

Branched covering space と DS-diagram

東洋大学工学部 山下 正勝

§ 1. 序

1.1. 結び目を分岐集合に持つ巡回分岐被覆空間

3次元球面 S^3 内の結び目について考える。結び目 K のザイフェルト膜 F に沿って S^3 を切り開いたものを $W = W(K, F)$ と表そう。切開したときに発生する切り口を F^+, F^- とする。このとき

$$F^+ = F^- = F, \quad F^+ \cap F^- = K$$

である。また、 W は切開面 $F^+ \cup F^-$ を境界とする *compact 3-manifold* である。

この W のコピーを p 個用意する。それを

$$W_i = W_i(K, F_i), \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

とする。各 $i \pmod{p}$ について、 W_i と W_{i+1} を、曲面 F_i^+ ($\subset \partial W_i$) と F_{i+1}^- ($\subset \partial W_{i+1}$) で貼り合わせる。このようにして得られる位相空間を

$$M_p(K, F) = (W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_p) / \sim$$

とあらわそう。この $M_p(K, F)$ のことを、結び目 K で分岐している S^3 上の p 重巡回分岐被覆空間 (*p -fold cyclic branched covering space over S^3 branching at a knot K*) という。

よく知られているように、 $M_p(K, F)$ は3次元閉多様体であり、 $M_p(K, F) - K$ は $S^3 - K$ 上の (*unbranched*) *covering space* である。

また、 F_1, F_2 を結び目 K の2つのザイフェルト膜とすると、 $M_p(K, F_1)$ と $M_p(K, F_2)$ は同相である。すなわち *p -fold branched covering space* $M_p(K, F)$ over S^3 は、

- (1) *folding number p* ,
- (2) *branch set* である結び目 K ,
- (3) *covering space* $M_p(K, F) - K \rightarrow S^3 - K$,

にのみ依存していて、結び目 K のザイフェルト膜の選び方には依らない。この事実は、Fox の論文：

*Fox, R. H., Covering Spaces with Singularities,
Lefschetz Symposium, Princeton Math. Ser. 12 (1957), 243-257*



のなかで、もっと一般化された形で述べられている（ということである）。

そこでこれからは、 $M_p(K, F)$ の F を省略して、 $M_p(K)$ と書くことにする。

$M_p(K)$ のことを、（少々乱暴だが） p -fold branch cover over K ということもある。

1.2. DS-knot

DS-diagram $\Delta = (S^2, G, f)$ は $S^2 = \partial B^3$ 上の *label* 付きグラフである。 α をこの Δ の *2-label* とする。 α 内に 1 点 x をとる。球面 S^2 上の *2-cell* で同じ *2-label* α をもつものは 2 つあるから、それらを α^- , α^+ とし、 $x^- \in \alpha^-$, $x^+ \in \alpha^+$ を

$$f(x^-) = f(x^+) = x$$

であるような 2 点とする。そこで、 x^- と x^+ を結ぶ *3-ball* B^3 内の（まっすぐな）線分を考え、これを $K(\Delta, \alpha, x)$ と表す。

$K(\Delta, \alpha, x)$ の *identification map* f による像 $f(K(\Delta, \alpha, x))$ は *closed 3-manifold* $M^3 = B^3/f$ 内の *simple loop* になっている。また、このような *simple loop* は *2-label* α 内の点 x の選び方に依らず、互いに *ambient isotopic* である。そこで、

$$x, x' \in \alpha \Leftrightarrow K(\Delta, \alpha, x) = K(\Delta, \alpha, x')$$

と定める。この同値関係 “=” による線分 $K(\Delta, \alpha, x)$ の同値類を $K(\Delta, \alpha)$ 、または $K_\alpha(\alpha)$ 、とあらわし、*2-label* α に対応する DS-knot という。（本来的には、 $M^3 = S^2$ のときだけ *DS-knot* というべきかもしれないが……）あとでは、 x^+ , x^- のかわりに “0”, “∞” という記号を使うこともある。

さて、 x^+ ($= 0$) は S^2 の北極に、 x^- ($= \infty$) は S^2 の南極にあるとして、一般性を失わない。このとき南極点 x^- ($= \infty$) から北極点 x^+ ($= 0$) に向かう地軸 (= 有向線分) は B^3 の中心 O を通るから、 $K_\alpha(\alpha)$ のことを

$$x^- O x^+ \quad (\text{または } (\infty, 0))$$

と表すこともある。

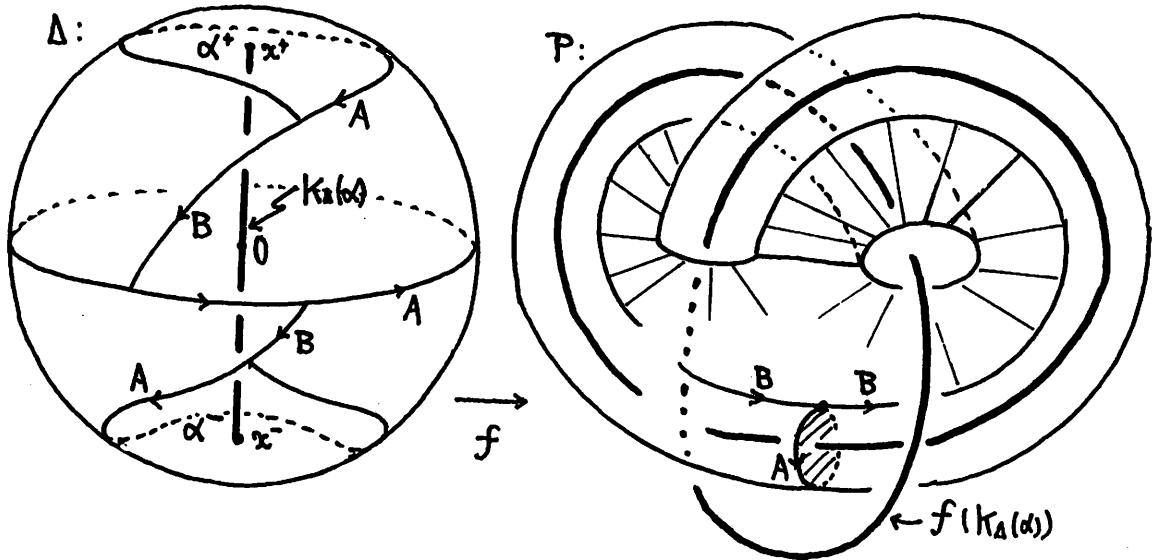


図 1 あわびの *DS-diagram* と *fake surface*

【例】 図 1 は有名な『あわび』という名の *DS-diagram* Δ と *false surface* P である。 $f: \Delta \rightarrow P$ はその間の *identification map* である。あわびは 1 辺形 α ($\partial \alpha = A$) と (singular な) 5 辺形 β ($\partial \beta = ABBAB'$) から自動的に定まるので

$$\Delta : \{A, ABBAB'\}$$

という *symbolic* な表示をもつ。ご存じのように、このあわびの 1 辺形 α に対応する *DS-knot* $K_\Delta(\alpha)$ は *trefoil knot* である。また、5 辺形 β に対応する *DS-knot* $K_\Delta(\beta)$ は *trivial knot* である。

§ 2. クローバーで分岐する *Branch Cover* の *DS* 描写

この節では、『あわび』の *DS-knot* $K_\Delta(\alpha)$ を利用して、クローバー (*trefoil knot*) を分岐集合に持つ *cyclic branched covering space* を *DS-diagram* で表すことを考えてみる。

2.1. あわびのなかの *Crack*

まず、下の図 2 を見ていただきたい。そこには、点“ 0 ”から出発して、『あわび』という名の *DS-diagram* と交叉しながら、くるくる回って終点“ ∞ ”に至るまでの 1 本の曲線が描かれている。この曲線 J のことを *DS-knot* $K_\Delta(\alpha)$ の crack と呼ぶことにしよう。

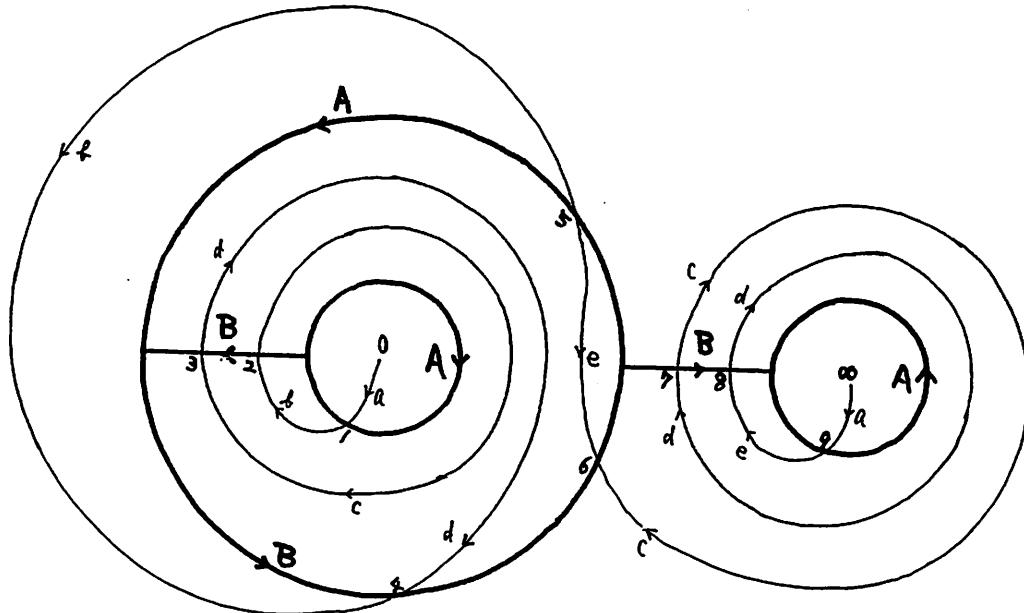


図 2 あわびのなかの *Crack*

図2では、*crack*と*DS-diagram*との交点には1から9まで順に番号が振ってある。この曲線Jの*symbolic*な表示は

$$J : abcd\bar{b}'ec'\bar{d}'e'\bar{a}'$$

である。この*symbolic representation*のなかに現れる記号の説明をしておこう。

番号*i*から番号*i+1*に向かう有向線分を $\langle i, i+1 \rangle$ 、番号*i+1*から番号*i*に向かう有向線分を $\langle i+1, i \rangle$ と表す。このとき、*identification map f*に対して（向きを込めた心持ちで）

$$f\langle i+1, i \rangle = (f\langle i, i+1 \rangle)^{-1}$$

と書くことにする。そこで、

$$f\langle 0, 1 \rangle = f\langle \infty, 9 \rangle = a, \quad f\langle 9, \infty \rangle = (f\langle \infty, 9 \rangle)^{-1} = a^{-1}$$

$$f\langle 1, 2 \rangle = f\langle 5, 4 \rangle = b, \quad f\langle 4, 5 \rangle = (f\langle 5, 4 \rangle)^{-1} = b^{-1}$$

$$f\langle 2, 3 \rangle = f\langle 7, 6 \rangle = c, \quad f\langle 6, 7 \rangle = (f\langle 7, 6 \rangle)^{-1} = c^{-1}$$

$$f\langle 3, 4 \rangle = f\langle 8, 7 \rangle = d, \quad f\langle 7, 8 \rangle = (f\langle 8, 7 \rangle)^{-1} = d^{-1}$$

$$f\langle 5, 6 \rangle = f\langle 9, 8 \rangle = e, \quad f\langle 8, 9 \rangle = (f\langle 9, 8 \rangle)^{-1} = e^{-1}$$

とおけば、上のような曲線Jの*symbolic*表示が得られる。

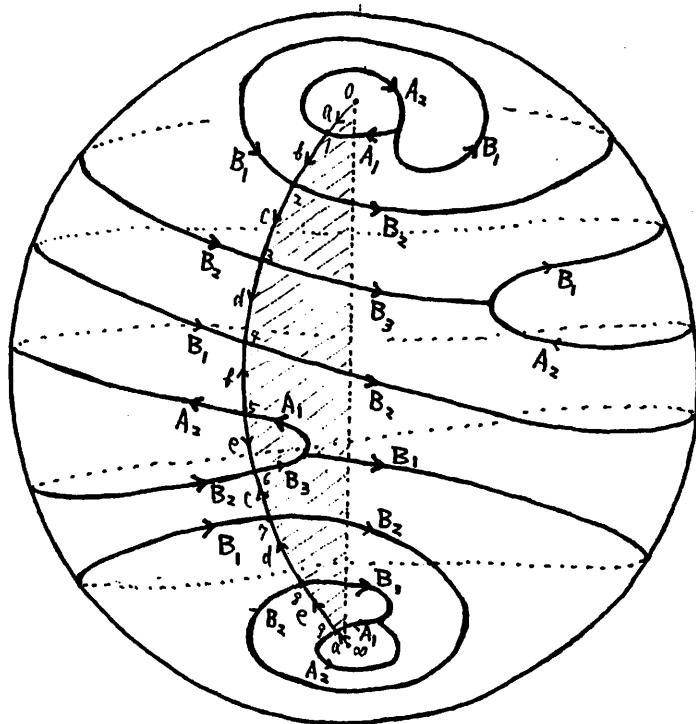


図3 あわびのなかの *crack* を大円であらわす

図3は、*DS-knot* $K_4(\alpha)$ の*crack* $C : abcd b' e c' d' e' a'$ が北極点 θ から南極点 ∞ に至る大円となるように、 S^2 上の*DS-diagram*のほうをくねらせて描いたものである。

斜線部分は*crack* J から地軸 $xOx^+ = \langle \infty, \theta \rangle$ に至るまでの半円 $D(J)$ である。

$$\kappa = f(xOx^+) = f(\langle \infty, \theta \rangle)$$

と書くことにすれば、 κ はクローバー結び目であって、

$$J \kappa : abcd b' e c' d' e' a' \cdot \kappa$$

はこの結び目 κ を境界に持つ *orientable surface* $F = f(D(J))$ の *symbolic* な *polygonal representation* (=多角形描写) になっている。すなわち F は *trefoil knot* のザイフェルト膜にほかならない。

半円板 $D(J)$ に沿って、地軸 $xOx^+ = \langle \infty, \theta \rangle$ まで *3-ball* B^i に切り込みを入れ、みかんを割るようにグワッと押し広げる。「まあだ まだまだ」のかけ声とともに・・・・・。

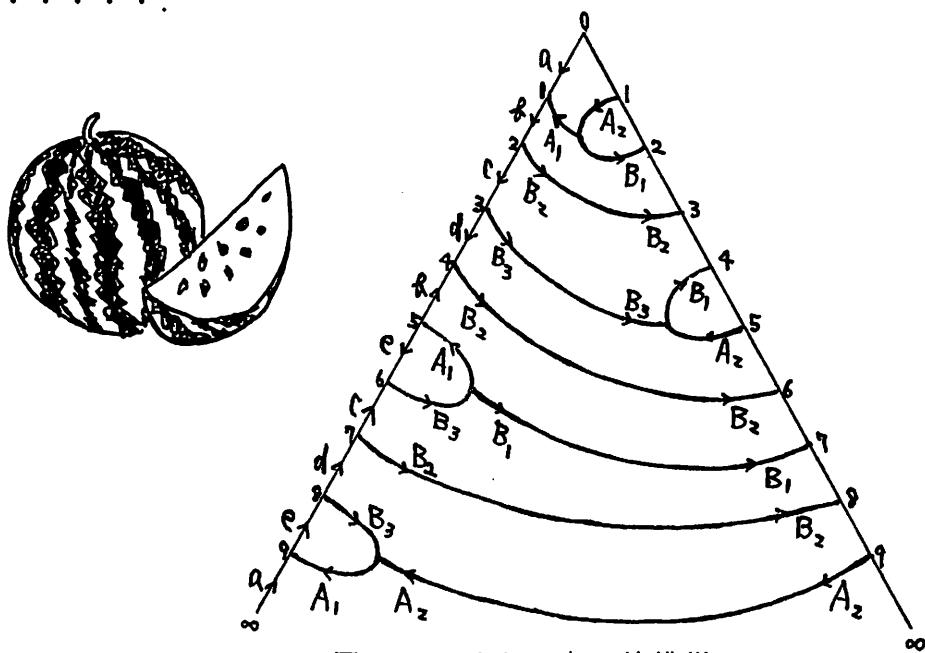


図4 スイカの皮の縞模様

あるいは、暑い夏に井戸で冷やしたスイカを、食べやすいように切った形を思い出してもらえばよいかもしれない。最初の切り口を $D^+ \cup D^-$ とすると、 $D^+ \cap D^-$ は地軸 $x^- O x^+$ のまま、最終的には $D^+ \cup D^-$ は切ったスイカの赤い両面となる。 S^2 上に描いてあった *DS* の模様は、いまやスイカの皮の月形部分の表面に窮屈そうに鎮座しているであろう。そのようなスイカのコピーを p 個用意し、隣り合ったスイカの切り口 D_i^+ と D_{i+1}^- を順繰りに貼り合わせてゆ

けば、欲しかった *p-fold cyclic branched covering space* が得られるはずである。この *branch cover* の *DS-diagram* を作るにはスイカの皮だけがあればよいから、中身を食べてひと休み……。

さて、この食べ散らかしたスイカの残骸である皮をくっつければ *branch coner* の *DS* はできあがりだが、*DS-diagram* は平面グラフで表すのが便利だから、北極点 0 のまわりにその図を集中させることにする。このとき南極点 ∞ は紙からはみだして、無限の彼方へと飛んでしまって、スイカの皮の模様は図 4 のように書いておくのが便利である。

2.2. クローバー結び目上の *5-fold branch cover* の *DS* 描写

図 4 のスイカ模様の紙を 5 枚用意する。このとき、北極点 0 を中心とする中心角は 72° にしておく。そしてこれらを丸く貼り合わせてゆく。すると、図 5 のような絵ができる。

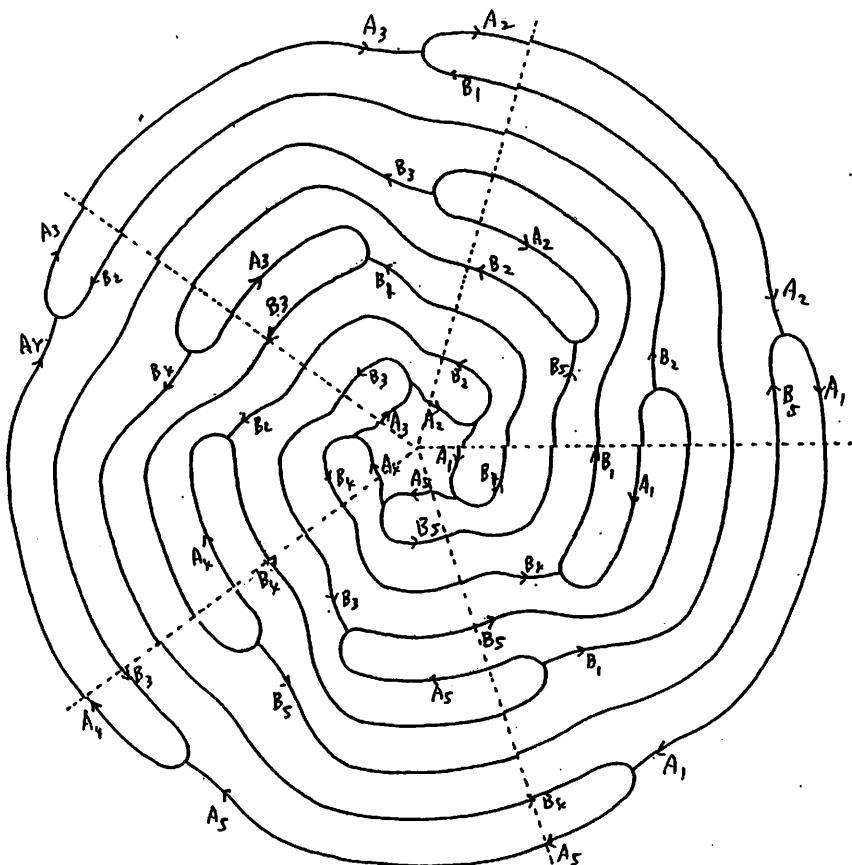


図 5 アワクロ上の *5-fold branch cover* の原型

図5では、このようにつないだときにできた新たな各 *edge* に名前を付け直してある。この図を平面上の *ambient isotopy* で書き直してやると、図6のようになる。これは *Poincare* の作った有名な *homology sphere* (= *Poincare space* または正十二面体空間) の多面体描写である。したがって、

『trefoil knot 上の 5-fold branched cover は *Poincare space* である』
ことが *DS-diagram* 表示からも知ることができる。

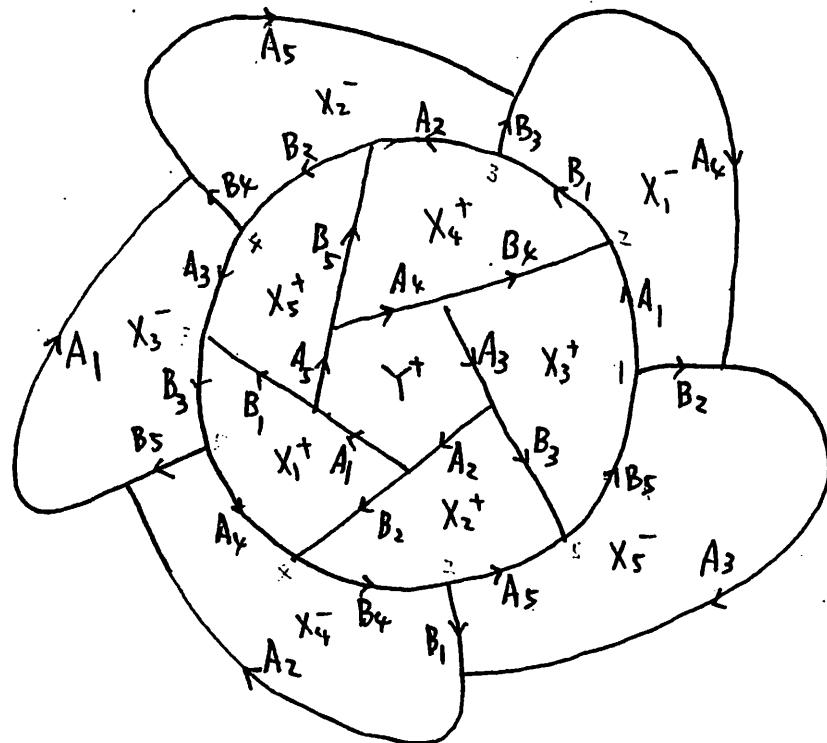


図6 クローバーの 5-fold branch cover = 正十二面体空間

2.3. クローバー上の 5-fold branch cover の基本群の表示

図6で示された *trefoil knot* 上の 5-fold branched cover の *DS-diagram* は
 $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, Y$

という5種類の 2-label を持っている。これらの 2-labels に対応する simple loop の homotopy class をそれぞれ

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y$$

とする。

たとえば, *homotopy class* x_i は次のようにして得られる。まず, X_i を *2-label* にもつ *2-cells* の対を X_i^+ , X_i^- とし, $q_i^+ \in X_i^+$, $q_i^- \in X_i^-$ を $f(x_i^+) = f(x_i^-)$ であるような 2 点とする。3-ball の中心 O とこれらの 2 点をまっすぐな線分で結び, それを $q_i^- O q_i^+$ と表す。loop $f(q_i^- O q_i^+)$ の orientation は中心 O から点 x_i^+ に向かうほうを正の向きに選ぶ, というように (どちらの向きを採用してもよいが) あらかじめ規則として決めておく。そのときの *oriented simple loop* $f(q_i^- O q_i^+)$ の *homotopy class* を x_i とするのである。

すると, $M^3 = B^3/f$ の基本群 $\pi_1(M^3, *)$, $* = f(O)$, は 6 個の *oriented simple loops* $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y\}$ から生成される。そして, それらのあいだの関係式は

$$\begin{array}{ll} y = x_1 x_3 & x_1 x_4 = x_5 \\ y = x_2 x_4 & x_2 x_5 = x_1 \\ y = x_3 x_5 & x_3 x_1 = x_2 \\ y = x_4 x_1 & x_4 x_2 = x_3 \\ y = x_5 x_2 & x_5 x_3 = x_4 \end{array}$$

すべてである。

このような関係式が発生するしくみについて簡単に説明しておこう。一般的な形で述べておく。

fake surface $P = S^2/f$ の *1-label* A には (*local* には) 3 枚の *2-labels* が集まっている。(*global* には, じつは 2 枚, あるいは 1 枚, だけであった, などということもある。) それらの *2-labels* を α , β , γ とし, それぞれの *2-label* に対応する *simple loop* (= *2-label* を 1 回だけ通過する自然な *loop* のこと) を, α^* , β^* , γ^* とする。

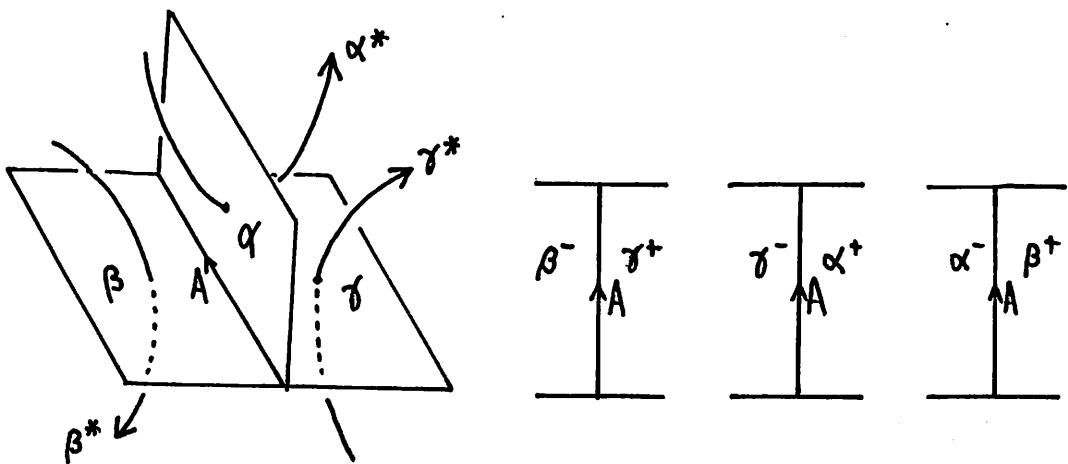


図 7 石井氏の基本群表示に現れる関係式

図 7 では, *fake surface* の *1-label A* を心棒とする 3 枚の *2-labels* α , β , γ , の局所的な図と, それに対応して *DS-diagram* 上の 3ヶ所に現れる *1-label A* のまわりの環境が描かれている. *simple loop* α^* は (図のような向きで考えれば) (*simple* でない) *loop* $\beta^* \gamma^*$ とホモトピックになる. したがって, 関係式

$$[\alpha^*] = [\beta^* \gamma^*] (= [\beta^*][\gamma^*])$$

が得られる. すべての関係が, このような関係式だけから導かれることがわかる.

ともあれ, 基本群 $\pi_1(M^3, *)$ は

$$\text{generators : } x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y$$

$$\begin{aligned} \text{relations : } y &= x_1 x_3, \quad y = x_2 x_4, \quad y = x_3 x_5, \quad y = x_1 x_5, \quad y = x_2 x_3, \quad y = x_4 x_5 \\ x_1 x_4 &= x_5, \quad x_2 x_5 = x_1, \quad x_3 x_1 = x_2, \quad x_4 x_2 = x_3, \quad x_5 x_3 = x_4 \end{aligned}$$

の *presentation* をもつ.

$x_i \rightarrow x$ と置き直して整理すると, $\pi_1(M^3, *)$ の表示として

$$\langle x, y \mid xy^i x = y^i, \quad xyx = yxy, \quad y^i = xyx^i yx \rangle$$

あるいは (最後の関係式 $y^i = xyx^i yx$ は前 2 つの関係式からの帰結となるから)

$$\langle x, y \mid xy^i x = y^i, xyx = yxy \rangle$$

が得られる.

ここまで説明してきた群表示の作り方は石井一平氏によって考案された方法 (のひとつ) である. この表示法を *Ishii presentation* ということにする.

(石井氏が考案された基本群表示はほかにもあるので, 本当は *1-st Ishii presentation* などというのが正しいのだろうけれども)

上の群表示で $xy = a$ と置き直せば, *binary icosahedral group* の有名な群表示 :

$$\langle a, x \mid a^3 = (ax)^2 = x^5 \rangle$$

が得られる.

2.4. クローバー上の *p-fold branch cover*

前節ではスイカの皮 5 個から正十二面体空間の多面体描写を得たが, 同じ方法を使えば, ただコピーするスイカの皮の個数 p を変えるだけで, *trefoil knot* 上の *p-fold cyclic branched covering space* Σ_p の *DS-diagram* を簡単に得ることができる. その結果を列挙しておこう.

以下の表中に現れる *tkk-data* について説明しておく。“*tkk-data*（多角形情報？）が(2, 5, 5)である”というのは、この *DS* が3枚の *2-labels* で構成されていて、それらは（2辺形、5辺形、5辺形）であることを意味している。詳しくは、河野正晴氏にお尋ねあれ。

また、表のなかの

“池田 (I-I), 石井 (*-1), 河野 (3-61), . . . ”

というのは、各氏が創作された *DS* に対してついている番号である。べつに、かれらの栄誉を讃えているわけではない。モーツアルトの曲についているケッヘルの作品番号みたいなものである。ただ、彼らはみなモーツアルトほどには有名でないから、ケッヘル氏のような篤志の人もいまのところ（も、これからも、か？）現れず、やむなく自分で番号をつけておられるのである。この番号がまた、ありがたいんだなあ。何度もお世話になっていると、暗譜するというのか、この番号を聞いただけで図面が浮かんでくる。（外野から「ウソおつけえ」のヤジ！）

$p = 1 \Rightarrow \text{tkk-data} : (1, 5)$

あわび=池田 (I-I) (おーっと、これはあたりまえでした！)

$p = 2 \Rightarrow \text{tkk-data} : (2, 5, 5)$

池田 (2-5) : 図 8

多様体は $L(3, 1)$

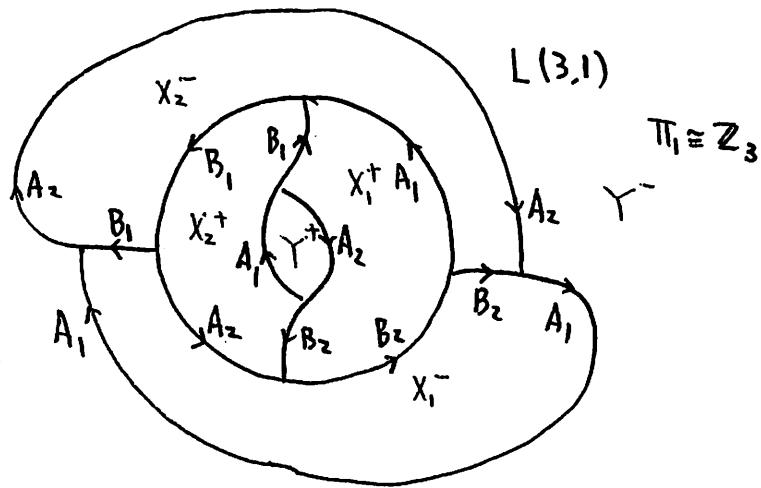


図 8 池田 (2-5) : $L(3, 1)$

$p = 3 \Rightarrow$ 図 9 : tkk-data : (3, 5, 5, 5)

石井 (*-1) = 河野 (3-61)

多様体は *Quaternion Space* (*Zeifert-Threlfall* の教科書を参照)

基本群は *quaternion group* :

$$\pi_1 \sim \langle 2,2,2 \rangle = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^2 \rangle$$

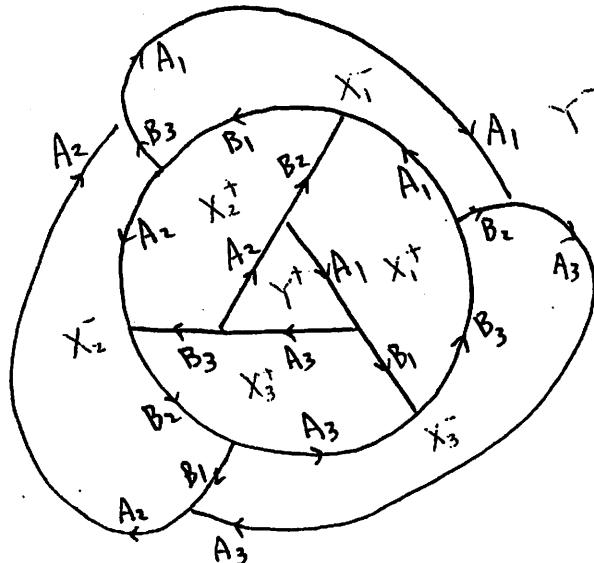


図 9 石井 (*-1) : *Quaternion Space*

$p = 4 \Rightarrow$ 図 10 : tkk-data : (4, 5, 5, 5, 5)

この DS は作者不詳 (石井・河野・横山のいずれか)

多様体の基本群は *binary tetrahedral group* :

$$\pi_1 \sim \langle 3,3,2 \rangle = \langle a, b \mid a^3 = b^3 = (ab)^2 \rangle$$

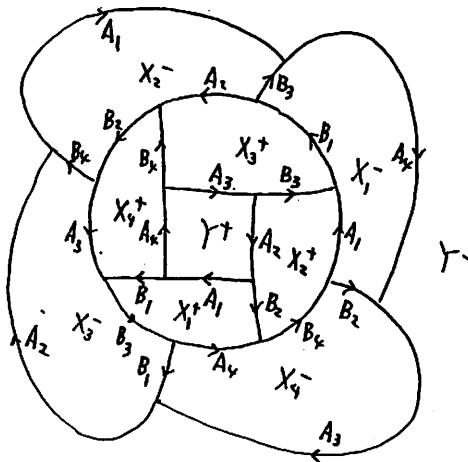


図 10 $\pi_1 \sim \langle a, b \mid a^3 = b^3 = (ab)^2 \rangle$ の DS-diagram

$$p = 5 \Rightarrow tkk\text{-data} : (5, 5, 5, 5, 5, 5)$$

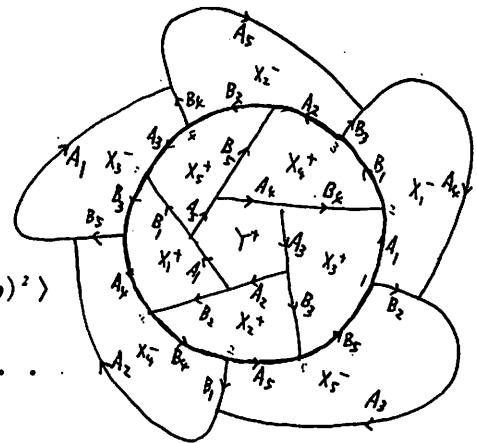
ポアンカレ(5-*)

多様体は正十二面体空間

基本群は *binary icosahedral group* :

$$\pi_1 \sim \langle 3,5,2 \rangle = \langle a, b \mid a^3 = b^5 = (ab)^2 \rangle$$

.....



さてここで、Rolfsen の教科書『Knots and Links』から *trefoil knot* 上の p -fold cyclic branched cover Σ_p についての知識を孫引きしておこう。

【定理】 Σ_p の (1 次の) homology group は

$$H_1(\Sigma_p) = \begin{cases} 0 & k \equiv 1 \pmod{6} \\ \mathbb{Z}_3 & k \equiv 2 \pmod{6} \\ \mathbb{Z}_2 + \mathbb{Z}_2 & k \equiv 3 \pmod{6} \\ \mathbb{Z}_3 & k \equiv 4 \pmod{6} \\ 0 & k \equiv 5 \pmod{6} \\ \mathbb{Z} + \mathbb{Z} & k \equiv 0 \pmod{6} \end{cases}$$

である。

【系】 *trefoil knot* 上の $(6n \pm 1)$ -fold cyclic branched cover はすべて (互いに異なる) homology sphere である。

trefoil knot 上の $(6n \pm 1)$ -fold cyclic branched cover Σ_p , $p = 6n \pm 1$, の DS-diagram を上のようにして作ったとき、これらの homology sphere Σ_p の基本群の *ishii presentation* は、*Poincare space* の表示を求めたときとまったく同様にして求めるならば、次のようになる。

$p = 6k-1$ の場合

$$k=1 \Rightarrow p=5 : \langle x, y \mid xy^2x = y^3, xyx = yxy, y^2 = xyx'yx \rangle$$

$$k=2 \Rightarrow p=11 : \langle x, y \mid xy^5x = y^6, xy^3x = y^2xy^2, y^4 = xy^2x'y^2x \rangle$$

$$k=3 \Rightarrow p=17 : \langle x, y \mid xy^8x = y^9, xy^5x = y^3xy^3, y^6 = xy^2x'y^2x \rangle$$

.....

一般に

$$\langle x, y \mid xy^{3k-1}x = y^{3k}, xy^{2k-1}x = y^kxy^k, y^{2k} = xy^kx'y^kx \rangle$$

となる。

ところで、この表示における *relation* のうち、

$$y^{2k} = xy^kx^{-1}y^kx$$

は

$$\{ xy^{2k-1}x = y^kxy^k, \quad xy^{3k-1}x = y^{3k} \}$$

の *conclusion* である。

(\because : メモ)

$$\begin{aligned} & \langle\!\langle \underline{xy}^{2k-1}\underline{x} = \underline{y}^k\underline{xy}^k, \quad xy^{3k-1}x = y^{3k} \rangle\!\rangle \\ \Rightarrow & \langle\!\langle \underline{y}^{2k-1}\underline{x} = \underline{x}^{-1}\cdot\underline{y}^k\underline{xy}^k, \quad xy^{3k-1}x = y^{3k} \rangle\!\rangle \\ \Rightarrow & \langle\!\langle \underline{y}^k\cdot\underline{y}^{2k-1}\underline{x} = y^k\cdot x^{-1}y^k\underline{xy}^k, \quad xy^{3k-1}x = y^{3k} \rangle\!\rangle \\ \Rightarrow & \langle\!\langle \underline{y}^{3k-1}\underline{x} = y^k\underline{x}^{-1}\underline{y}^k\underline{xy}^k, \quad xy^{3k-1}x = y^{3k} \rangle\!\rangle \\ \Rightarrow & \langle\!\langle \underline{x}\cdot\underline{y}^{3k-1}\underline{x} = x\cdot y^k x^{-1} y^k \underline{xy}^k, \quad \underline{xy}^{3k-1}\underline{x} = \underline{y}^{3k} \rangle\!\rangle \\ \Rightarrow & \langle\!\langle \underline{y}^{3k}\underline{x} = xy^k x^{-1} y^k \underline{xy}^k, \quad xy^{3k-1}x = y^{3k} \rangle\!\rangle \\ \Rightarrow & \langle\!\langle y^{2k} = xy^k x^{-1} y^k x, \quad xy^{3k-1}x = y^{3k} \rangle\!\rangle \end{aligned}$$

したがって、 $p = 6k-1$ のときの *homology sphere* Σ_p の基本群の表示として

$$\langle x, y \mid xy^{3k-1}x = y^{3k}, \quad xy^{2k-1}x = y^kxy^k \rangle$$

が得られた。

同様にして、 $p = 6k+1$ のときの *homology sphere* Σ_p の基本群の表示も得られる。途中の形を示しておく。

$p = 6k+1$ の場合

$$k=1 \Rightarrow p=7 : \quad \langle x, y \mid xy^3x = y^4, \quad xyx^{-1}yx = y^3, \quad yxy = xy^2x \rangle$$

$$k=2 \Rightarrow p=13 : \quad \langle x, y \mid xy^6x = y^7, \quad xy^2x^{-1}y^2x = y^5, \quad y^2xy^2 = xy^4x \rangle$$

$$k=3 \Rightarrow p=19 : \quad \langle x, y \mid xy^9x = y^{10}, \quad xy^3x^{-1}y^3x = y^7, \quad y^3xy^3 = xy^6x \rangle$$

これを観察すれば見当がつくように、この場合も $p = 6k-1$ のときとまったく同じ形の表示を持つ。この事実を確認したとき、ちょっとうれしかったが、*DS-diagram* の形がワンパターンであることと *Ishii presentation* が *DS-diagram* の姿焼きであることを思えば、これは当然のことなのかもしれない。しかし、小生にはそのからくりがわからない。

§ 3. Crack

【定義】 $\Delta = (S^2, G, f)$ を *DS-diagram*, α を Δ の *2-label* とする. このとき, 球面 S^2 上の *simple arc* J が次の条件を満たしているならば, J を *DS-knot* $K_\Delta(\alpha)$ の *crack* という.

- (1) $p \in J \Rightarrow f^{-1}(f(p)) \subset J$,
- (2) $f(\partial J) \subset \alpha$, (註: 2-label α は *fake surface* 内の *open 2-disk* である)
- (3) $f(J)$ は Δ の *0-label* を含まない,
- (4) $f(J)$ と Δ の *1-label*との交点は孤立点である.

DS-diagram Δ の *2-label* α に対応する *DS-knot* $K_\Delta(\alpha)$ が *crack* J をもつとする. そのとき, $K_\Delta(\alpha)$ の代表 $K_\Delta(\alpha, x) = x^- O x^+$ で

$$\partial J = \{x^-, x^+\}$$

となるものがとれる. 例によって, x^+ を北極, x^- を南極とし, J を S^2 上の大円として, 《crack込みの DS の絵》を実現することはいつでも可能である. 以下, その状態で考える. *DS-diagram* Δ の *1-labels* と J との交点に, 北極点 x^+ に近い方から順に,

$$0 (=x^+), 1, 2, 3, \dots, n, \infty (=x^-)$$

と番号をつける. これらの番号を *crack* J の 頂点といい, 数 n を J の *crack number* ということにする. *crack* J 上の, 番号 i から番号 $i+1$ に向かう (向きのついた) 小区間を $\langle i, i+1 \rangle$ と表す. 逆向きの小区間は $\langle i, i+1 \rangle$ または $\langle i, i+1 \rangle^{-1}$ と表すこととする. *identification map* f による (向きのついた) 像 $f(\langle i, i+1 \rangle)$ を $\langle i, i+1 \rangle$ の *1-label* といい, 小文字で, たとえば

$$f(\langle i, i+1 \rangle) = a$$

と表す. このとき

$$f(\langle i+1, i \rangle) = a^{-1}, \quad (a^{-1})^{-1} = a$$

という約束を入れておく. 有向小区間 $\langle i, i+1 \rangle$ の *1-label* を a_i ($\langle n, \infty \rangle$ の *1-label* は a_n) とするとき,

$$\langle J \rangle = a_0 a_1 a_2 \cdots a_n$$

を *crack* J の label 表示 ということにしよう. ただし,

$$f(a_i) = f(a_j) \Leftrightarrow a_j = a_i^{-1}$$

である (または $a_j = a_i$, f の像の向きが一致するように選択する).

地球の直径 $K_\Delta(\alpha, x) = x^- O x^+$ と大円 J を境界とするような半円板 $D^2(J)$ について考える. この半円板の像 $F = f(D^2(J))$ は, $\partial F = K_\Delta(\alpha)$ であるようなコンパクトな曲面である. $M^3 = S^3$ の場合には, F が *orientable* ならば, 結び目 $f(K_\Delta(\alpha, x))$ の *Seifert surface* にはかならない.

DS-diagram の *1-label* は 3ヶ所に現れるから, *crack number* n は 3の倍数である. したがって *crack J* の頂点は $3n+2$ 個ある. また, *crack J* の *label* は *J* 上に 2回ずつ現れるので, $n+1$ は 2の倍数である. すなわち n は奇数である. このことからつぎの命題が成り立つ.

- 【命題】 (1) *crack J* の *crack number* n は $n = 6q + 3$ ($q = 1, 2, 3, \dots$) である.
 (2) F のオイラー標数は $\chi(F) = -q$ である.
 (3) F が *orientable* ならば, q は奇数で, F の *genus* は $g(F) = (q+1)/2$ である.

crack の存在については, 残念ながら小生は知らない. 実は 10 年ほど前, 早稲田大学だったか筑波大学だったかで行われたトポロジー研究集会において, 横山氏との共同研究として, つぎの内容の話をしたことがある.

[定理 (? : ならばよかったんだが……)] 任意の結び目に対し, その結び目を表現する *DS-knot* で, *crack* をもつものが存在する. (その当時は “*crack*” とは言わず, “ザイフェルト膜を実現する曲線”とかなんとか言っていた, と記憶する.)

その方法は, まず結び目のブリッジ表現を利用して, (われわれの目的にとって) 都合の良いザイフェルト膜を張っておく. そしてそれを堀り上げて, ザイフェルト膜が一本の曲線で表されるようにする, というものであった.

しかしその会場で, 金信泰造氏から「その証明にはギャップがある」というご指摘を受けた. 金信氏といえば, 彼の人柄がにじみ出る笑顔がすばらしい. そのときも, ソフトな笑顔であった.

会場のまわりは 12 月の冬景色だったが, そのときの小生は真夏の蛍の尻だったから, 事態を深刻に考えていなかった. だが, あとになってゆっくり考えているうちに, 金信氏の指摘が正しいことを悟って愕然とした.

証明法を文書として記録する気力も失せて, そのまま今日に至っている. 生来ぼんくらなうえに怠け者ときてるので, ただ馬鹿を重ねるばかりである. いまでは, 当時の(間違えた)証明法すら思い出せない. 最近では頭のなかに蜘蛛の巣がたくさんかかってきて, 思考力はますます低下してきた.

たとえ間違いであっても, とにかく文章にして残しておかないとには, この歳になっては記憶が遠のいてゆくばかりで, 不備な個所の検討をすることもままならない.

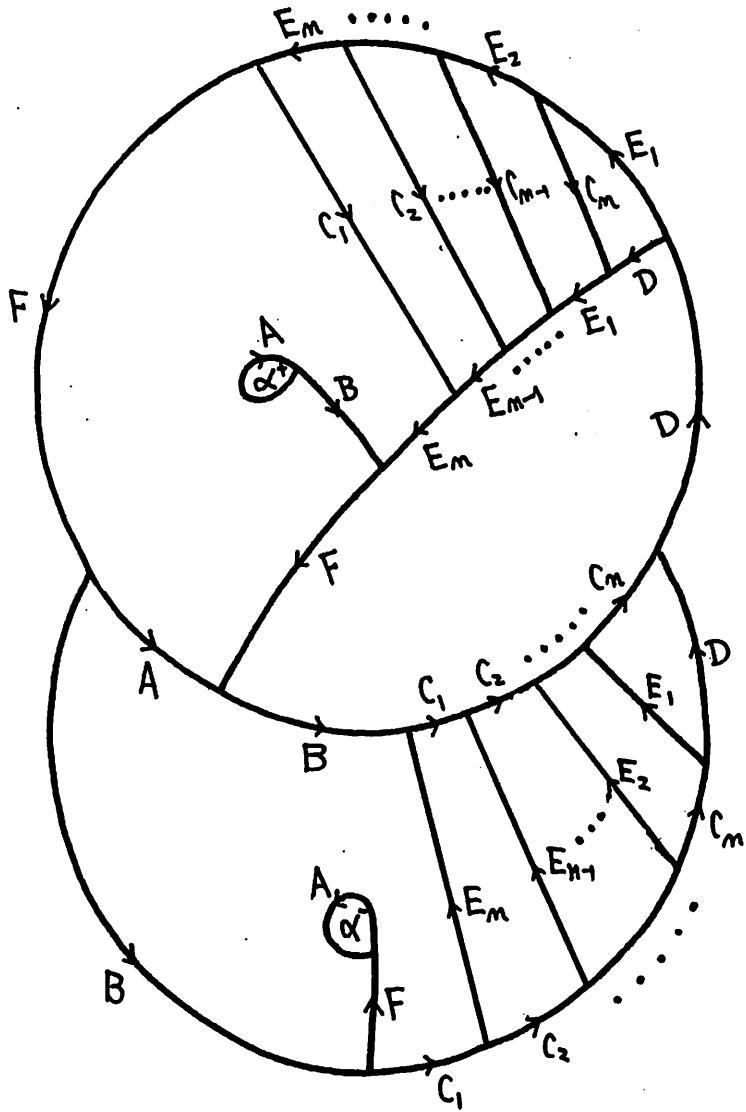
畏兄津久井康之氏にはいつも, 「文章にして残しておけよ」と諭されている. けれどもその日を生きるのが精一杯で, とてもそんなゆとりはなかった・・・ 苦しい言い訳である.

§ 4. $(2, q)$ -torus knot の crack

この節では $(2, q)$ -torus knot $T_{2,q}$ ($q = 3, 5, 7, \dots$) の crack を紹介しておこう。

4.1 $(2, q)$ -torus knot

下の図 1.1 で示される DS-diagram Δ について考える。1辺形 α に対する DS-knot $K_{\Delta(q)}(\alpha)$ は $(2, q)$ -torus knot $T_{2,q}$ ($q = 2k+1$) の DS-knot である。トーラス結び目は補空間の基本群で特徴づけられるので、基本群の計算だけでこの事実を確認することができる。この DS-diagram は石井氏から教えていただいた。

図 1.1 $(2, q)$ -torus knot の DS 描画法

$(2, q)$ -torus knot $T_{2,q}$ は、周知のように、 $q = 3$ のとき 3-結び目 (=クローバー), $q = 5$ のとき 5-結び目 (=ソロモンの紋章), $q = 7$ のとき 7-結び目である。また、 $(2, q)$ -torus knot $T_{2,q}$ の genus $g(T_{2,q})$ は、よく知られているように、

$$g(T_{2,q}) = (q-1)/2$$

である。

いま、 $(2, q)$ -torus knot $T_{2,q}$ を、図 1-1 の DS-diagram での DS-knot $K_{\Delta(q)}(\alpha)$ で表そう。曲線 $J = J(q)$ を $K_{\Delta(q)}(\alpha)$ の crack (のひとつ) とする。(あとで見るように、 $K_{\Delta(q)}(\alpha)$ はつねに crack を持つ。) $J(q)$ の crack number を $n(q)$ とすると、

$$q = 3 \text{ のとき } g(T_{2,3}) = 1, n(3) \geq 9$$

$$q = 5 \text{ のとき } g(T_{2,5}) = 2, n(5) \geq 21$$

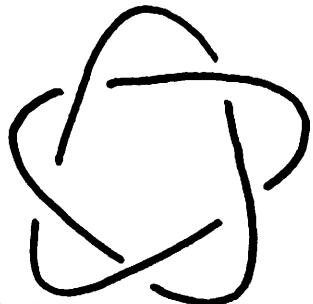
$$q = 7 \text{ のとき } g(T_{2,7}) = 3, n(7) \geq 33$$

.....

と続く。一般に、

$$g(T_{2,q}) = (q-1)/2, n(q) \geq 6q-9$$

である。だから q の値が大きくなるにつれて、crack $J(q)$ は必然的に長くならざるを得ない。



4.2 ソロモン王の紋章

図 1-2 と図 1-3 はいずれもソロモン王の紋章 $T_{2,5}$ の DS-knot $K_{\Delta(5)}(\alpha)$ と crack の絵である。これらの crack の label 表示はそれぞれ

$$\text{図 1-2} \Rightarrow J_1 : a b c d e f g h e' i b' j g' k c' i' d' k' f' h' j' a'$$

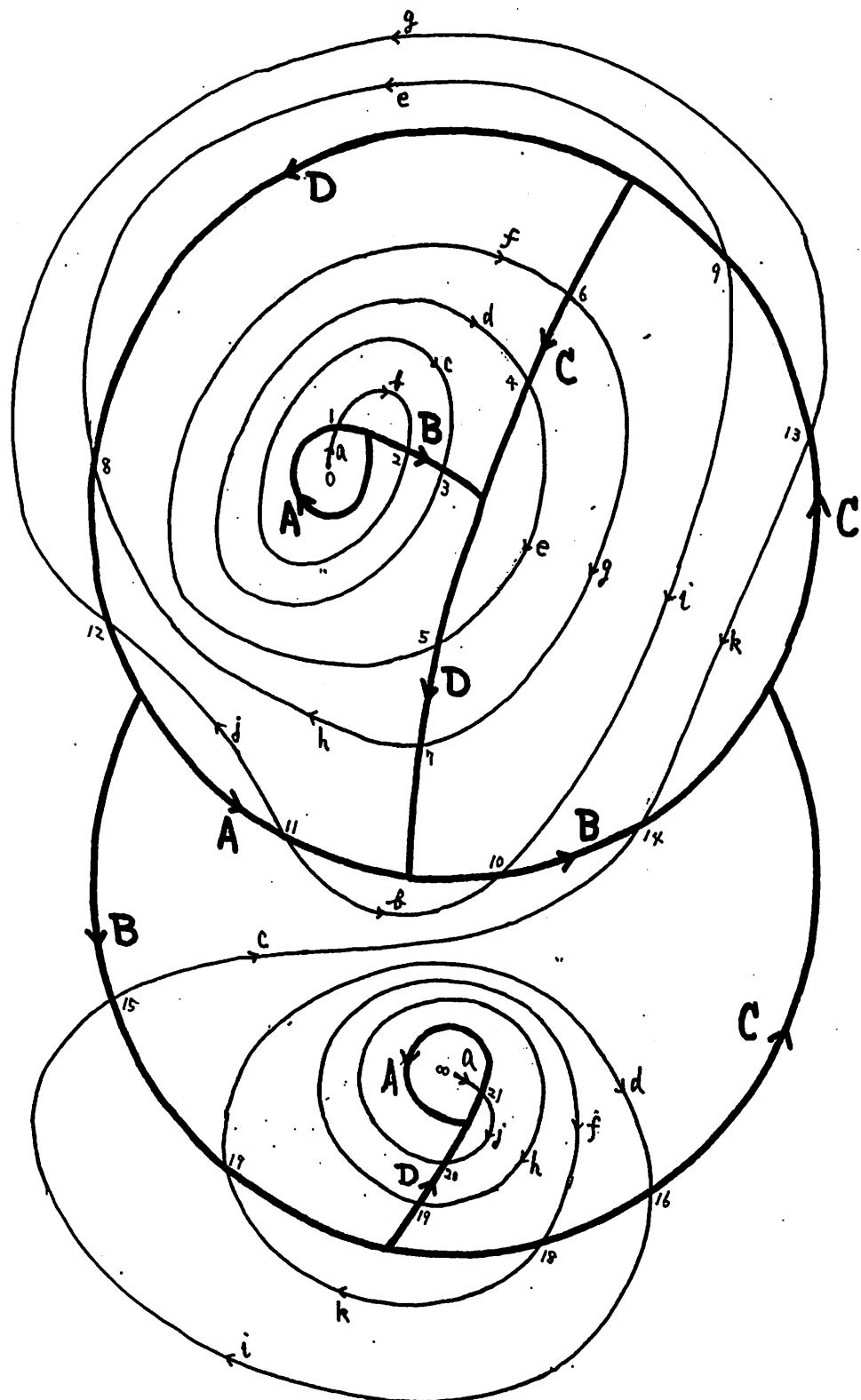
$$\text{図 1-3} \Rightarrow J_2 : a b c d e f g h b' i f' j c' h' k d' j' e' k' g' i' a'$$

である。これらは異なる crack である。図を観察すると、1-label A を bound する 1 辺形 α のまわりに巻き付く crack の巻き数の様子が異なっているので、その違いがわかる。この例から分かるよう

《DS-knot $K_{\Delta}(\alpha)$ の crack は一意には定まらない》

図 1-2, 図 1-3 から得られるザイフェルト膜の genus はいずれも 2 である。 $q = 5$ のとき $g(T_{2,5}) = 2$ であるから、これらはいずれも最小 genus のザイフェルト膜である。

ひとつ注意しておこう。DS-knot $K_{\Delta}(\alpha)$ の crack から得られるザイフェルト膜の genus は 1 以上であるから、trivial knot に対する DS-knot の crack から得られるザイフェルト膜は 2-disk ではなく、もっと高い genus のものでなければならない。もっとも、trivial knot の crack があるかどうか、小生は知らない。

図12 ソロモン王の紋章の *crack*

J : a b c d e f g h e' i b' j g' k c' i' d' k' f' h' j' a'

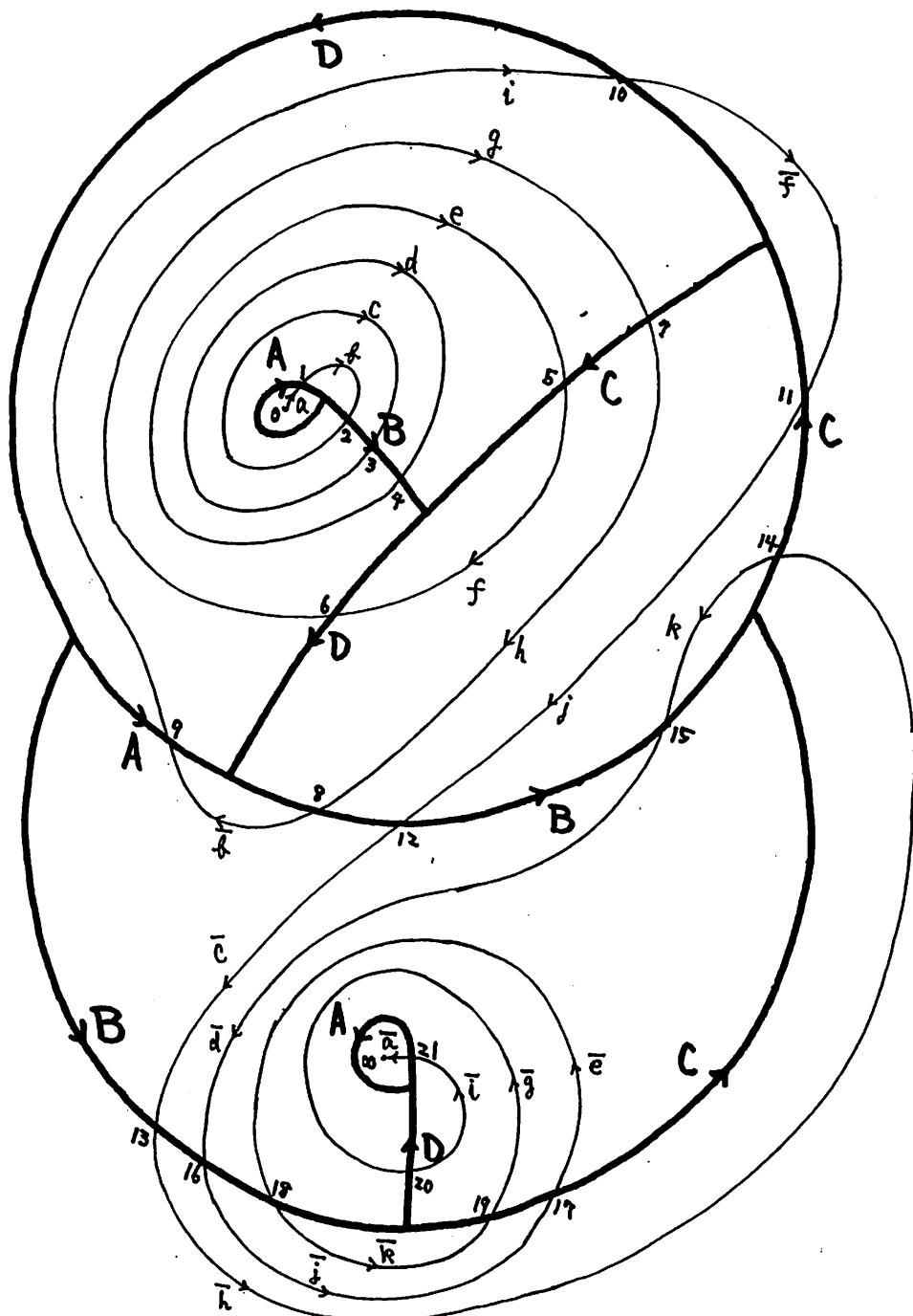


図13 ソロモン王の紋章のもうひとつの crack
 $J_1 : a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h\ e'\ i\ b'\ j\ g'\ k\ c'\ i'\ d'\ k'\ f'\ h'\ j'\ a'$

さて図12と図13を較べると、図形的には図12のほうが対称性が高い。
 branch coverを作るとき、もとの図が結果図に反映されるので、これからは
 図12の方を採用することにしよう。

このcrack J_1 に沿って切開するとDS-diagramの模様は図14のようになる。
 頂点0から両サイドに広がる斜線が、切開されて2分されたcrackの姿である。
 この紙のコピーを p 枚用意して順々につないでやれば、最後にはぐるりと輪
 になって p -fold branch coverができる。

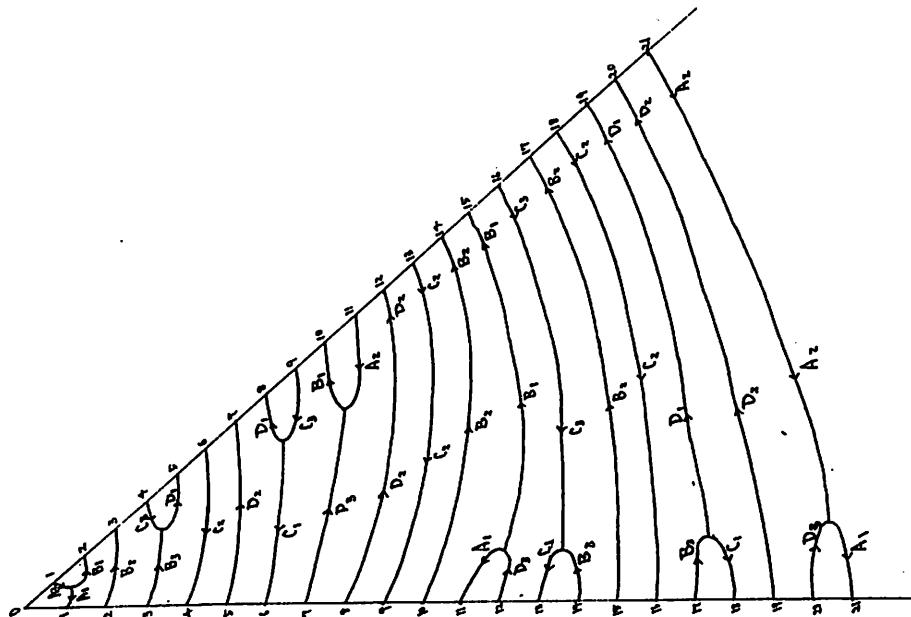


図14 ソロモン王の紋章をcrackから切り開く

図14を利用してソロモン王の紋章で分岐する2-fold cover, 3-fold coverを作
 つてみると、それぞれ、図15（の左の絵）、図16のようになる。

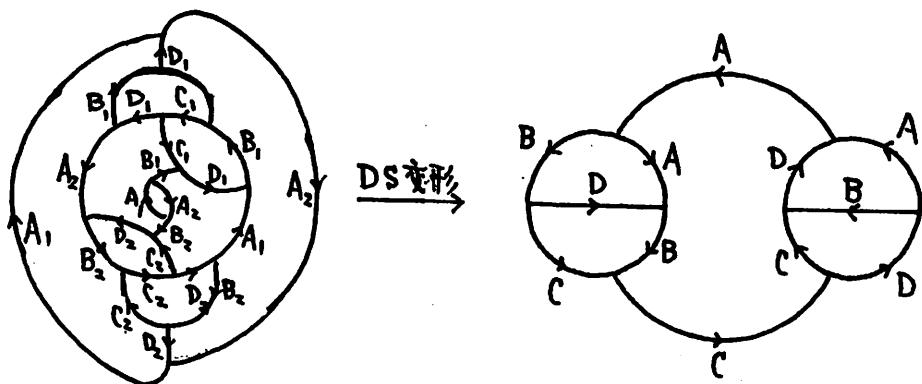


図15 (2,5)トーラス結び目 $T_{2,5}$ の 2-fold branch cover

図 1 5 の左図は、*DS*-変形によって右図のようになる。ところで右図の*DS-diagram*の正体は

tkk-data : (3, 3, 6)

ケッヘル番号は池田(2, 12)：多様体はレンズ空間 $L(5, 1)$ である。したがって

《 $T_{2,5}$ の 2-fold branch cover はレンズ空間 $L(5, 1)$ である》ことがわかる。

また、図 1 6 で表されている*DS-diagram*の素性は

tkk-data : (3, 4, 4, 4, 7, 7, 7)

ケッヘル番号 : ???

である。

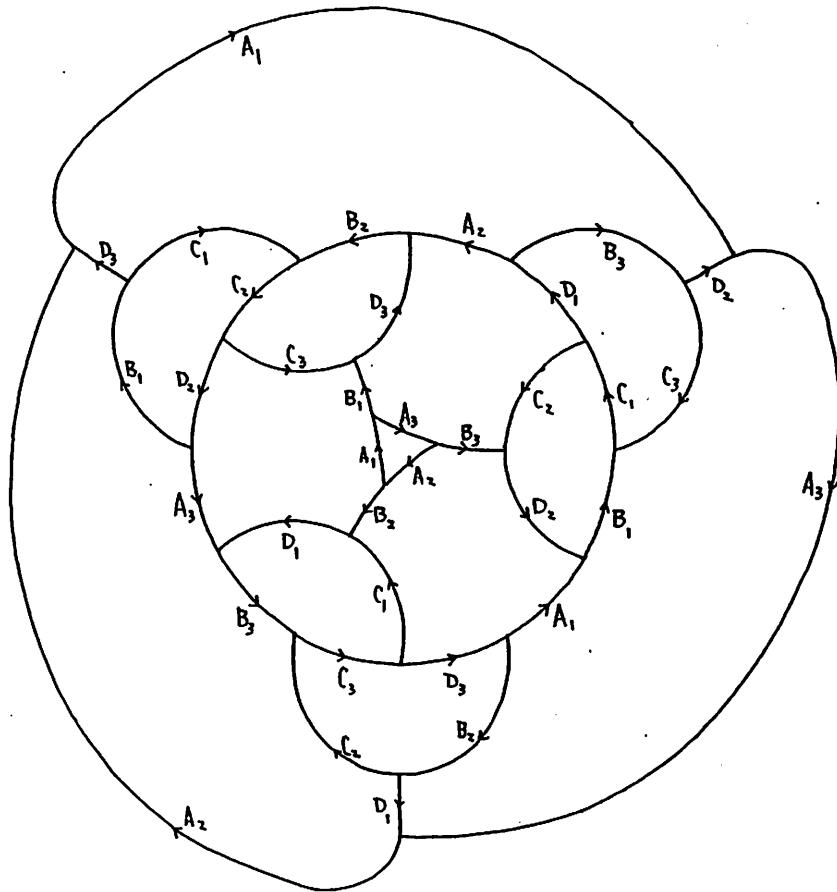


図 1 6 (2, 5) トーラス結び目 $T_{2,5}$ の 3-fold branch cover

ところで、図 1 6 で表されている絵は、*Poincare Space* の有名な絵（図 6）とは異なっている。しかし図 1 5 の絵に現れている 3 辺形を *DS*-変形でつぶしてやると、あーら不思議！一発で図 6 に早変わり！

したがって

『 $(2, 5)$ torus knot の 3-fold branch cover は Poincare Space である』
という事実が DS によっても確認された。

図 1 7 は $(2, 5)$ torus knot の 5-fold branch cover の DS-diagram である。

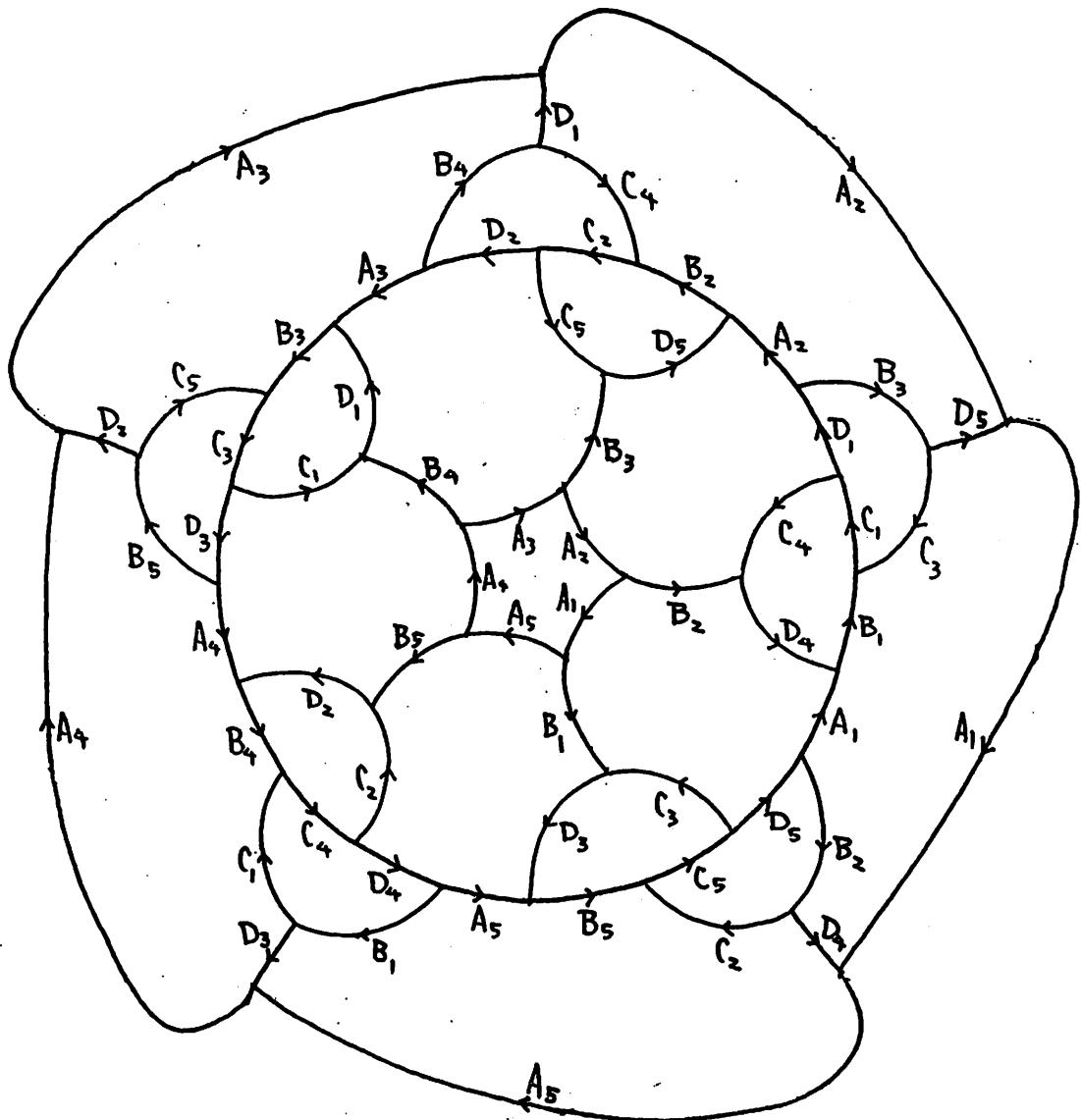


図 1 7 $(2, 5)$ トーラス結び目 $T_{2,5}$ の 5-fold branch cover

4.3 $(2, q)$ 型トーラス結び目の *crack*

図 1 8[†] $(2, 7)$ 型のトーラス結び目の *DS-knot* の *crack* である。その *label* 表示は
 $J(7) : a b c, c, d e r f j, q, e' v j, q, j, i' w, b',$
 $p, j, i' w, c, i' w, c, i' f, s, c, i' w, c, i' v, d, s, r, q, i' q, i' p, a'$
 である。この *crack* から定まるザイフェルト膜の *genus* は 3 である。

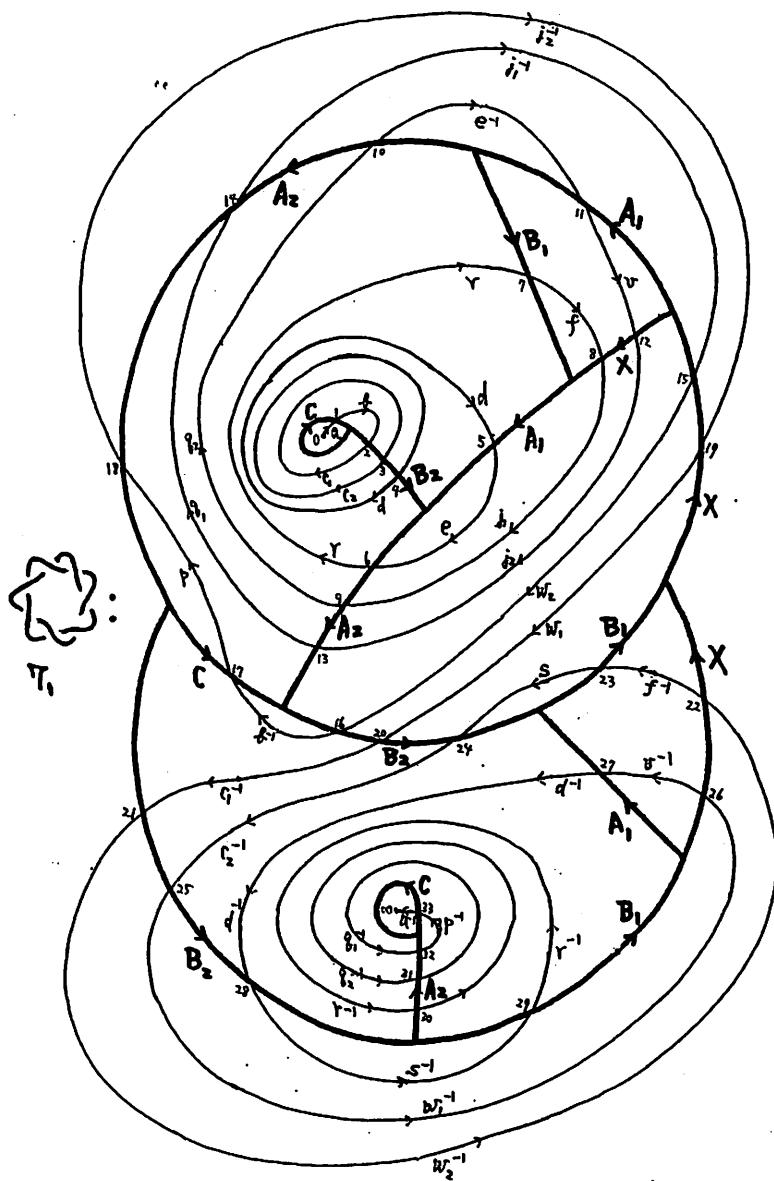


図 1 8 $T_{2,7}$ の *crack* $J(7)$

図19は(2,9)型のトーラス結び目の *DS-knot* の *crack* である。その *label* 表示は

$$J(9) : a b c_1 c_2 c_3 d e r f g q_1 e' t h j_1 q_2 g' v j_2 q_1 j_1' w_1 b'.$$

$$p j_1' w_1 c_1' w_2' h' u c_2' w_3' v' f' s c_3' u' t' d' s' r' q_1' q_2' q_1' p' a'$$

である。この *crack* から定まるザイフェルト膜の *genus* は 4 である。

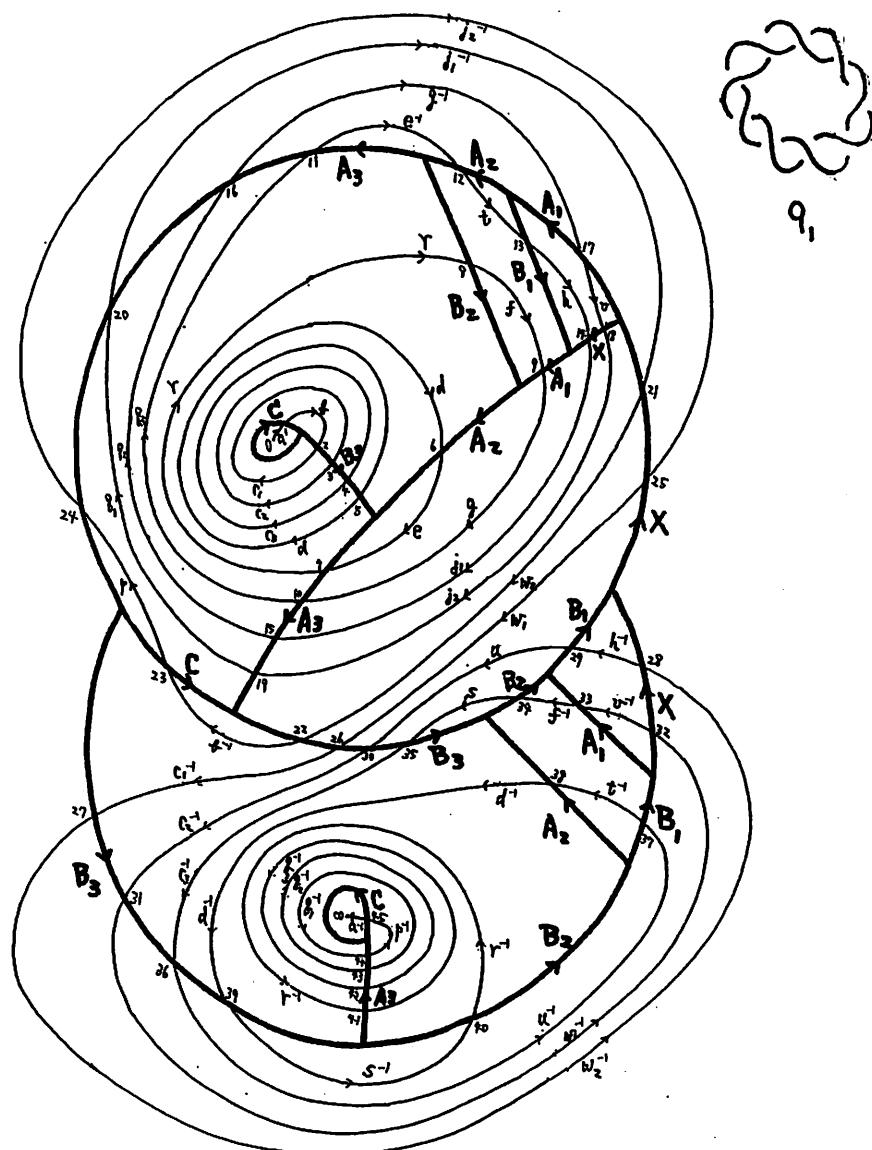


図19 $T_{2,9}$ の *crack* $J(9)$

これらの *crack* の図を観察すると、 $(2, q)$ 型トーラス結び目 $T_{2,q}$ に対する *crack* の作り方が見えてくる。それを利用すると、一般の $(2, q)$ 型トーラス結び目 $T_{2,q}$ の *2-fold branch cover* の *DS-diagram* を求めることができる。

ここでは、 $T_{2,q}$ の *2-fold branch cover* と *3-fold branch cover* の *DS-diagram* の図を掲げておく。図 20 が *2-fold branch cover* の *DS-diagram*、図 21 が *3-fold branch cover* の *DS-diagram* である。

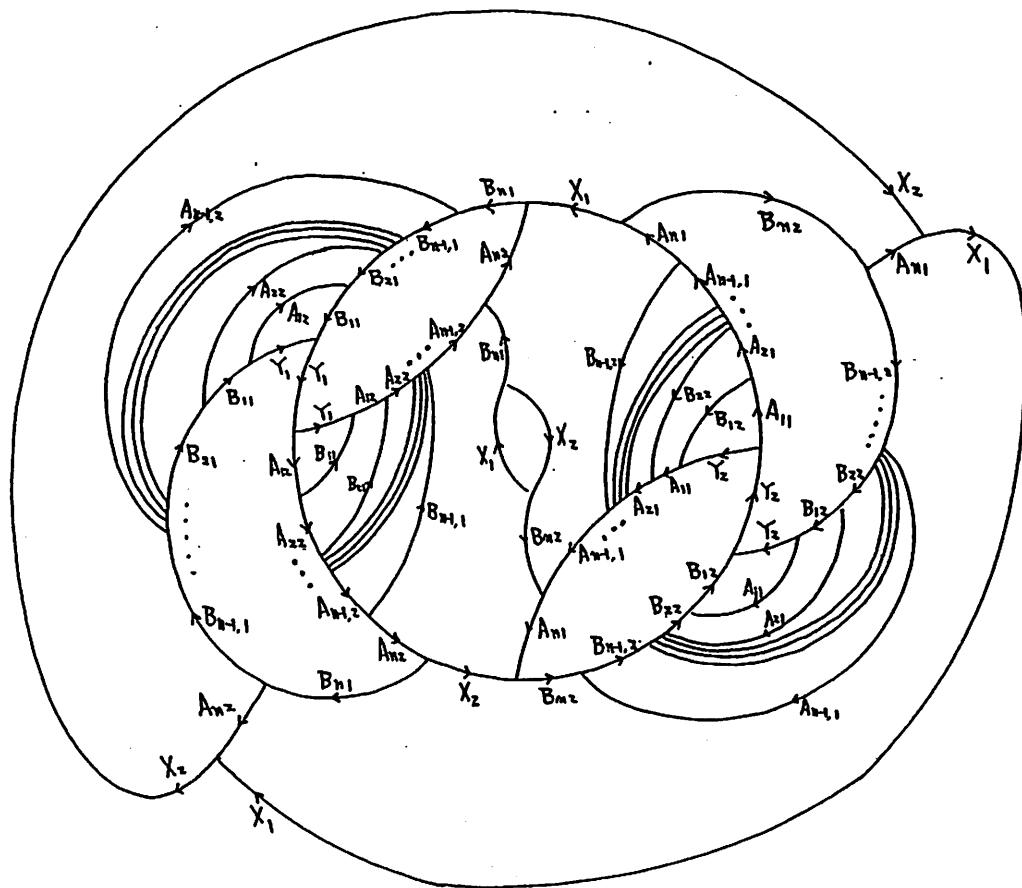
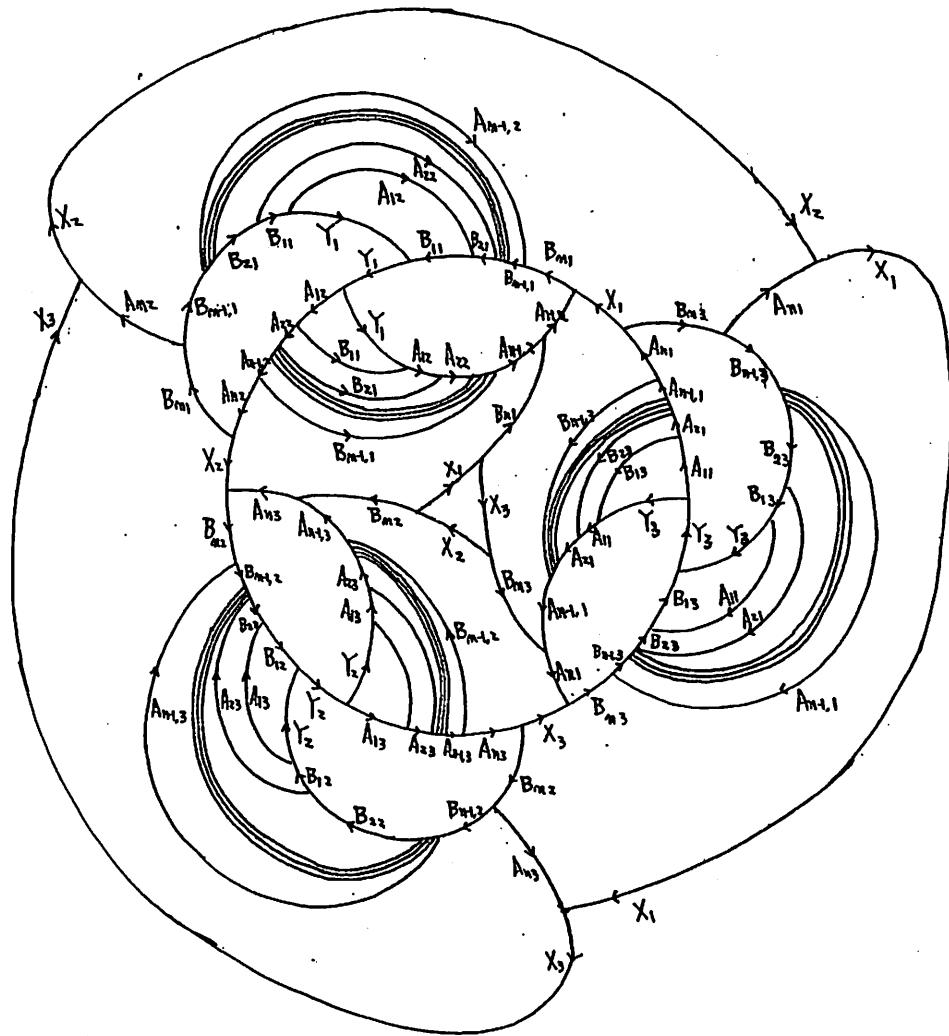


図 20 $(2, q)$ 型トーラス結び目 $T_{2,q}$ の *2-fold branch cover*

図 2.1 $(2, q)$ 型トーラス結び目 $T_{2,q}$ の 3-fold branch cover

(完)