

DS変形の生成元について

東洋大学 工学部 山下 正勝
 上智大学理工学部 横山 和夫

1. 記号と用語

ここでは、DS-diagram Δ の頂点の数が $4n$ であるとき $\# \Delta = n$ とあらわすことにしよう。このとき、 Δ の 0-, 1-, 2-labels の数はそれぞれ $n, 2n, n+1$ である。

池田裕司氏によって $\# \Delta = 1, 2$ の DS-diagrams の完全なリストアップがなされた。それによると、 $\# \Delta = 1$ であるような DS-diagram Δ は図 1 の 3 種類だけである。それらをここでは、池田氏のオリジナル番号 (1-1), (1-2), (1-3) を借りて、池田(1-1)などとあらわす。

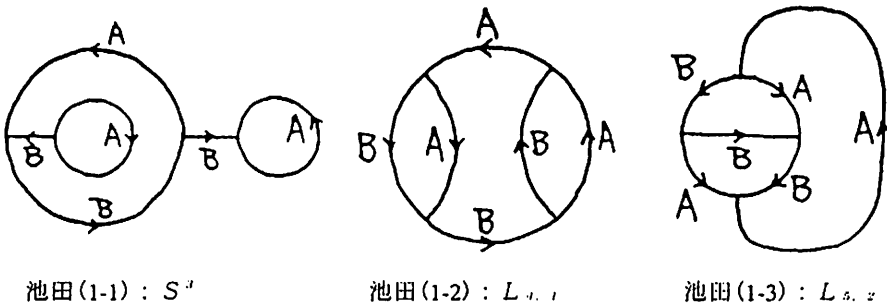


図 1 : $\# \Delta = 1$ なる DS-diagram Δ のリスト

上の図の各 2-cell を 1-labels であらわすとそれぞれ

池田(1-1) : $\{ A, AB^1ABB \}$, 池田(1-2) : $\{ AB^1, AABB \}$, 池田(1-3) : $\{ AAB, BBA^1 \}$ となる。 $\{ A, AB^1ABB \}$ は 1 辺形 A と 5 辺形 AB^1ABB からなる集合をあらわしている。逆に、このような表記が与えられると、それに対応する DS-diagram の図は一意に定まる。したがって、こういう表記も DS-diagram のひとつの表現である。

DS-diagram に含まれる 2-cells が何辺形であるかを、 (p, q, r, \dots) , $p \leq q \leq r \leq \dots$ で示し、これを索引番号と仮称する。たとえば池田(1-1)の索引番号は(1,5), 池田(1-2), 池田(1-3)はそれぞれ(2,4), (3,3)である。

池田氏のリストによると、 $\# \Delta = 2$ となる DS-diagram は、向きづけ不可能な多様体のものを込めて、12 種類ある。これらも池田氏のオリジナル番号を借りて、池田(2-*)とあらわす。このかっこ内の初めの番号 2 は $\# \Delta = 2$ であることを示している。

同じ頃、石井一平氏によって、向きづけ可能な3次元閉多様体に対する $\# \Delta = 3, 4$ の E-cycle 付き DS-diagrams のリストなどが作成された。またその後、河野正晴氏によって $\# \Delta = 3$ の DS-diagrams の完全なリストが作られた。 $\# \Delta = 3$ の DS-diagrams は 63 個ある。ここではそれらを河野(3-0)~河野(3-62)とあらわすことにする。初めの番号 3 は $\# \Delta = 3$ をあらわし、後ろの番号は河野氏の命名したオリジナル番号である。河野氏のリストは石井氏の $\# \Delta = 3$ のリストを包含しているが、必要に応じて、石井(3-☆)を参照することにする。『3』は $\# \Delta = 3$ をあらわし、『☆』は石井氏のオリジナル番号である。

さてここでは原則として、DS-diagram の 0-label をアルファベット小文字であらわし、1-label をアルファベット大文字であらわすことにする。頂点を大文字、辺を小文字であらわす流儀の人々には違和感があるかもしれないが、趣味の問題であるから辛抱してください。また、1-label A に対して、その先端部分を『A'』、根っこの部分を『A』とあらわす。しかし、このようにあらわす必然性というか根拠はとくになく、この記号については悪評が高い。センスの悪さが露呈してしまった。とにかく、これらの A^* を『手』と呼ぶことにしよう。

DS-diagram の各 0-label は 4 点からなり、それぞれ 3 本の手が出ている。それらの配置は一般に次のようになっている。

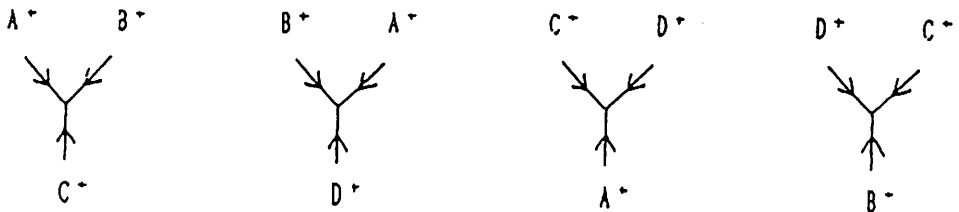


図 2 : 0-label のまわりの環境 $\Sigma(x)$

集合 $\Lambda = \{A', B'\}$ を corner といい、通常は $A'B'$ または $B'A'$ と簡略した形であらわす。図形的には図 2 に現れる 1 対の糊しろのことである。図 2 の観察からわかるように、一般に 1 つの 0-label x の周辺は合計 6 種類の corners から構成されている。

それぞれの配置の様子は、これらの corners の集合である

$$\Sigma(x) = \{A'B', C'D', A'C', B'D', A'D', B'C'\}$$

が与えられると、自然に定まる。そこで $\Sigma(x)$ のことを、0-label x のまわりの環境と呼ぼう。

DS-diagram の 1-label A は 3 本の辺からなるが、その配置と形状はその端点の 0-label の様子によってつぎのように、アーク型 Σ_a 、風船型 Σ_b 、稲妻形 Σ_c の 3 種類に分かれる：

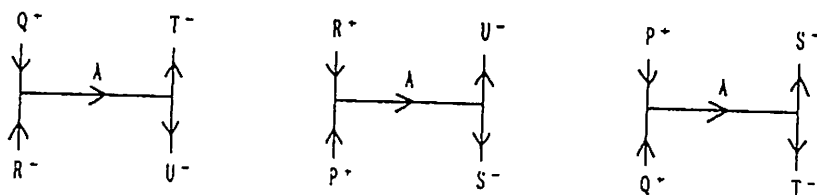
$$\text{アーク型: } \Sigma_a = \{P'AS^-, Q'AT^-, R'AU^-, P'Q', Q'R', R'P', S^-T^-, T^-U^-, U^-S^-\}$$

風船型 : $\Sigma_f = \{ A; B^+AB^-, C^+AC^-, B^+C^+ \}$

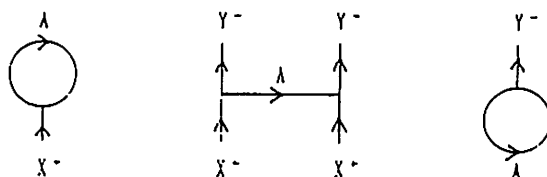
稲妻型 : $\Sigma_w = \{ X^+AAY^-, X^+A^{-1}Y^-, X^+Y^- \}$

アーキ型の 1-label の特徴は、その始点の 0-label と終点の 0-label の名前が異なっていることである。これに対し、風船型と稲妻型では両端点の 0-label が一致している。そこでこの両者を（アーキ型と対比させて）ループ型と合称する。これらを図示すると図 3 のようになる。風船型の特徴は、同じ 1-label を持った 3 本のうちの 2 本が（あたかも縁日の風船のように）1 辺形になっていることである。また稲妻型の特徴は、同じ 1-label を持った 3 本の辺が（同じ進行方向に）ジグザグに連なっていることである。

アーキ型 :



風船型 :



稲妻型 :

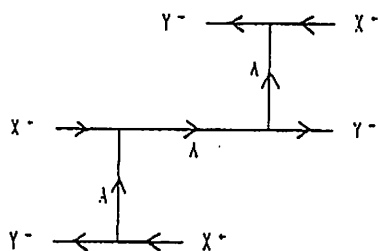


図 3 : 1-label の形状

2. Φ -変形

図2で示されているような、0-label x のまわりの環境：

$$\Sigma(x) = \{A^*B^*, C^*D^*, A^*C^*, B^*D^*, A^*D^*, B^*C^*\}$$

について考える。そのなかの1つのcorner A^*B^* に注目して、図4のように補助線(と補助円)を記入する。

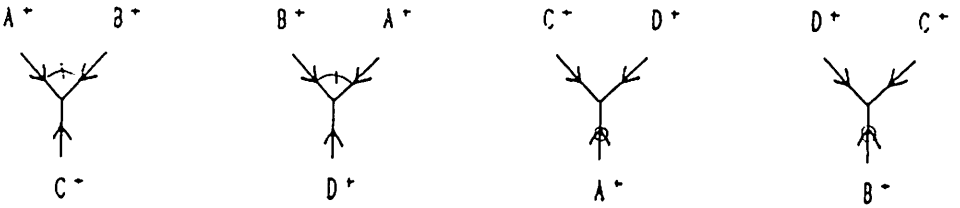


図4： Φ^* -変形のための補助図

この補助図を介して得られる図5は

$$\Sigma(EF^{-1}, GH^{-1}) = \{EF^{-1}, GH^{-1}; A^*B^*, C^*D^*, A^*EG^{-1}C^*, B^*FH^{-1}D^*, A^*FG^{-1}D^*, B^*EH^{-1}C^*\}$$

とあらわされる。

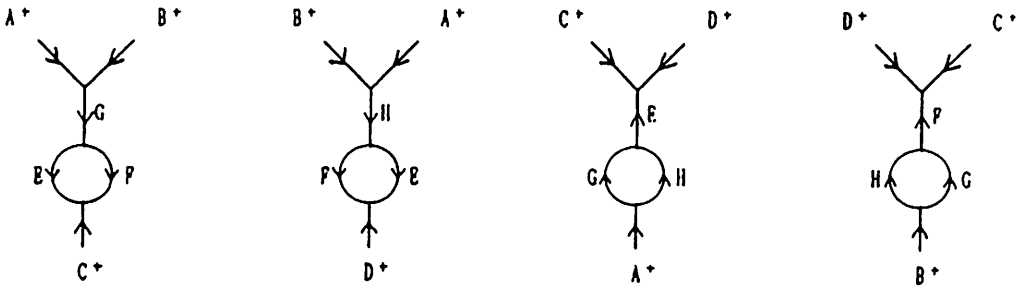
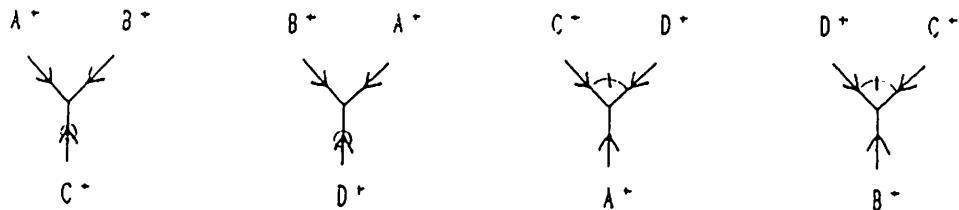


図5： $\Sigma(EF^{-1}, GH^{-1})$

$\Sigma(x)$ を $\Sigma(EF^{-1}, GH^{-1})$ に変える変形を、 (A^*B^*, C^*D^*) に関する Φ^* -変形といい、記号で $\Phi^*(A^*B^*, C^*D^*)$ とあらわす。

さて図2で、corner A^*B^* の代わりにcorner C^*D^* に着目したときの変形 $\Phi^*(C^*D^*, A^*B^*)$ について観察すると、この場合の補助図は図6ようになるが、これから得られる結果図は、 $\Phi^*(A^*B^*, C^*D^*)$ による結果図(=図5)と完全に一致する。

図6 : $\Phi^{-}(C'D', A'B')$ のための補助図

したがって、次の関係がある。

Lemma 1. $\Phi^{-}(A'B', C'D') = \Phi^{-}(C'D', A'B')$

図2 (あるいは $\Sigma(x)$) は6種類の corners $A'B', C'D'; A'C', B'D'; A'D', B'C'$ から構成されているが、それらに関して

$$\Phi^{-}(A'B', C'D') = \Phi^{-}(C'D', A'B'),$$

$$\Phi^{-}(A'C', B'D') = \Phi^{-}(B'D', A'C'),$$

$$\Phi^{-}(A'D', B'C') = \Phi^{-}(B'C', A'D').$$

の3種類の Φ^{-} -変形を考えることができる。

$\Phi^{-}(A'B', C'D')$ の逆の変形は、 $\Sigma(EF^{-1}, GH^{-1})$ のなかの2種類の2辺形 $\{EF^{-1}, GH^{-1}\}$ に着眼すればよいので、これを $\Phi^{-}(EF^{-1}, GH^{-1}) : \Sigma(EF^{-1}, GH^{-1}) \Rightarrow \Sigma(x)$ とあらわす。そのような変形を一般に、 Φ^{-} -変形と称する。

Φ^{-} -変形と Φ^{-} -変形をあわせて、 Φ -変形という。

3. Ψ -変形

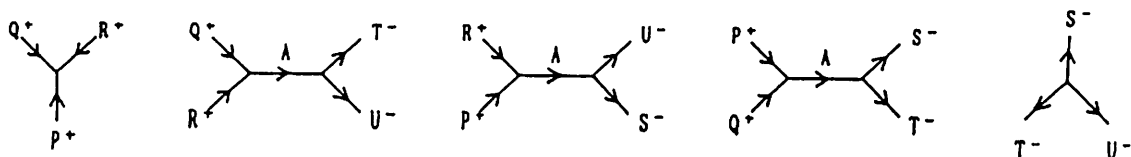
アーク型の 1-label A のまわりの環境 :

$$\Sigma(A) = \{P^+A^+S^-, Q^+A^+T^-, R^+A^+U^-, P^+Q^+, Q^+R^+, R^+P^+, S^-T^-, T^-U^-, U^-S^-\}$$

について考える。 $\Sigma(A)$ を

$$\Sigma(XYZ) = \{XYZ; P^+S^-, Q^+T^-, R^+U^-, P^+Q^+, Q^+R^+, R^+P^+, S^-T^-, T^-U^-, U^-S^-\}$$

に変える変形を $\Psi(A) : \Sigma(A) \Rightarrow \Sigma(XYZ)$ とあらわす。これを図で描くと次のようになっている :

図7 : アーク型 1-label A の周りの環境 $\Sigma(A)$

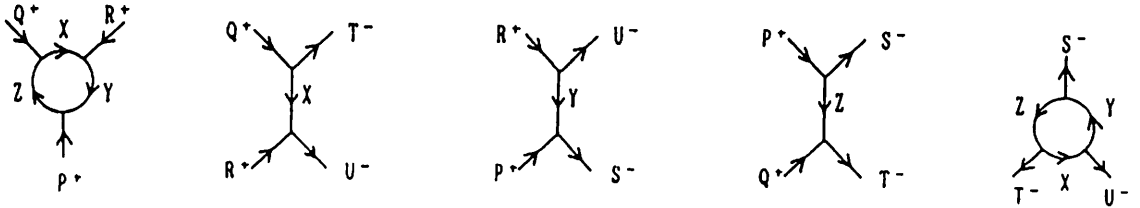


図 8 : $\Psi^-(A)$ の結果図 $\Sigma(XYZ)$

$\Sigma(A)$ に $\Psi^-(A)$ を施した結果得られる $\Sigma(XYZ)$ において、3 辺形 XYZ を構成する 1-labels X, Y, Z はいずれもアーク型になっている。逆に、一般の DS-diagram のなかに現れる 3 辺形 XYZ の各 1-label X, Y, Z がいずれもアーク型であるとき、3 辺形 XYZ のまわりの環境は $\Sigma(XYZ)$ の形であらわすことができる。このとき、 $\Sigma(XYZ)$ を $\Sigma(A)$ に変える変形のことを、 $\Psi^-(XYZ) : \Sigma(XYZ) \Rightarrow \Sigma(A)$ とあらわす。これらの Ψ^+ -変形と Ψ^- -変形をあわせて Ψ -変形という。

4. DS 変形の生成元

2つの DS-diagrams Δ, Δ' に対して、 Φ -変形と Ψ -変形を有限回繰り返して移りあえるとき、 Δ と Δ' は DS 同値であるといい、それらの変形の有限列：

$$\Delta = \Delta_1 \Rightarrow \Delta_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow \Delta_n = \Delta'$$

(または単に、 $\Delta \Rightarrow \Delta'$) を、 Δ から Δ' への DS 変形という。

定理. $\# \Delta \geq 2, \# \Delta' \geq 2$ である 2つの DS-diagrams Δ と Δ' が DS 同値であるならば、 Ψ -変形を有限回適用するだけで、 Δ と Δ' は互いに移りあえる。

この定理の主要部分は次のように述べることができる。

Lemma 2. 2つの DS-diagrams Δ と Δ' に対して、DS 変形：

$$\Delta = \Delta_1 \Rightarrow \Delta_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow \Delta_n = \Delta'$$

で、各 i に対して $\# \Delta_i \geq 2$ であるようなものが存在すれば、 Δ に Ψ -変形だけを有限回適用することにより Δ' を得ることができる。

5. Key Lemma の証明

DS-diagrams の 0-labels の数は、 Φ -変形を 1 回適用することによって、2 個増減する。したがって、DS-diagrams Δ, Δ' に対する DS 変形： $\Delta = \Delta_1 \Rightarrow \Delta_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \Delta_n = \Delta'$ が《各 i に対して $\# \Delta_i \geq 2$ である》という条件を満たすならば、この列の中に現れる Φ -変形は $\# \Delta_i \geq 4$ なる Δ_i に対する変形である。

したがって、定理の根幹をなす Key Lemma となる Lemma 2 が成り立つことを示すには、次の 2 つの Lemma が証明できればよい。

Lemma 3 $\# \Delta \geq 2$ の DS-diagram Δ に対する Φ -変形： $\Delta \Rightarrow \Delta'$ は、有限個の Ψ -変形の列であらわすことができる。

Lemma 4. $\# \Delta \geq 4$ の DS-diagram Δ に対する Φ -変形： $\Delta \Rightarrow \Delta'$ は、有限個の Ψ -変形の列であらわすことができる。

Lemma 3, 4 の証明のために、次の Lemma 5, 6 を置く。

Lemma 5. 1-labels A, B, C, D のすべてがループ型であるならば

$$\Sigma(x) = (A'B', C'D', A'C', B'D', A'D', B'C')$$

を含む DS-diagram Δ では、 $\# \Delta = 1$ である。

Lemma 6. 1-labels A, B, C, D のすべてがループ型であるならば

$$\Sigma(EF^{-1}, GH^{-1}) = (EF^{-1}, GH^{-1}, A'B', C'D', \\ A'EG^{-1}C', B'FH^{-1}D', A'FG^{-1}D', B'EH^{-1}C')$$

を含む DS-diagram Δ では、 $\# \Delta = 3$ である。

ところで、これらの Lemma 5, 6 が成り立つことを確認するには、『手』同士のつながりの様子を調べればよい。A, B, C, D のすべてがループ型であるならば、 $\Sigma(x)$ にしても $\Sigma(EF^{-1}, GH^{-1})$ にしても、それを含む DS-diagram はそれ自体で閉じてしまい、ここに現れている以上の、新たな 1-label を含有することはできないのである。このことは誰にでも容易に検証できる。

[Lemma 3 の証明] Δ を $\# \Delta \geq 2$ なる DS-diagram とし、 Δ の 0-label x のまわりの環境を

$$\Sigma(x) = (A'B', C'D', A'C', B'D', A'D', B'C')$$

とする。Lemma 5 により、1-labels A, B, C, D のうちどれか 1 つはアーク型であるものが存在する。今、それを D としても一般性を失わない。そのとき $\Sigma(x)$ は (順序も少し変えて)

$$\Sigma'' = (B'C', C'A', A'B', A'D^{-1}E', B'D^{-1}F', C'D^{-1}G', F'G', G'E', E'F')$$

(22)

と書ける。これに $\Psi^*(D)$ を施すと

$$\Sigma_1 = \{XYZ; B'XC', C'YA', A'ZB', A'E', B'F', C'G', FXG', G'YE', E'ZF'\}$$

となる。この Σ_1 に $\Psi^*(Z)$ を施すと

$$\Sigma_2 = \{UVW, XY; B'VXC', C'YV^{-1}A', A'B', A'U^{-1}E', B'U^{-1}F', C'G', FW^{-1}XG', G'YWE', E'F'\}$$

となる。この Σ_2 に $\Psi^*(W)$ を適用すれば

$$\Sigma_3 = \{RST, UV, XYR; B'VS^{-1}XC', C'YT^{-1}V^{-1}A', A'B', A'U^{-1}TE', B'U^{-1}S^{-1}F', C'G', FXG', G'YE', E'F'\}$$

となる。この Σ_3 に $\Psi^*(XYR)$ を施して

$$\Sigma_4 = \{ST, UV; B'VS^{-1}C', C'T^{-1}V^{-1}A', A'B', A'U^{-1}TQ^{-1}E', B'U^{-1}S^{-1}Q^{-1}F', C'Q^{-1}G', FG', G'E', E'F'\}$$

が得られる。E', F', G'の部分を簡約すると

$$\Sigma_5 = \{ST, UV; B'VS^{-1}C', C'T^{-1}V^{-1}A', A'B', A'U^{-1}TQ', B'U^{-1}S^{-1}Q', C'Q'\}$$

となる。1-labelsのいくつかを

$$Q \rightarrow D, V \rightarrow E, U^{-1} \rightarrow F, T^{-1} \rightarrow G, S \rightarrow H$$

と書き直すと、 Σ_5 は

$$\Sigma(EF^{-1}, GH^{-1}) = \{EF^{-1}, GH^{-1}; A'B', C'D', A'EG^{-1}C', B'FH^{-1}D', A'FG^{-1}D', B'EH^{-1}C'\}$$

と一致する。よって Lemma 3 は示された。■

[Lemma 4 の証明] DS-diagram Δ が

$$\Sigma(EF^{-1}, GH^{-1}) \cong \{EF^{-1}, GH^{-1}; A'B', C'D', A'EG^{-1}C', B'EH^{-1}C', A'FG^{-1}D', B'FH^{-1}D'\}$$

を含み、 $\#\Delta \geq 4$ であるものとしよう。そのとき Lemma 6 により、1-labels A, B, C, D のうちのどれか1つ、たとえばDはアーク型である。このとき、 $\Sigma(EF^{-1}, GH^{-1})$ は

$$T_0 = \{EF^{-1}, GH^{-1}; A'B', C'D^{-1}N', A'EG^{-1}C', B'EH^{-1}C', A'FG^{-1}D^{-1}M', B'FHD^{-1}L', M'N', N'L', L'M'\}$$

と書ける。これに $\Psi^*(D)$ を施すと

$$T_1 = \{XYZ, EF^{-1}, ZGH^{-1}; A'B', C'N', A'EG^{-1}XC', B'EH^{-1}Y^{-1}C', A'FG^{-1}M', B'FHL', M'XN', N'YL', L'ZM'\}$$

となる。この T_1 に $\Psi^*(ZGH^{-1})$ を施すと

$$T_2 = \{XY, EW^{-1}F^{-1}; A'B', C'N', A'EXC', B'EY^{-1}C', A'FM', B'FL', M'WXN', N'YW^{-1}L', L'M'\}$$

となる。この T_2 に対して $\Psi^*(EW^{-1}F^{-1})$ を適用すれば

$$T_3 = \{XYV; A'V^{-1}B', C'N', A'XC', B'Y^{-1}C', A'M', B'L', M'XN', N'YL', L'VM'\}$$

となる。この T_3 に $\Psi^*(XYV)$ を施して

$$T_4 = \{A'B', C'U^{-1}N', A'C', B'C', A'U^{-1}M', B'U^{-1}L', M'N', N'L', L'M'\}$$

が得られる。そこで、 $U \rightarrow D$ と置き換えてE', F', G'の部分を簡約すると

$$T_5 = \{A'B', C'D', A'C', B'C', A'D', B'D'\}$$

となるが、これは $\Sigma(x)$ にほかならない。よって Lemma 4 は示された。■

6. $\# \Delta = 1$ なる Δ が絡む DS 変形

DS 同値な 2 つの DS-diagrams Δ, Δ' , ただし $\# \Delta \geq 2$ かつ $\# \Delta' \geq 2$, に対して, それらを結ぶ DS 変形

$$\Delta = \Delta_1 \Rightarrow \Delta_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \Delta_n = \Delta'$$

の途中に現れる DS-diagrams のなかには, $\# \Delta_k = 1$ なる Δ_k もあり得る. そのような DS 変形を, Ψ -変形だけを用いた有限列に直せるかどうかを調べたい.

さいわい, 池田氏のリストアップにより, $\# \Delta_k = 1$ となる DS-diagrams は

$$\text{池田 (1-1), 池田 (1-2), 池田 (1-3)}$$

の 3 個だけであることが分かっているから, これらを通過する DS 変形の様子について調べてやれば十分である.

$\# \Delta_k = 1$ となるためには, 変形: $\Delta_{k-1} \Rightarrow \Delta_k$ は Ψ -変形または Φ -変形でなければならない. $\Delta_{k-1} \Rightarrow \Delta_k$ が Ψ -変形ならば $\# \Delta_{k-1} = 2$, Φ -変形ならば $\# \Delta_{k-1} = 3$ である. ところが次の性質がある.

Lemma 7. $\# \Delta \geq 2$ かつ $\# \Delta' \geq 2$ であるような DS 変形

$$\Delta = \Delta_1 \Rightarrow \Delta_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \Delta_n = \Delta'$$

において, $\# \Delta_k = 1$ とする. このとき,

(i) 変形: $\Delta_{k-1} \Rightarrow \Delta_k$ は Φ -変形である. したがって, $\# \Delta_{k-1} = 3$ であり, Δ_{k-1} の少なくとも 2 種類の 2-labels は 2 辺形である.

(ii) 変形: $\Delta_k \Rightarrow \Delta_{k+1}$ は Φ -変形である. したがって, $\# \Delta_{k+1} = 3$ であり, Δ_{k+1} の少なくとも 2 種類の 2-labels は 2 辺形である.

[Lemma 7 の証明] まず, DS-diagrams 池田 (1-1), 池田 (1-2), 池田 (1-3) があらわす多様体は順に, 3 次元球面 S^3 , (4, 1) 型, (5, 2) 型のレンズ空間である.

ところで, $\# \Delta = 2$ についての池田氏のリストによると, (4, 1) 型, (5, 2) 型のレンズ空間の DS-diagram は存在しない. また, 3 次元球面の DS-diagrams は

池田 (1-1): $\{ A, C, ABDAD^{-1} CDBCB^{-1} \}$ 索引番号 (1, 1, 10)

池田 (1-2): $\{ A, BCCD, ABC^{-1} DA^{-1} DB^{-1} \}$ 索引番号 (1, 4, 7)

池田 (1-3): $\{ C, D, AB^{-1} C^{-1} BDB^{-1} AD^{-1} A^{-1} C \}$ 索引番号 (1, 1, 10)

の 3 種類だけであって, これらはいずれも 3 辺形を含んでいないので, 1 回の Ψ -変形で池田 (1, 1) (= 通称 "あわび") に移ることはできない. したがって, 変形: $\Delta_{k-1} \Rightarrow \Delta_k$ は Φ -変形である.

つぎに, $\# \Delta_k = 1$ なる DS-diagram Δ_k のなかの 1-labels はすべてループ型なので, Δ_k においては Ψ -変形を許す 1-label が存在しない. したがって, 変形: $\Delta_k \Rightarrow \Delta_{k+1}$ は Φ -変形である. ■

ところで, 河野氏のリストによると,

(24)

DS-diagram Δ が S^3 , (4, 1)型, (5, 2)型のレンズ空間のいずれかの DS-diagram Δ で, $\# \Delta = 3$ であり, Δ の少なくとも2種類の 2-labels が2辺形であるようなものは, 次の8種類に限られる.

S^3 :

河野(3-14) : (1, 2, 2, 13) : { A, BF, CE, ABCDDEFABF⁻¹CD⁻¹EB⁻¹ } : =石井(1-2), 石井(1-4)

河野(3-48) : (2, 2, 3, 11) : { AB⁻¹, CD⁻¹, AEC, AFC⁻¹BEF⁻¹B⁻¹DF⁻¹ED⁻¹ }

河野(3-49) : (2, 2, 3, 11) : { BE⁻¹, CF⁻¹, AEC, ABCDBFDEFAD⁻¹ } : =石井(1-15)

$L_{4,1}$:

河野(3-47) : (2, 2, 2, 12) : { AD⁻¹, BE⁻¹, CF⁻¹, AFBACBDCEDFE }

河野(3-26) : (2, 2, 6, 8) : { BC⁻¹, DE⁻¹, ABDFE⁻¹C⁻¹, AACDF⁻¹F⁻¹E⁻¹B⁻¹ }

河野(3-51) : (2, 2, 6, 8) : { AB⁻¹, CD⁻¹, BFD⁻¹AEC⁻¹, AFE⁻¹B⁻¹DE⁻¹FC⁻¹ }

$L_{4,2}$:

河野(3-50) : (2, 2, 5, 9) : { AB⁻¹, CD⁻¹, AEF⁻¹EC⁻¹, AFD⁻¹BFC⁻¹BED⁻¹A }

河野(3-27) : (2, 2, 7, 7) : { BC⁻¹, DE⁻¹, AABDFE⁻¹C⁻¹, FFD⁻¹C⁻¹A⁻¹BE }

ところで, これらは Ψ -変形だけで移り合うことが分かる. すなわち,

Lemma 8. (1) 河野(3-14), 河野(3-48), 河野(3-49)は互いに Ψ -変形だけで移り合う.

(2) 河野(3-47), 河野(3-26), 河野(3-51)は互いに Ψ -変形だけで移り合う.

(3) 河野(3-50), 河野(3-27)は互いに Ψ -変形だけで移り合う.

証明は省略する.

(完)