示は以下のようにして作ることができる。

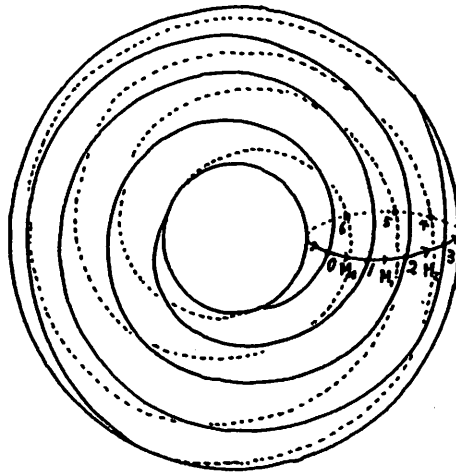


図8 :  $2/7$  型の *fibred solid torus*

まず, 図8の *fibred solid torus* を meridean disk  $D_M$ ,  $\partial D_M = M = M_0 M_1 M_2 M_3 M_4 M_5 M_6$ , で切って  $D^2 \times I$  の形にする。そこで, デコレーションケーキ  $D^2 \times I$  を7等分になるように縦に切る(図9)。すると  $V_k \times I$  の形のショートケーキが7個できる。ただし,  $V_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, 6$ ) とは円板  $D^2$  を7等分した扇形のことである。

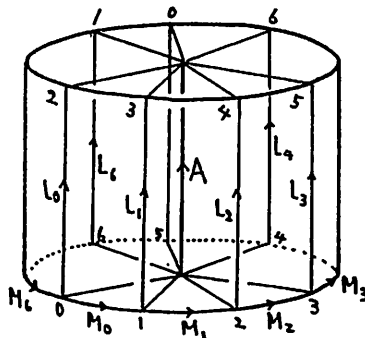


図9 :  $D^2 \times I$  を縦に7等分する

そこでまず1個目のショートケーキ  $U_0 = V_0 \times I$  をテーブルの上に置く。その上に2番目のケーキ  $U_1 = V_1 \times I$  を積み上げる。さらにその上に  $U_2 = V_2 \times I \pmod{7}$  を積み上げる。このようにして次々に  $U_i = V_i \times I \pmod{7}$  を積み上げてゆくと7層からなるショートケーキの塔 (図10の左の絵) ができる。この塔の丸っこい壁面は“上に向かってまっすぐに伸びた平行線分の集まり”からできているものとする。これらの1本1本がトラス上に乗っている *fiber* である。

さてこのケーキの塔は目的の *fibred solid torus* の多面体表現であるが、これを *DS* 化する必要がある。まず、境界部分である湾曲壁面上の (途中階を示す) 無駄な横線  $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$  をすべて消す。さらに、平らな2枚の側面から無駄な横線  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$  を消す。すると、それぞれの平らな壁面にはラベル  $B_0$  および  $B_1$  を持った線分だけが途中階を示す横線として残る (図10の右の絵)。

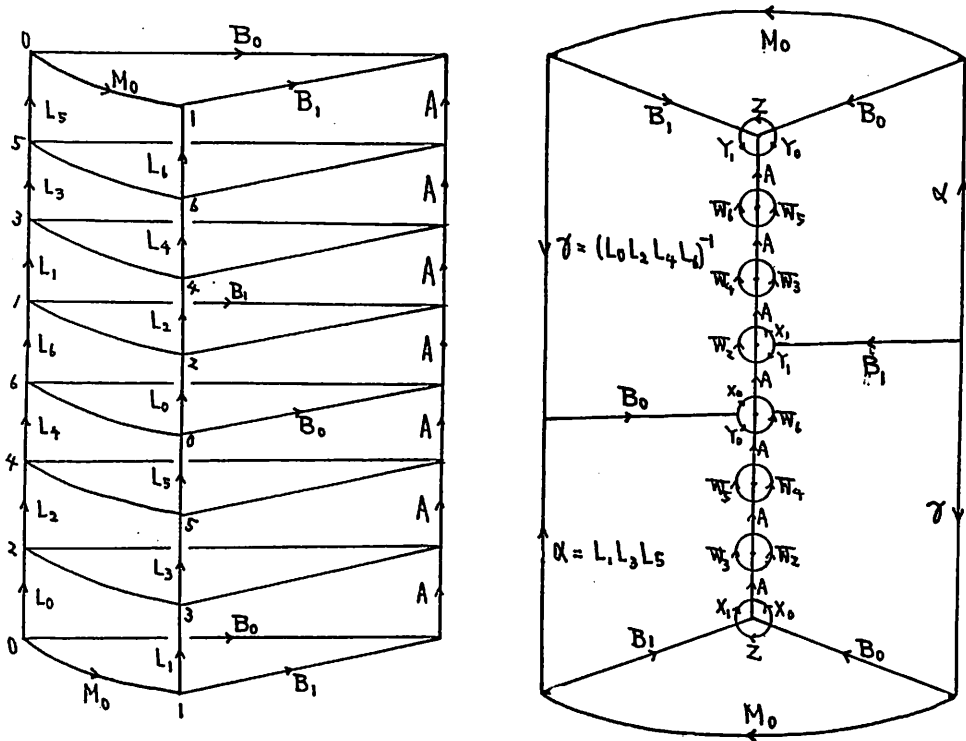


図10：ケーキの塔

*fibred solid torus* の中心線はこの塔の柱として7本積み上がっているが、それらを解消するために、まずそれらの端点 (=図10右絵の8個の小円の中心) の近傍をくりぬきくことにする。これらの端点はすべて同じラベルを持っているからそのラベルを仮に  $\nu$  としておくと、これらの近傍を集めたものは  $\nu$  の (*fibred*) *solid torus* における *star* すなわち  $st(\nu, D^2 \times S^1)$  となる (図11)。



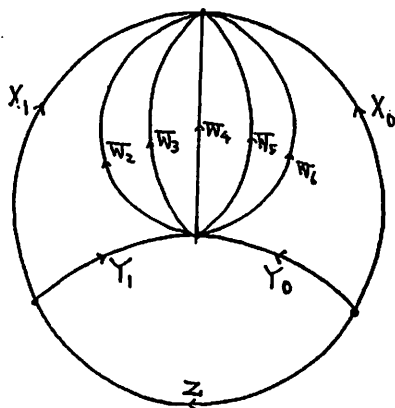


図 1 1 :  $st(v, D^2 \times S^1)$

この  $st(v, D^2 \times S^1)$  を  $DS$  化のための専用ボンドで本体 (図 1 0 の右の絵) に付け直す (図 1 2)。

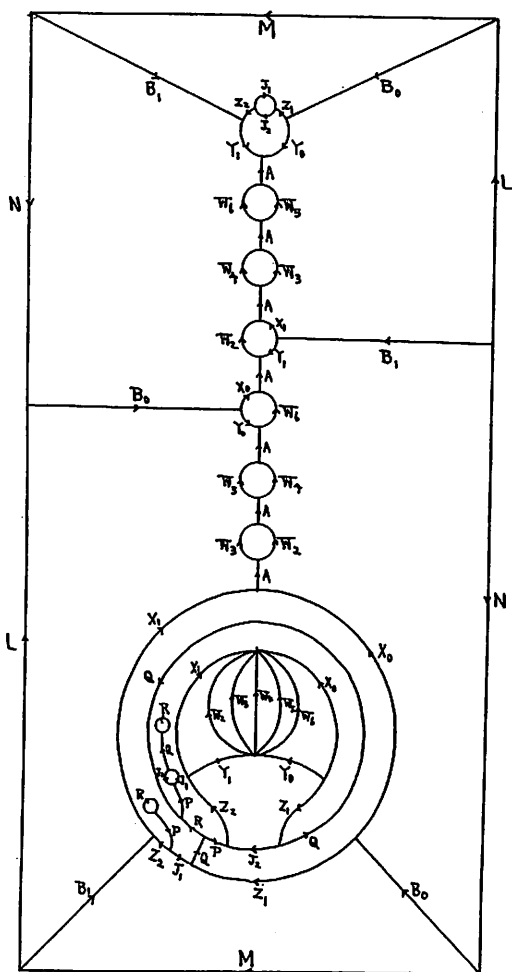


図 1 2 : 2/7型 fibered solid torus の  $DS$ -diagram まであと一歩 . . .

DS化を成就させるために、 $l$ -label  $A$  に沿って図12を *piping* 加工してやれば、ともかく荒削りの *DS* ができる。これを研磨加工すると、頂点数は少なく対称性は高く、しかも *E-cycle* を持った石井流のすっきりした製品に仕上がる (図13)。

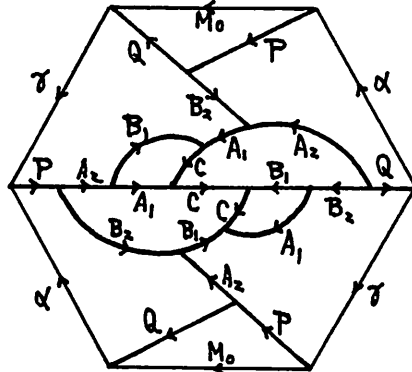


図13 : 2/7型 *fibered solid torus* の *DS-diagram* について完成!

$q/7$  型の *fibered solid torus* の *DS-diagram* は、 $q$  の値の違いが図10右での横線  $B_0$  と  $B_1$  がどの階に現れるかの違いとして反映されるぐらいのものだが、それでも出来上がりの *DS-diagram* の図はだいぶ違ったものになる。それらを列挙しておく。

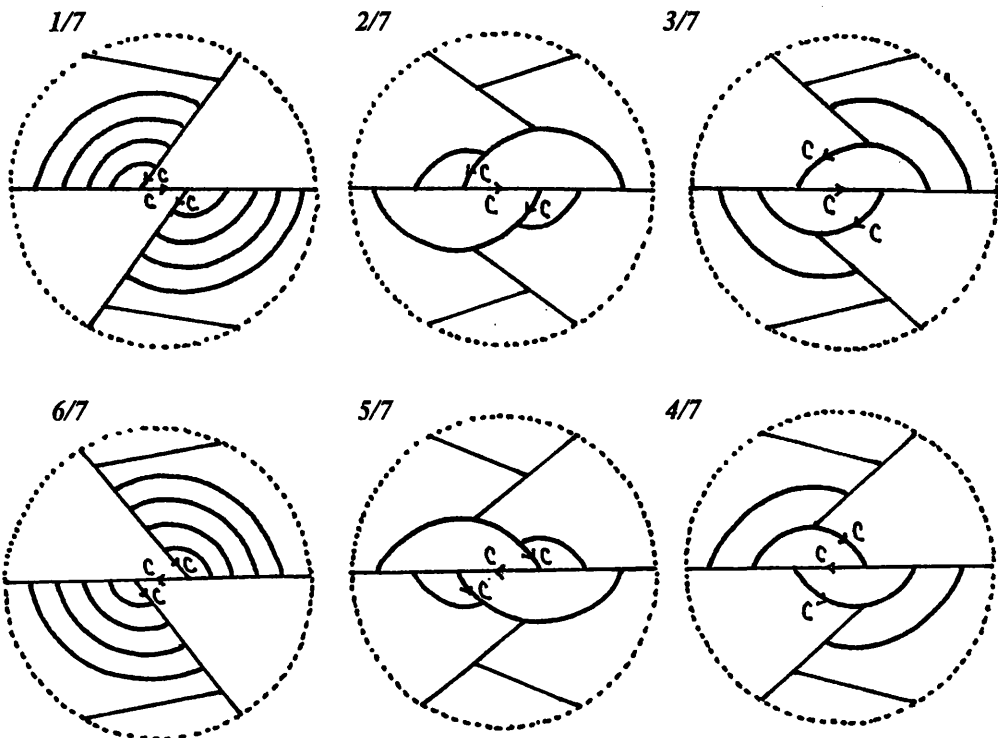


図14 :  $q/7$ 型 *fibered solid torus* の *DS-diagrams* 一覧

3. fibered solid torusと連分数

fibered solid torus で一番簡単なものは  $0/1$  型, すなわち *trivial fibered solid torus* である. また, つぎに簡単なものは  $1/2$  型であろう. ところが, これらの *DS-diagram* を前節の方法で作ろうとすると, (あまりに構造が簡単すぎるため, とっかかりが少なく) 結構苦勞する. それはともかく, 結果の *DS-diagram* は図 15 のとおりである. ところがそれらをよく見ると図 3 や図 6 によく似ている. 少し考えるとその理由も分かってくる.

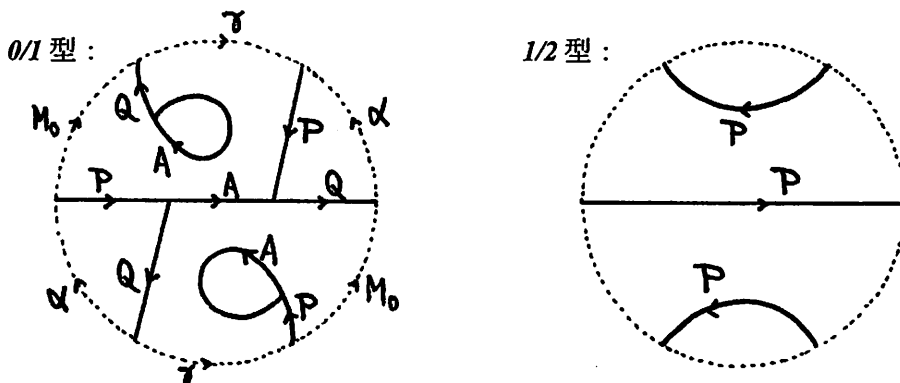


図 15 :  $0/1$ 型と $1/2$ 型の fibered solid torus の *DS-diagram*

さて,  $q/p$  型 ( $1 \leq q \leq p-1$ , かつ  $p, q$  は互いに素) の fibered solid torus の *DS-diagram* の例をいくつかの場合について求めてみた. ところがこれらの図はすべて, 石井氏の 15 年前の報告:

"*DS-diagram* 上の *Dehn surgery*", 箱根セミナ記録 89(1989), 1 - 6.

によって, すでに世に提供されていたものであった. 石井氏がそれらの *DS-diagram* をどのようにして作られたのか, そのへんの事情は豚才にはさっぱり分からない.

図 14 から分かりますとおり, 一般に

" $q/p$  型と  $1-q/p$  型の *DS-diagram* は互いに鏡像の関係"

にある. また,  $1/p$  型 ( $p \geq 3$ ) の fibered solid torus の間には下の図のような関係がある.

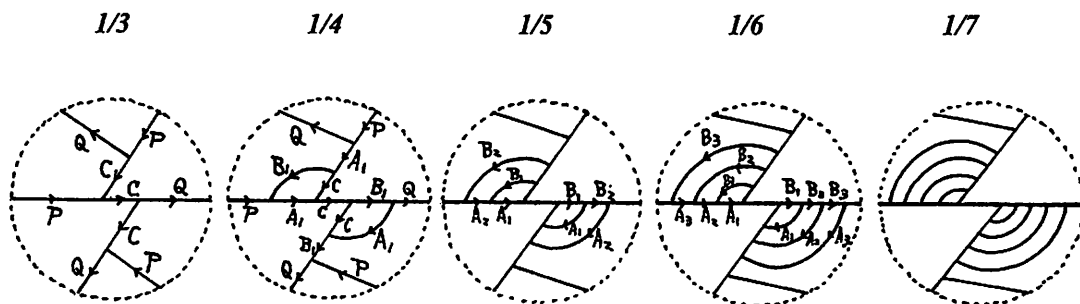


図 16 :  $1/p$ 型の fibered solid torus の *DS-diagram*

ところで、作例の図をいくら眺めてみても、” $q/p$  型の *fibred solid torus*” という特徴は、それ以上にも見えてこなかった。その悩みを漏らしたところ、石井氏は即座に「連分数だよ」とおっしゃった。「何？レンプンスウ？」小生には何のことだかさっぱり分からなかった。*fibred solid torus* と連分数、そのあいだに何があるというのか。分からないまま数ヶ月が経った。そしてまた、上智セミナーの折りに同じ悩みをつぶやいた。するとすかさず「連分数だね」という石井氏の声。河野氏も同意しておられた。

$p \leq 8$  に対する *DS-diagrams* の図を作るのに長いうっとうしい時間を必要としたので、これ以上の *DS* を作る元気もなかったが、いくら観察してみても豚才にはなんの規則性も見いだすことはできなかった。とうとう、作例が少なすぎるのだ、とあきらめた。覚悟を決めて、さらなる制作に取りかかることにした。そして、互いに素な対  $(p, q)$  の  $p \leq 15$ ,  $1 \leq q \leq p-1$  であるものすべてに対して *DS-diagram* を作った。それらを眺める毎日。なんにも見えてこない毎日。石井大神の御託宣

「*fibred solid torus* の *DS* は連分数！」

は豚才の意識の外にあった。しかしやがて石井氏の”連分数”という言葉思い出し、とりあえず、それらの *DS-diagram* を連分数表示に従って並べてみることにした。何も出てこなくとも構わない、となかばふてくされていたかもしれない。

$1 \leq q \leq p-1$  なる (互いに素な) 自然数  $p, q$  からなる有理数  $q/p$  を連分数で表すことにする。 $0 < q/p < 1$  であるから、連分数は整数部分を含まない形で表すことができる。そこでそのような連分数の記号として

$$[a_1, a_2, \dots, a_k] = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_k}}}}$$

を導入する。(通常は整数部分  $a_0$  を先頭において  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_k]$  と書くようである。この流儀に従うと、我々の場合ではいつでも  $a_0 = 0$  なので、 $[0, a_1, a_2, \dots, a_k]$  ということになる。この先頭の「0」を省略した。)

いくつかの簡単な連分数を列記しておく。

$$[a] = \frac{1}{a}$$

$$[a, b] = \frac{1}{a + \frac{1}{b}} = \frac{b}{ab+1}$$

$$[a, b, c] = \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}} = \frac{bc + 1}{a(bc + 1) + c}$$

$$[a, b, c, d] = \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}}} = \frac{b(cd + 1) + d}{(ab + 1)(cd + 1) + ad}$$

さて,

$$1/2 = [2] = [1, 1]$$

である。また,

$$\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_k], \quad a_i \text{ は自然数,}$$

とすると, つぎのような事実がなりたつ。

**Proposition.** (1)  $0 < \alpha < 1/2$  ならば,  $\alpha$  は

$$\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_k], \quad a_1 \neq 1, a_k \neq 1,$$

の形の連分数として一意に表すことができる。

(2)  $\alpha = [1, a_2, \dots, a_k]$  ならば,  $1/2 \leq \alpha < 1$  である。

さらにつぎのような関係式がなりたつ。

$$[1+a] + [1, a] = 1$$

$$[1+a, b] + [1, a, b] = 1$$

$$[1+a, b_1, b_2] + [1, a, b_1, b_2] = 1$$

これを一般化するとつぎのようになる。

**Proposition.**  $\alpha = [1+a, b_1, b_2, \dots, b_k], \beta = [1, a, b_1, b_2, \dots, b_k]$  ならば

(1)  $0 < \alpha \leq 1/2 \leq \beta < 1,$

(2)  $\alpha + \beta = 1.$

いっぽう,  $0 < q < p$  のとき,  $q/p$  型の *fibred solid torus* の *DS-diagram* の鏡像は,  $(1 - q/p)$  型の *fibred solid torus* の *DS-diagram* になる。したがって,  $\alpha \leq 1/2$ , すなわち

$$\alpha = q/p = [a_1, a_2, \dots, a_k], \quad a_1 \geq 2, a_i \text{ は自然数,}$$

の場合についてだけ,  $q/p$  型の *fibred solid torus* の *DS-diagram* を調べておけばよい。

$p \leq 15$  に対して求めた *DS-diagrams* と, それから推測して得たものを図表にしてみた (図 1 7 ~ 図 2 2)。

いまやっと, 石井氏のご託宣の意味を知ることができた。そして, . . . あきれた。

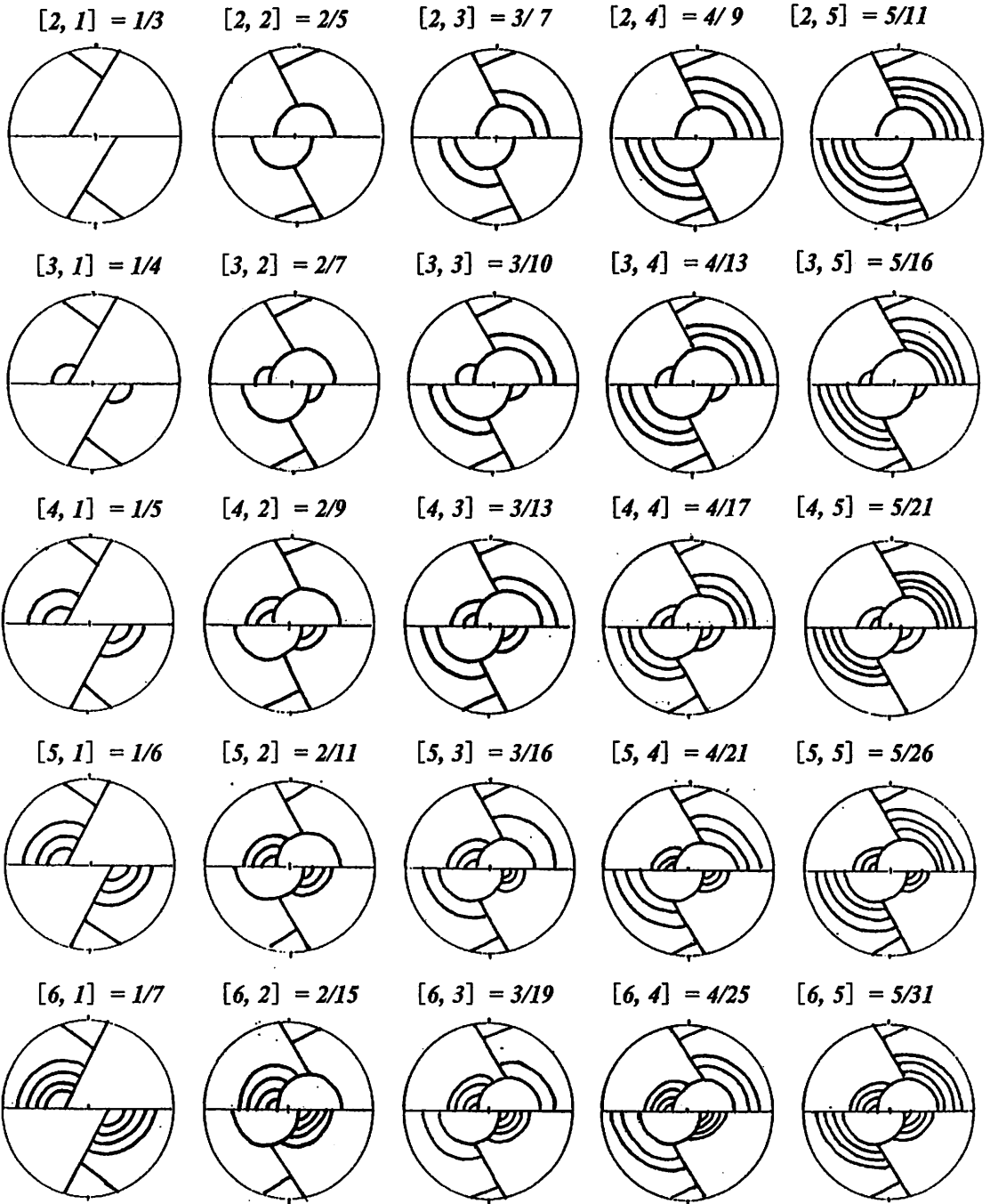
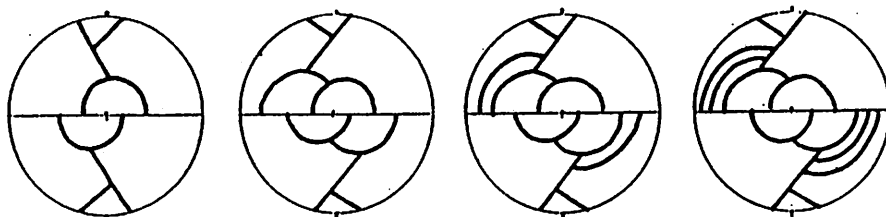
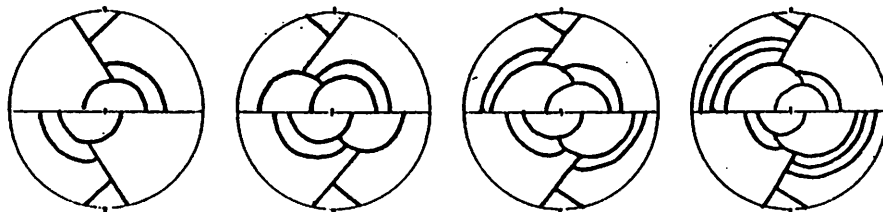


图 17 :  $q/p = [a, b]$

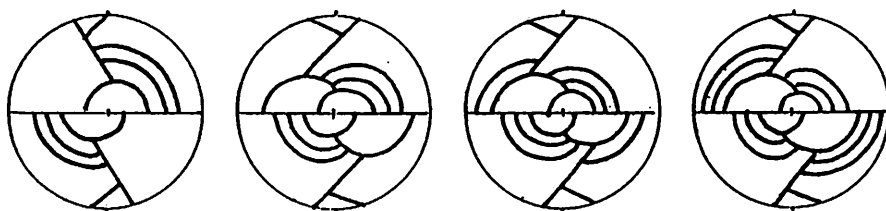
$[2, 1, 1] = 2/5$     $[2, 1, 2] = 3/8$     $[2, 1, 3] = 4/11$     $[2, 1, 4] = 5/14$



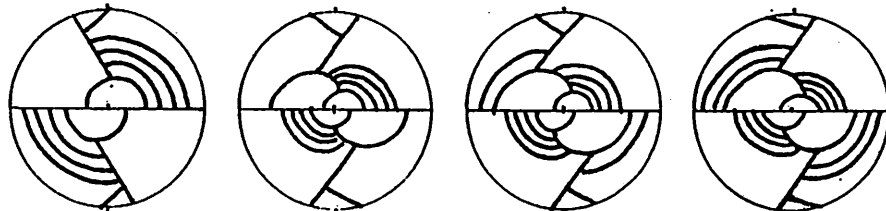
$[2, 2, 1] = 3/7$     $[2, 2, 2] = 5/12$     $[2, 2, 3] = 7/17$     $[2, 2, 4] = 9/22$



$[2, 3, 1] = 4/9$     $[2, 3, 2] = 7/16$     $[2, 3, 3] = 10/23$     $[2, 3, 4] = 13/30$



$[2, 4, 1] = 5/11$     $[2, 4, 2] = 9/20$     $[2, 4, 3] = 13/29$     $[2, 4, 4] = 17/38$



$[2, 5, 1] = 6/13$     $[2, 5, 2] = 11/24$     $[2, 5, 3] = 16/35$     $[2, 5, 4] = 21/46$

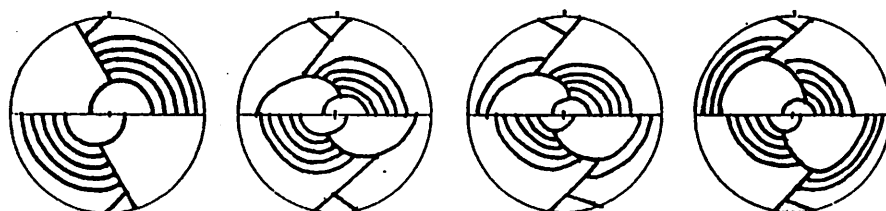
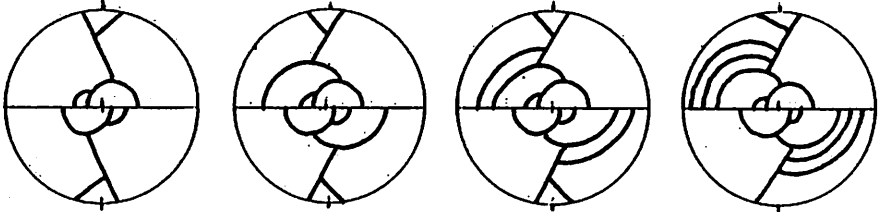
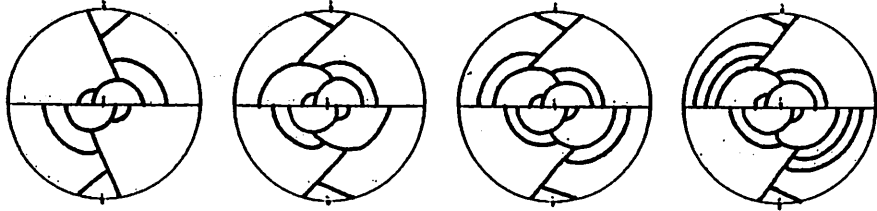


图 18 :  $q/p = [2, b, c]$

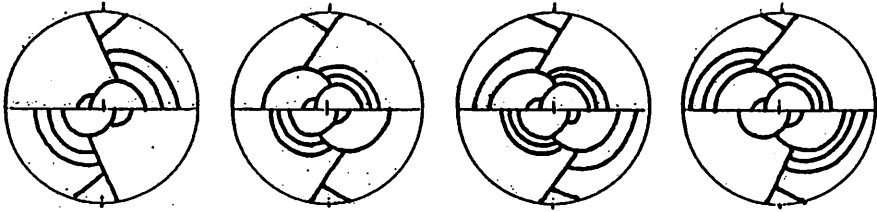
$[3, 1, 1] = 2/7$     $[3, 1, 2] = 3/11$     $[3, 1, 3] = 4/15$     $[3, 1, 4] = 5/19$



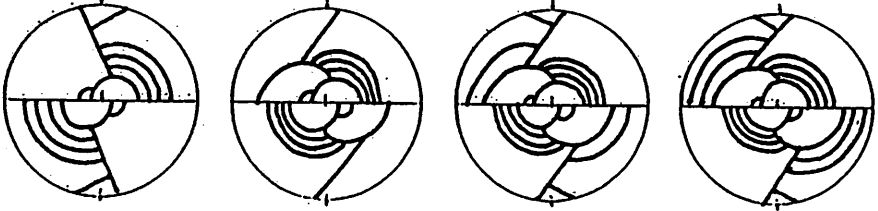
$[3, 2, 1] = 3/10$     $[3, 2, 2] = 5/17$     $[3, 2, 3] = 7/24$     $[3, 2, 4] = 9/31$



$[3, 3, 1] = 4/13$     $[3, 3, 2] = 7/23$     $[3, 3, 3] = 10/33$     $[3, 3, 4] = 13/43$



$[3, 4, 1] = 5/16$     $[3, 4, 2] = 9/29$     $[3, 4, 3] = 13/42$     $[3, 4, 4] = 17/55$



$[3, 5, 1] = 6/19$     $[3, 5, 2] = 11/35$     $[3, 5, 3] = 16/51$     $[3, 5, 4] = 21/67$

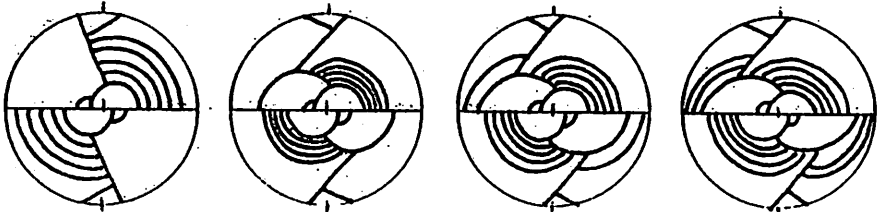
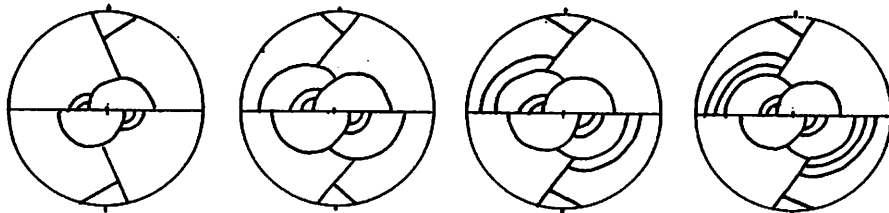


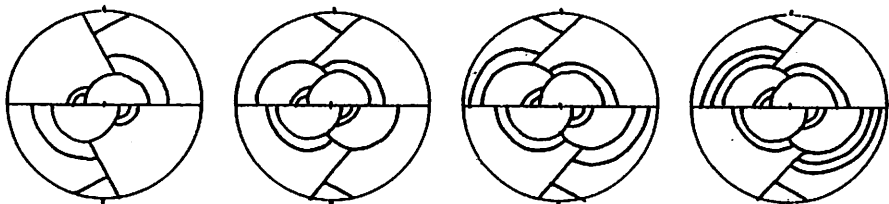
图 19 :  $q/p = [3, b, c]$



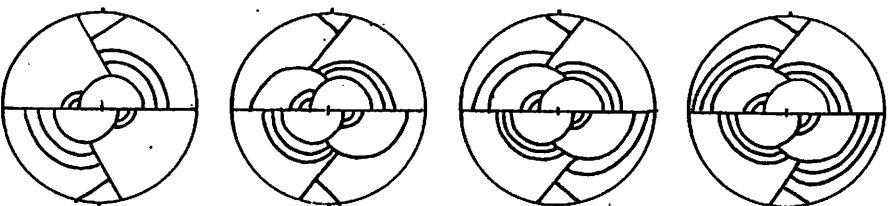
$[4, 1, 1] = 2/9$     $[4, 1, 2] = 3/14$     $[4, 1, 3] = 4/19$     $[4, 1, 4] = 5/24$



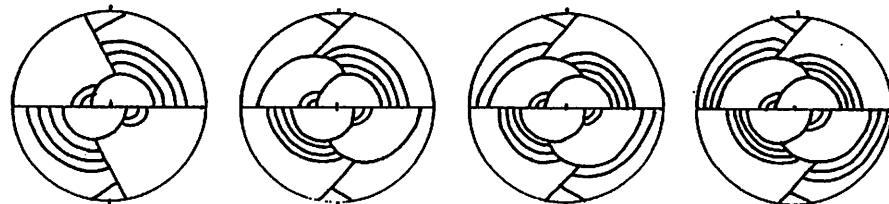
$[4, 2, 1] = 3/13$     $[4, 2, 2] = 5/22$     $[4, 2, 3] = 7/31$     $[4, 2, 4] = 9/40$



$[4, 3, 1] = 4/17$     $[4, 3, 2] = 7/30$     $[4, 3, 3] = 10/43$     $[4, 3, 4] = 13/56$



$[4, 4, 1] = 5/21$     $[4, 4, 2] = 9/38$     $[4, 4, 3] = 13/55$     $[4, 4, 4] = 17/72$



$[4, 5, 1] = 6/25$     $[4, 5, 2] = 11/46$     $[4, 5, 3] = 16/67$     $[4, 5, 4] = 21/88$

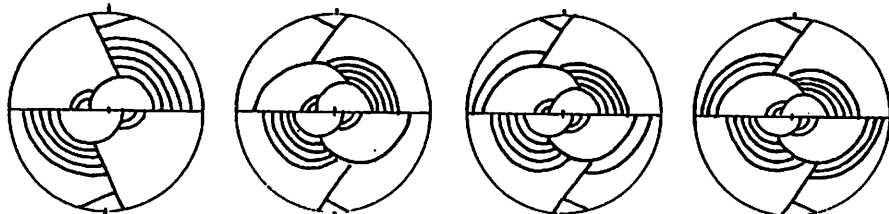


图 20 :  $q/p = [4, b, c]$

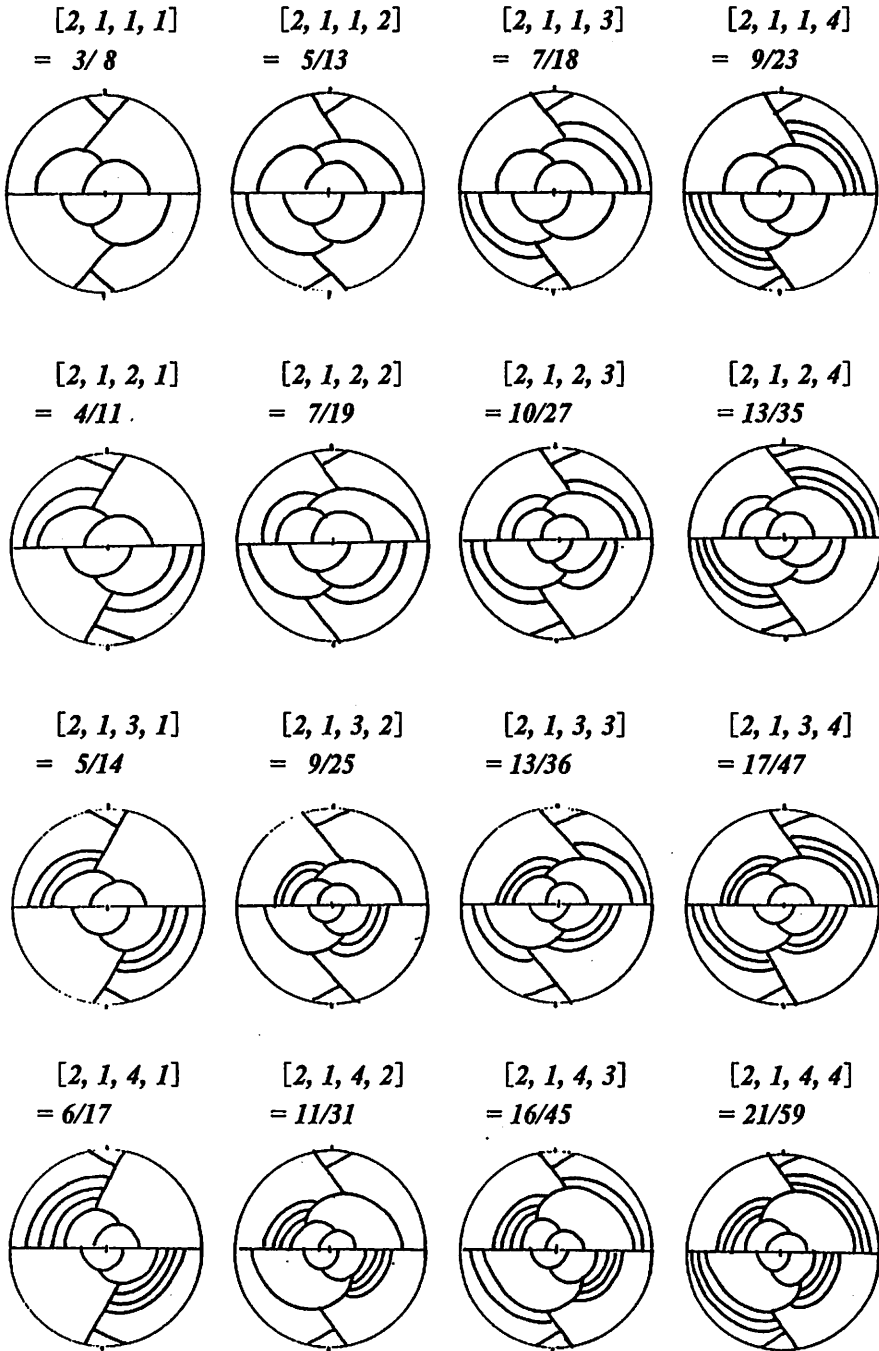


图 21 :  $q/p = [2, 1, c, d]$

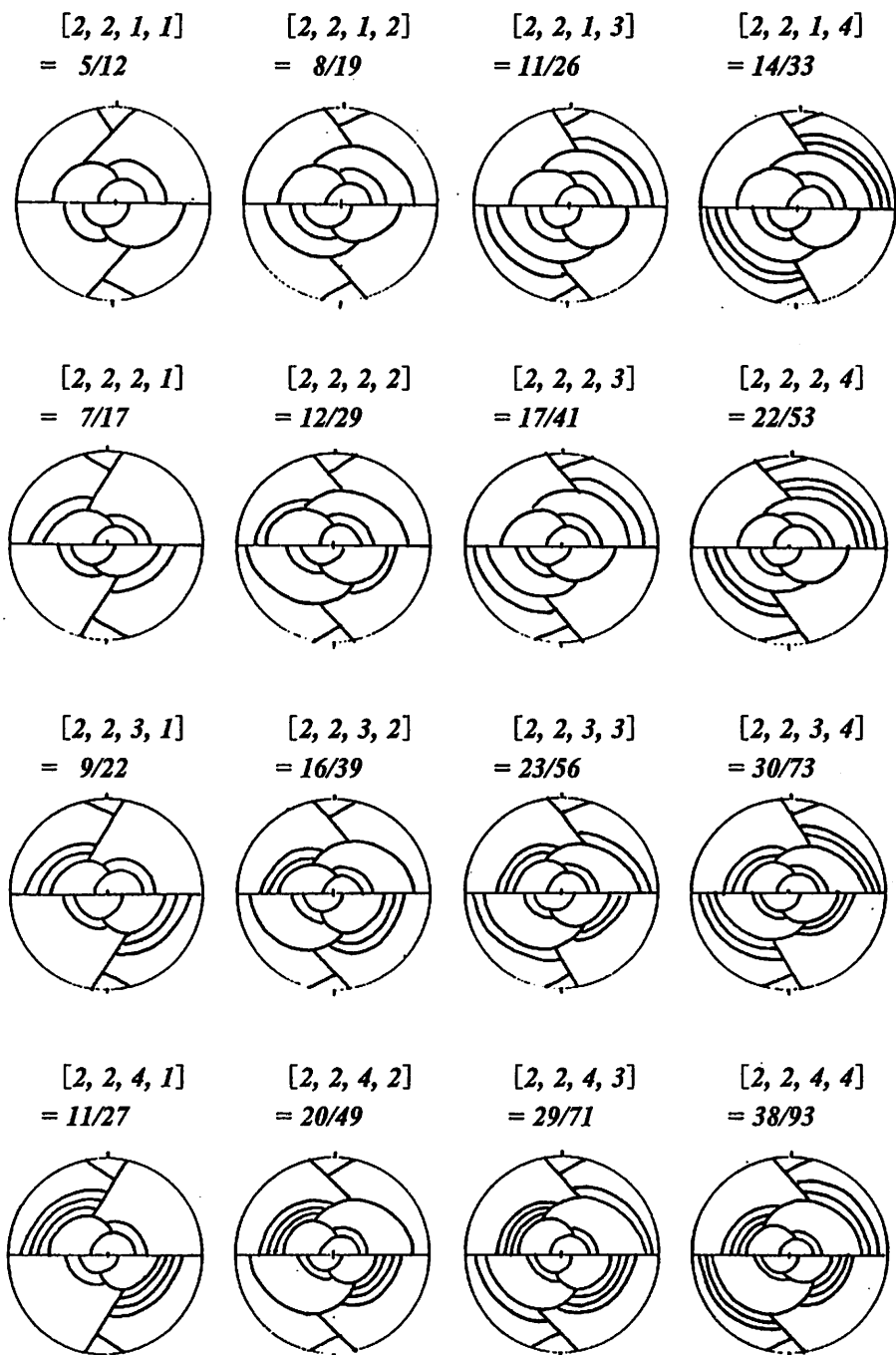


图 2.2 :  $q/p = [2, 2, c, d]$

4. fibered solid torusのDS-diagramの連分数構造

前節の図表 (図 1 7 ~ 図 2 2) では, DS-diagram の 1-cell には一切ラベルがつけられていない。「図が煩雑になるから」というのがその理由であるが, じつは, それらが DS-diagram である, ということから, 各 1-cell のラベルは自然に定まってしまう。すなわち, DS-diagram の連分数構造を利用して, ラベルの定め方も帰納的に記述することができるのである。

帰納法の出発点は

$$\alpha_0 = [3] = 1/3$$

である。

1/3 型の fibered solid torus の (ラベル付きの) 絵は図 1 6 の左端に描いてある。また, 図 1 6 の

$$1/3 \text{ 型} \rightarrow 1/4 \text{ 型} \rightarrow 1/5 \text{ 型} \rightarrow 1/6 \text{ 型} \rightarrow 1/7 \text{ 型} \rightarrow \dots$$

の変化を観察すると,  $[n+3] = 1/(n+3)$ ,  $n \geq 1$ , の絵は,  $[n+2] = 1/(n+2)$  の絵に 2 種類の 1-labels  $A_n$  と  $B_n$  を追加した形であることが分かる。

さて, 図 1 7 をご覧頂きたい。その仕組みを考えてみよう。まず,

$$[n, 1] = [n+1] = 1/(n+1)$$

であることに注意すると, 図 1 7 の左端の縦列に現れる  $[a, 1]$  型の絵は図 1 6 の系列のなかで既に得られていることが分かる。これらの絵を出発点として, 各行について右へ右へと眺めて行く。たとえば 3 行目の絵:

$$[4, 1] \text{ 型} \rightarrow [4, 2] \text{ 型} \rightarrow [4, 3] \text{ 型} \rightarrow [4, 4] \text{ 型} \rightarrow [4, 5] \text{ 型} \rightarrow \dots$$

を鑑賞してみよう。

まず, 絵の左端の変化:  $[4, 1] \text{ 型} \rightarrow [4, 2] \text{ 型}$  (図 2 3) について観察する。

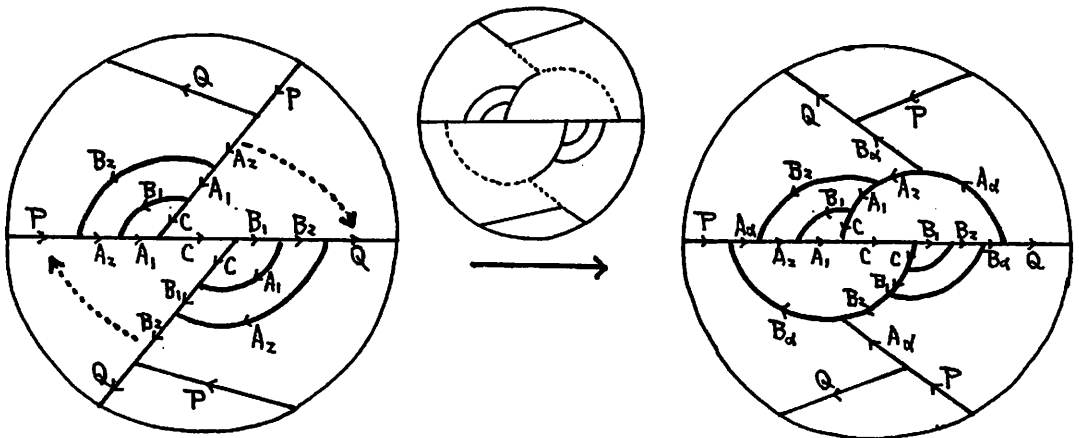


図 2 3 : Bending  $b_{[4]}$ :  $[4, 1]$  型  $\rightarrow$   $[4, 2]$  型

$[4, 1] = [5] = 1/5$ であるから,  $[4, 1]$ 型の *DS-diagram* として, 図 16 で示された  $[5]$ 型のもの (図 23 の左の絵) を用いることができる。それを

$$\Delta([5]) = \{C, A_1, A_2, B_1, B_2, P, Q \mid \\ B_1 A_1 C', A_1 B_1 A_2' B_2', P' A_2 A_1 C C B_1 B_2 Q', P' B_2' A_2' Q', P' Q'\}$$

と書いておこう。その内容は (境界円上にあるもの以外の) *1-labels* の全体

$$C, A_1, A_2, B_1, B_2, P, Q$$

および *2-labels* (またはその一部) の全体

$$B_1 A_1 C', A_1 B_1 A_2' B_2', P' A_2 A_1 C C B_1 B_2 Q', P' B_2' A_2' Q', P' Q',$$

で構成されている。

同じ書き方をすれば, 図 23 の右絵で示された  $[4, 2]$ 型の *DS-diagram*  $\Delta([4, 2])$ は

$$\Delta([4, 2]) = \{C, A_1, A_2, B_1, B_2, \underline{A_\alpha}, \underline{B_\alpha}, P, Q \mid \\ B_1 A_1 C', A_1 B_1 A_2' B_2', A_\alpha A_2 A_1 C C B_1 B_2 B_\alpha, P' B_\alpha' A_\alpha' Q', \\ P' A_\alpha B_\alpha' A_2' B_\alpha Q, P' Q'\}$$

となる。ただし,  $\alpha = [4, 1] = [5]$ である。

$[4, 1]$ 型から  $[4, 2]$ 型に移る変形を  $[5]$ 型の *Bending* または *B-move* といい,

$$b_{[5]}: [4, 1] \text{型} \rightarrow [4, 2] \text{型}$$

と表す。そのわけは, 図 23 のなかの点線で示した補助線にある。

傾いた竹を地面まで曲げて, ヒヨドリを捕まえるための罾を掛けた記憶がぼんやりと脳裏に浮かぶ。思えば子供の頃から残酷なことばかりやってきたもんだ。小生に捕まえられるような間抜けなヒヨドリが 1 羽もいなかったのが, まあよかったってことか。

気に入らぬ 風もあろうに 柳かな

誰の句だか, 不勉強で知らないのだが, 昔の人はうまいことをいうもんだ。

雪に覆われてしまっている竹は, 雪が解ければまたいずれ元通りになる。竹や柳は, その柔らかさや強さのために, 人生の指針などにもよく引き合いに出されるようだ。(訓話や指針のとおり生きる, なんてそうは簡単に問屋が下ろさないけどね。)

さて, 一般の

$$\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k], \quad a_k \geq 2,$$

に対して

$$[a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k] = [a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k - 1, 1]$$

がなりたつ。したがって,

$$\alpha = [\beta, 1], \quad \beta = (a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k - 1)$$

に対しても, この *Bending* という操作

$$b_\alpha: [\beta, 1] \rightarrow [\beta, 2]$$

を定義することができる。その方法は,  $b_{[5]}: [4, 1] \text{型} \rightarrow [4, 2] \text{型}$ のときとまったく同様に, 傾斜している青竹をその側に曲げてやればよい。

さて図17の3行目の絵に戻ってみる。

[4, 2]型 → [4, 3]型 → [4, 4]型 → [4, 5]型 → . . . . .  
 の2番目の変化: [4, 2]型 → [4, 3]型 (図24) について観察する。

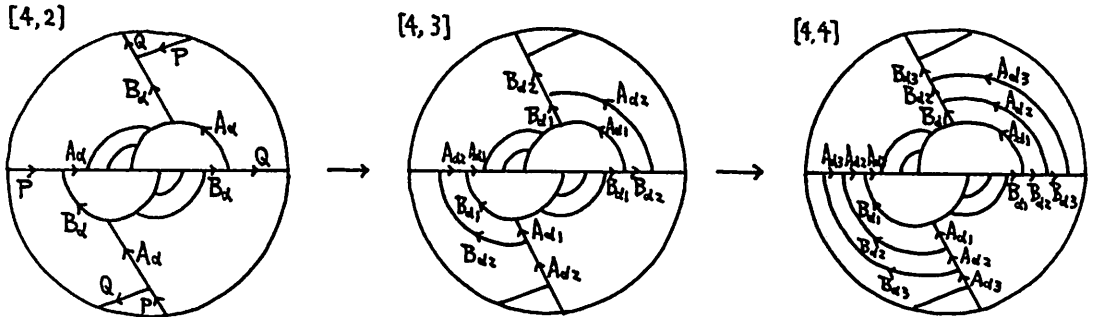


図24: *Wavings*: [4, 2]型 → [4, 3]型 → [4, 4]型

[4, 2]型の絵の中にある2つの *1-labels*  $A_\alpha, B_\alpha$ は, 図23の  
*Bending*  $b_{(1)}$ : [4, 1]型 → [4, 2]型

の結果, 発生したものである。この2つの *1-labels*  $A_\alpha, B_\alpha$ に注目してみよう。これらの *1-labels*  $A_\alpha, B_\alpha$ はそれぞれ, [4, 2]型の絵のなかで, *E-cycle* (絵のなかの水平線) 上に1本, 湾曲した1本, および  $PQ$ 領域まで斜めに伸びた1本の, 合計3本ずつある。この部分に深い関心を持っていれば, [4, 2]型から[4, 3]型への変化の様子はもうあきらかである。すなわち, [4, 3]型の絵の上半部で眺めてみれば,  $PQ$ 領域まで斜めに伸びた  $B_\alpha$ の中点から出た円弧が, 湾曲した  $A_\alpha$ に沿って *E-cycle* 上の  $Q$  の中点まで延びている。下半部についても同様である。

ここまでくれば, あとは[4, 3]型 → [4, 4]型も [4, 4]型 → [4, 5]型もそれ以降もすべてワンパターンで, 次々に現れる波形の繰り返しであることが分かる。これらの

$w_{(1), \dots}$ : [4,  $n+1$ ]型 → [4,  $n+2$ ]型

を, ( $\alpha, n+1$ )型の *Waving*, または *W-move* ということにしよう。ただし,  $\alpha = [4, 1] = [5]$ である。

じつは, 図16の

[3]型 → [4]型 → [5]型 → [6]型 → [7]型 → . . . . .

も, この *Waving* のパターンの連続であった。

さらに, 一般の

$[a_1, a_2, \dots, a_k]$ 型,  $a_i \geq 2$ ,

の *fibered solid torus* の *DS-diagram* に対しても, この *Waving* の概念を定義することができる。

川面に春風がそよ吹くと、波が扇形に広がっていく。土手にはネコヤナギが銀色の穂をかすかに揺らせていて、なかなか牧歌的である。波が広がっていくさまを眺めていると、ホイヘンスの知識など知らなくても、それはそれで結構楽しいものだ。

海の波にはまた海の、別の魅力がある。北斎の『波間の富士』とかなんとかいう有名な浮世絵（の複製）は、高きうねった波がはじけ散るさまを見事にとらえていて、いつ見ても惚れ惚れとする。名画は（気楽に鑑賞できるという点でも）複製がすばらしい。

半円形状の図案を波のように連ねた幾何文様である『青海波』は、海の波のありようを抽象化したもののように思われる。これは『唐草模様』に負けないくらい大衆的なものであるが、また、なかなかのすぐれものでもある。この図案は古墳時代の埴輪にも見られるという。海に囲まれた日本ならではの文化の産物のような気がする。*W-moves* をけだるく眺めている昼下がり、こんな妄想が去来した。

脱線が過ぎた。さあ、ラベルの付け方を修得するための練習問題を提供しておこう。（とはまた、エラそうな！）

図 2 2 の末尾にある  $[2, 2, 4, 4]$  の図を見よう。これを逆算することにより、下の図式を得る。“ $\frown$ ” は *Bending*, “ $\rightarrow$ ” は *Waving* である。また、“ $\downarrow =$ ” は恒等変換である。

$$\begin{array}{l}
 [3] \\
 \downarrow = \\
 [2, 1] \frown [2, 2] \rightarrow [2, 3] \\
 \qquad \qquad \qquad \downarrow = \\
 \qquad \qquad \qquad [2, 2, 1] \frown [2, 2, 2] \rightarrow [2, 2, 3] \rightarrow [2, 2, 4] \rightarrow [2, 2, 5] \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow = \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad [2, 2, 4, 1] \\
 \\
 \text{(続き)} \quad [2, 2, 5] \\
 \qquad \qquad \qquad \downarrow = \\
 \qquad \qquad \qquad [2, 2, 4, 1] \frown [2, 2, 4, 2] \rightarrow [2, 2, 4, 3] \rightarrow [2, 2, 4, 4]
 \end{array}$$

言い換えると、 $[2, 2, 4, 4]$ 型は帰納法の出発点である  $[3]$ 型に、*moves* の積：

$$/BW/BWWW/BWW$$

を施して得られる。ただし、“/” は恒等変換，“*B*” は *Bending*, “*W*” は *Waving* を意味する。（この記法の方が紙の無駄使いにならなくて良いかも知れない。）

いずれにしても、この *moves* の列から  $[2, 2, 4, 4]$ 型の *DS-diagram* の絵模様の描き方も分かるし、ラベルの付け方も分かるのである。

(完) 2002.3.18.