箱根セミナ記録 88(1988)

結び目とDS-diagram

山下正勝 (東洋大・工)

§1. あわびとクローバー結び目

20年以上も前になるだろうか？上智大学の池田某の研究室では毎週のようにfake surfaceの研究成果が発表されていた。当時は皆，はつらつとしていて決しておちこぼれてはいなかった(もっともおちこぼれ組になるのにたいした時間はかからなかったが)。

3-ballのspineになっているfake surfaceの例として池田某はあわびなるものを構成した。fake surfaceのモデルといっても小生などは教えられたビングハウス以外には何も想像できなかった時代のことである。この珍妙な生物を「あわび(abalone)」と命名されたのが野口広先生であることは有名な話である。

このあわびの具体的な描法を池田某と津久井某が工夫していた。津久井某は図1があわびの正体であるといい，

「あわびはクローバーだ」

などと訳のわからないことを口走りだした。小生は愚鈍ではあるが憐れみ深い男でもあったので，ただ

「かわいそうになあ。勉強のしすぎで病気になっちゃって。これからどうするんだろ」

と気の毒がっていたもんだ。

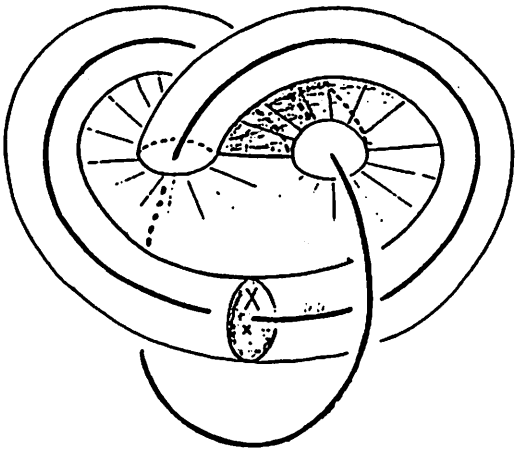


図１：あわびとクローバー結び目

津久井某は

「図１のfake surfaceとは2-cell X上の１点xだけでしか交わらないようなS^3内のloop はクローバー結び目である。これがあわびというfake surfaceの特徴である。ああなんとアワ・クロなんだ」

とつまらなさそうにつぶやく。

この病気はその症状からアワクロ病と命名された。麻疹とアワクロ病は高齢になってかかるほど軽くなる，と書いたモノの本にはついぞであったことがない。アワクロ病にかかると，時の流れにそぐわない重大な研究のことを，さもつまらなさそうに宣伝し始める。本人だけでなく周囲の人まで巻き込むのでその被害は甚大である。アワクロニズム（事大錯誤）の蔓延である。

今にして思えば，この病気は２０年前に大流行していてもおかしくなかったのである。なにせ，池田－津久井という諸悪の根源がモーレツな毒を吐いていた。彼等の毒がどんなものであったかソッと教えて進ぜよう。名は体をあらわす，というモンネ。

一体おまえら何してる
決断早くいさぎよく
黙って俺についてこい
人のことなど気にするな
ロマン求めて行く先にゃ
真のトポロギ待ってるぜ

ついに見つけたあわびの中に
苦労のすえのクローバー
いとも巧みに隠れてる
やあ我こそはアワクロ党の
スーパースターだ指導者だ
行く手にみえるトポロギ向けて
今日も元気にガンバロー

幸い，世界に冠たる日本のトポロギ界はその危険を察知してこの２人を首尾よく隔離した。おちこぼれ組の誕生である。この処理が迅速であったので，ことなきを得て今日に至った。慶賀のいたりである。

しかし２０年の歳月は長い。さすがの免疫も少し弱まってきた。加えて解析界が新たに石井某と称するインベーダーをこの平和なトポロギ界に送り込んできたのである。トポロギ界あやうし！

石井某はFlow-Spineという道具を使って作ったE-cycle付きＤＳという改造兵器で，基本群の非自明性という実弾を発射してきた。その後もSeifert fiber space，Dehn-surgery，branch covering spaceなどといったトポロギ界特有の（とだれもが思っていた）概念に猛烈な攻撃を加えてきた。

以下，さらに続くこのチャランポランな埋め草の内容は，危険な

現状の紹介と見通し暗い将来への展望を含む。（とは チトおおげさダネ）

アワクロ病の初期症状について簡単に述べておこう。

M^3を３次元閉多様体とする。Fを $M^3-\mathrm{Int}B^3$ から得られる fake surface とする（以下，このFのことをMの fake surface と誤称する）。

アワクロ病にかかると先ず

「fake surface Fの，かってなopen 2-cell 内の任意の１点xに対し，xを通りx以外ではFと交わらない単純閉曲線がM^3内に必ず存在する」

というようなうわごとを言い始める。さらに悪化すると

「かってな多様体M^3 内の任意の結び目 k に対して，$F\cap k=$ 1点 となるような M^3 のfake surface F がとれる。(余計なことを言えば，この１点$F\cap k$はFの第１種の異常点としてよい)」

などと言い出す。最近ではこれらの症状により，横山某，河野某，金戸某といった面々がアワクロ病と診断された。金戸某は

「M^3 内の任意の結び目 k に対し，M^3 のDS-diagram Σがどこからともなく現われる。このΣには2-cell の組 X^+, X^- が内蔵されていて，対応するかってな２点 $x^+\in X^+$ と $x^-\in X^-$ を結ぶB^3内のまっすぐな線分をKとすると，$K/\sim$ は $M^3=B^3/\sim$ の中の結び目 k になってしまう」

とうめいているが，おなじことである。

§2. DS-diagram に潜む結び目

これからよく使う記号について説明しておく。

(イ) M^3: 3次元閉多様体.

(ロ) Σ : MのDS-diagram.

※ 我々の世界では，3次元閉多様体MとDS-diagram Σを混同することも多い。(疑う者はMを90°回転させてみよ。Σが得られるであろう。)

(ハ) F : Σから得られるMのfake surface. (ここでは適宜Fを (open) cell complexと考えることにする。)

(ニ) B_r: 表面にΣがプリントしてある半径1の3-ball.

(ホ) f : identification map $f : B_r \to M$.

※ fからinduce されるidentification map $f|\Sigma$も混同してfと書く。即ち $f = f|\Sigma : \Sigma \to F$。これらのidentification map によって

$$M = B_r/\sim, \quad F = \Sigma/\sim$$

という略記が許されることになる。

さて，任意の 2-label $X \in F$ に対して，結び目 $k(X)$ をassociate させる方法を以下にだらだらと述べる。

先ず，identification map $f : \Sigma \to F$ によって$X \in F$に対応する2-cell をX^+, $X^- \in \Sigma$とする。任意の点$x \in X$に対して

$$f(x^+) = x, \quad f(x^-) = x$$

となる点 $x^+ \in X^+$, $x^- \in X^-$ が定まる。したがって，x^+とx^-を端点とする線分 $\ell(x)$ が(半径1の) 3-ball B_r内に定まる。$f : B_r \to M$ による $\ell(x)$ の像 $f(\ell(x)) \subset M$ を $k(x)$ と書くことにしよう。

なにを隠そう，このk(x)がアワクロ病をひきおこす原虫であったのだ！fake surface をただいたずらに眺めていたときには，この病気の初期症状の依って来る所以が小生にはサッパリ分からなかったが，今やっと見えてきた。ＤＳで眺めるとバカにあたり前のことだった。これで小生もめでたくアワクロ病にかかれたかな？

バカなあたり前ついでに：

<u>自明な命題</u>　（１）　k（x）はM内の単純閉曲線である。
（２）　任意の２点 x，y∈X∈F に対し，(k(x)，x) と (k(y)，y) は (M，X) 上のambient isotopyで互いに移り合う。

このことからk(x)とk(y)をM内の結び目として区別する必要がなくなった。そこで以下，x∈X∈Fのときの線分ℓ(x)のことをℓ(X)，結び目k(x)のことをk(X)と書くことにする。

かげの声：ℓ(x)，k(x)はそれぞれℓ(X)，k(X)の代表元である，といった言い方になるような定義でないと叱られるのかな？そうだとしたら，数学なんて，なんとも窮屈なもんだ。

k(X)とは実際どんなものかを調べるまえに，簡単な実例を挙げておこう。

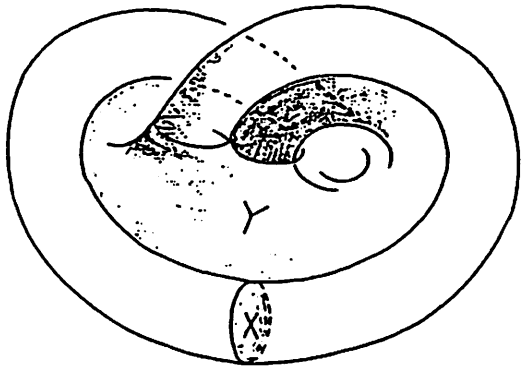
名作　INVITATION TO DS-DIAGRAM の文末には，１５個のDS-diagramの実例がリストアップされている。大神のお告げによるとここには 頂点数が１および２のfake surfaces に対応するすべてのDS-diagrams が掲載されてあるという。すなわち，ＤＳ-グラフの頂点数が４および８のDS-diagrams の完全リストである。

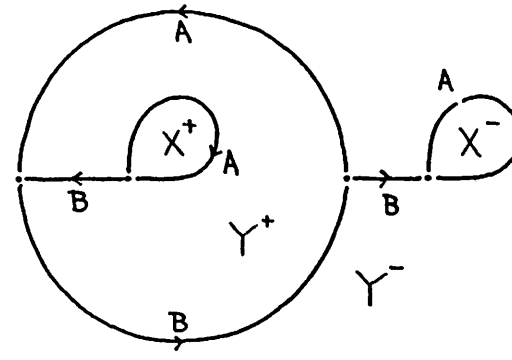
S^3 のDS-diagramsは，このリストの中に４個現われる。それらの４個のDS-diagramsについて，それぞれの2-cell がどんな結び目を表わしているか，以下で結果だけ述べておく。

例1　（あわび）

k（X）＝trefoil knot（クローバー結び目）

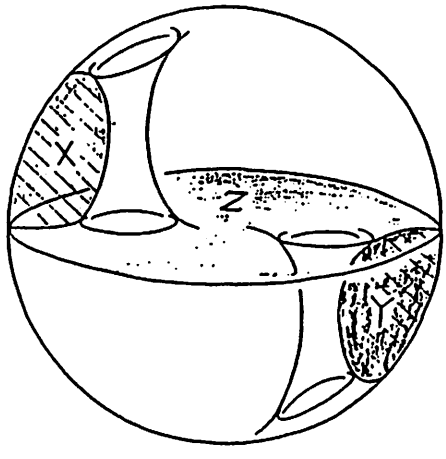
k（Y）＝trivial knot（平凡結び目）

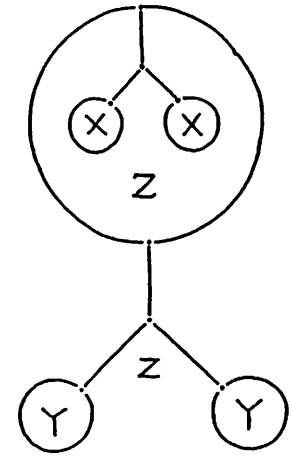




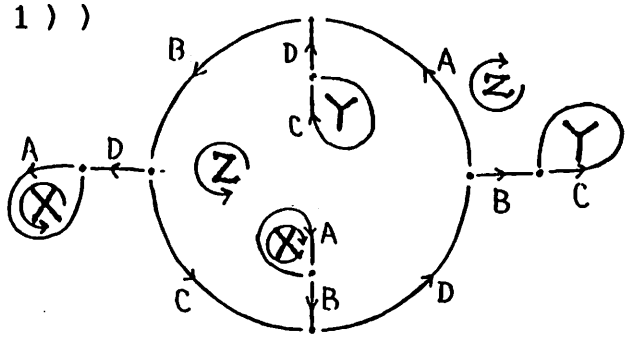
例2　（ビング　ハウス）

k（X），k（Y），k（Z）はいずれもtrivial knot

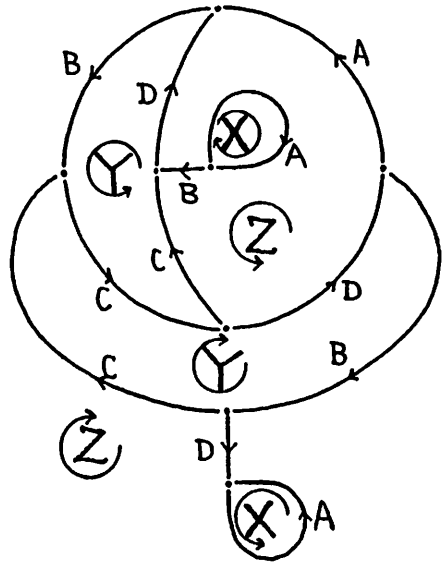




例３　（池田－井上：（２－１））
k（X）＝ クローバー結び目
k（Y）＝ クローバー結び目
k（Z）＝ 平凡結び目



例４　（池田－井上：（２－２））
k（X）＝ 5_1－結び目
k（Y）＝ 平凡結び目
k（Z）＝ 平凡結び目



5_1－結び目は（２，５）型のトーラス結び目 $T_{2,5}$ という別名をもっている。陽気なほらふき男ロルフセン君によると，$T_{2,5}$ はまたの名を「ソロモン王の紋章」と呼ぶんだそうな。ほら，神秘の力を有するという例の六星形のことだ。あれ？変だね。五星形だったかな。まあどっちでもいいや。

ソロモンといえば，紀元前１０世紀のイスラエルに君臨していたとても賢い王様として有名だ。ちなみに，‥‥ You are as wise as Solomon, ‥‥‥ と言われたら，君はおおいに喜んでいいよ。

「‥‥‥あんたはエライ。世界に類のない大××者だ。‥‥‥」と上司が笑っているよ（笑いに百種の嗤いあり）。ナニ？「××⇒知恵」デショだって？あんたよっぽど気のいい男だねえ。あたしゃあんたみたいなひと好きだよ。栄転も真近だ。首，洗っとこうね。

§3．結び目のＤＳ表現の存在定理

この節ではつぎの存在定理について講釈する。

<u>存在定理</u>　k を３次元閉多様体 M 内の単純閉曲線（＝Mの中の結び目）とする。そのとき M のDS-diagram Σ が存在する（そら出た！）。どんなΣかというと，Σの陰には2-label X∈F＝Σ／～ が潜んでいて，結び目 k はM内のambient isotopyによって k(X) に重なってしまう，というものである。

結び目 k(X) というが，それは3-ball B_xの中のまっすぐな線分 ℓ(X) の両端を同一視しただけのものである。金戸氏は「すべての結び目はまっすぐだ」と喜んでいたが，このことから，はからずも氏がアワクロ病の重病人であることが知れてしまった。

<u>定理の証明</u>　第１段階：先ず，「任意の３次元閉多様体 M はＤＳ表現をもつ」ことに注意する。いまΣをMの１つのDS-diagramとする。Σ／～＝F であり，F（⊂M）の第２種，第３種の異常点の集合はそれぞれ1-cells，2-cellsの有限個の集まりであるから高々１次元。また，結び目 k（⊂M） も１次元。したがって一般の位置の議論によって，kとFは交わるとしてもFの2-cell 上の有限個の点でだけだとしてよい。

General Position とTransversarity の権威である小林先輩が１００人来たってこんなところは恐くない。否，先輩は心やさしいから，きっと味方になってくれることだろう。

さて，3-ball B_xのなかで結び目 k がどうなっているかを見てみる。一般には，kは無残にも図２のように有限個の proper arcs k_1，k_2，．．．，k_n に切り刻まれていることだろう。もし，まったくの無傷だったら，わざとΣにぶつけてチョイと切っ

ておく。残酷のようだがそのほうがあとの仕事がやりやすい。

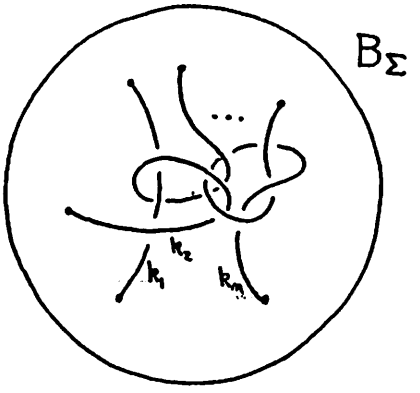


図２：結び目ｋのバラバラ事件

第２段階：さて，これらの $k_1, k_2, \ldots, k_n$ はおたがいに絡み合ったり自分自身で結ばっていたりしていて断末魔の表情がそのままである。これでは成仏できなかろう。とりあえずの目標はこれらの弧をもっと切り刻んで，結び目弧も絡み目弧もないようにすること（図４）。

先ず結び目弧を何とかしなくっちゃあ。そのために伝家の宝刀（図３）を用いて，大胆にかつ慎重に，バッサバッサと切っていく。

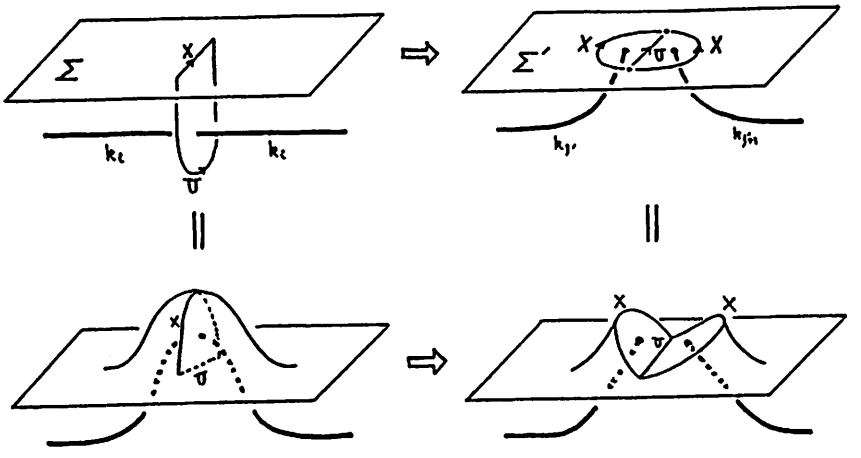


図３：結び目弧の切断法

結び目弧が消えたところでよく見ると，3-ball のありがたさでアーラ不思議！絡み目弧も消えているんじゃないのかな。

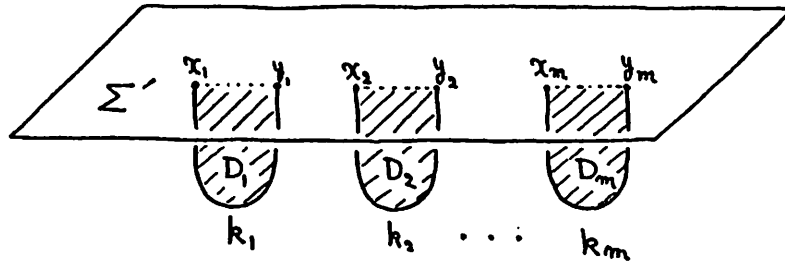


図４：結び目の成仏死体

第３段階：さてｋは $k = k_1 \cup k_2 \cup \ldots \cup k_m$ とｍ個のきれいな弧に切断された。各 k_i の両端点に x_i，y_i と印をつけておく。$f(y_i) = f(x_{i+1})$ となるようにしておくのが便利だが，そのためにはせっかくの k_i の順番もつけかえにゃならんかも知れん。まあそれぐらいの苦労はいとわないことにしよう。

それぞれのproper arc k_i にproper 2-disk D_i を張る。このとき $D_i \cap D_j = \phi$ となるように気をつけておこう。実はこんなこともあろうかと仏をきれいに切り刻んでおいたというわけじゃ。

そこで各 k_i を，2-disk D_i ごと（他の D_j にさわらぬように）スコップで掘り上げる。この掘り上げ作業が山芋掘りの腕のみせどころ。今年の山芋は作がいい。ヨイショヨイショッと。

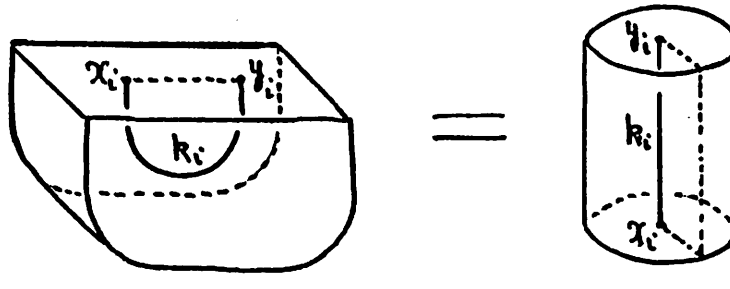


図５：掘り上げた泥つき山芋

あとの楽しみにk_1だけは掘らずにそのまま残しておこう。k_1の端y_1の回りに，いま掘り上げたk_2の端x_2の回りを，x_2がy_1にくるように，土のついたままくっつける。以下，k_2の端y_2にk_3の端x_3を，といった具合に順にk_nまでくっつける。Σから山芋を掘り上げたあとにm－1階建ての塔ができた（図6）。

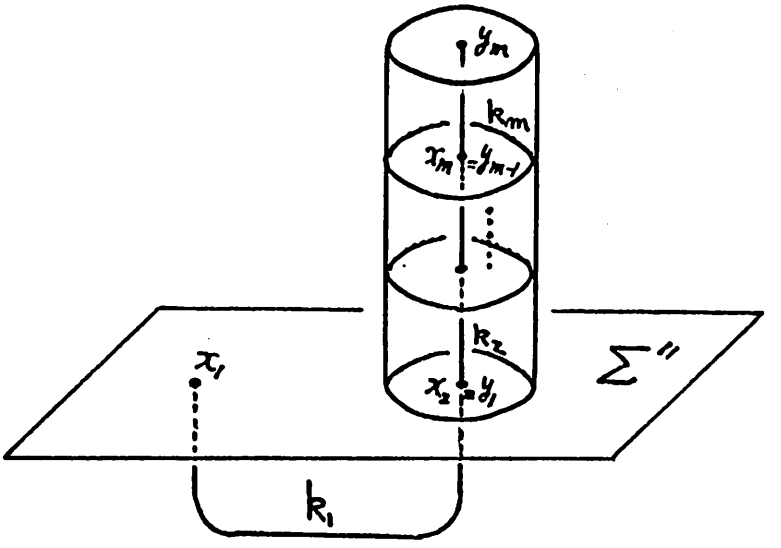


図6：結び目のＤＳ表現にかなり近い図

第４段階：図６で目的のものが大体できたと思ってよく見たら，いつのまにかＤＳでなくなってしまった。ただのpolygram だ。これまでずいぶん乱暴狼藉をはたらいたので，たたりをうけたらしい。これをＤＳ化するにはちょっと目をつぶってもらって　‥‥‥チチンプイプイ‥‥‥。さあできた。これで定理の証明はおしまい。
信じられますか？

§４．まじめな茶のみ話

１９８７年１１月，低次元トポロジー箱根セミナーにおいて，石井氏がセンセーショナルな講演を行なった。（彼の講演はいつでもセンセーショナルなのである。）そのなかの１つに，８の字結び目のDehn surgeryというのがあった。彼は海のかなたのThurstonを睨みつけていた。津久井氏は霊感鋭く熱を出して帰国してしまった。愚鈍な小生はDS-diagramとDehn surgeryがどこでどう結びつくのかわからなかったので，会場で眠っていた。護身術である。

家に帰って考えた。あれは一体なんだろう，と。そうこうするうちやっと「knotのexteriorのpolygramモドキからでもDehn surgeryがＤＳ化できるのじゃないか」と思えるようになった。ただし，石井氏のカッコイイ方法論と違ってあくまでも泥臭く‥‥。天才石井がペガサスを駆って天空を天翔るのに対し，豚才山下は匍匐前進みみずが土中をのたうち進む情けないありさま。

それでも「これでやっと箱根セミナーの原稿ができる」と喜びにうちふるえた。豚才には豚才なりの幸せがあるというもんだ。

ところがその頃，小生は数学教室の責任者という敵職（適職の誤植ではない．四面楚歌，いつも敵とやりあっていなければならない因果な職業のこと）にあったのと，スキーのインチキラクターという遊び（小生のわがままを，快くききいれてくださった体育教室の穐田，三浦両教授のご親切には，心より感謝申し上げます）のために，この実験に手を出す気がおこらなかった。１９８８年４月立教大学での日本数学会では，北からきた南方の人であった。

箱根セミナー報告集に載せる原稿ができなかった言い訳である。原稿の催促者を追い帰す手口はざっとこんなもんだ。うまいもんでしょ。

やっと実験に着手したのは夏８月，金戸氏からの激励があったからである。時間切れのため，つめるところまで調べ切れなかったので講演はつまらないものになった（ツメなきゃツマラない，こりゃアタリマエのことだった）が，内容は９月に筑波大学で話した通りである。（表題は「Dehn Surgery のＤＳ表現について」だったかなあ，忘れてしまった）

家に帰ってつめるべきところをつめてみたら，次のようなクローバー結び目のexterior のＤＳもどきが得られた。当初の予想よりきれいな形だったのでうれしかった記憶がある。

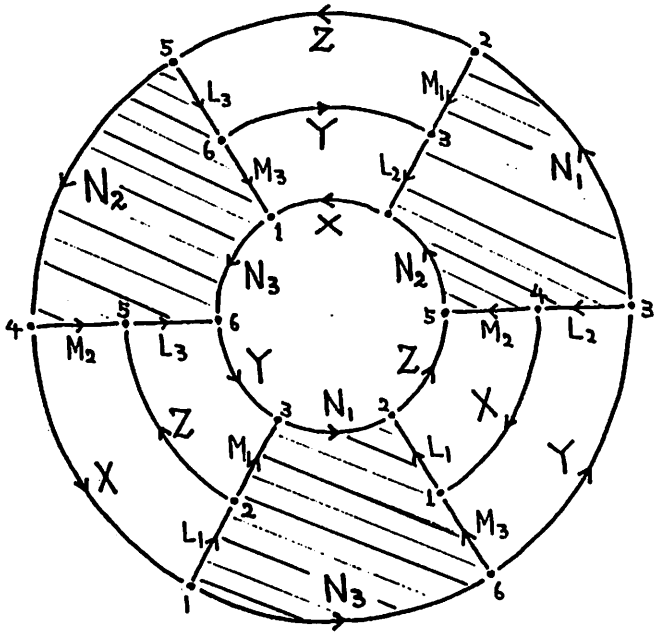


図７：クローバー結び目のとりまき空間のＤＳもどき図．
斜線の部分がクローバー結び目の近傍の境界となるトーラス．

この作業をおこなっているうち，いずれ早い時期に境界を持つ３次元多様体のDS-diagram を定義しなければと思うようになった。池田氏，横山氏の同意も得た。そしてそれはそんなに難しいことではないことも分かってきた。

一方で，E-cycle 付きDS-diagram からπ_1を読み取る石井式のpresentationのこともとても気になっていた。

「DS-diagram の2-label こそがπ_1のgenerator なのだ」とする石井氏のアイディアの素晴らしさに，少しずつ心を奪われていく。小生の身体は池田氏の毒に続いて石井氏の毒にまで汚染されてしまった。

例によって石井氏の毒について紹介させてもらう。

いまや π_1 おらがもの
しっかり見てろよ ポアンカレ
いずれ ベールを剥いでやる

一瀉千里の勢いで
ペガサス駆って ひと眺め
いや トポロギは面白い

スパインによる３次元多様体の研究といえば，誰が何と言おうと（ナニ？「誰も何にも言わないよ」ダッテ？そんなツメタイこと言わないでなんとか言ってヨ，話の腰が折れちゃうよ）池田氏がその第一人者である。

鬼才池田がライバル石井のことを評してつぶやいた。
「あいつ，ポアンカレの生まれかわりじゃあねえのか？」
なあに，池田だってポンスレの生まれかわりじゃあねえのか？

今回のこの戯れ文は
「結び目のＤＳ表現とは
DS-diagram の2-cell のことと見つけたり」
と喝破したもう一方の大神石井に折伏されていく哀れな豚才の末路を，自分で悼む鎮魂歌でもある。

§５．クローバー結び目のＤＳ表現

クローバー結び目ｋをDS-diagramの2-labelとして表わす考えを実行することにした。本物のｋからｋ(X)を作ればよい訳である。§３の方法を具体的に実践してみせればよいのだが，ルーチン化をねらって次の手順で作業を進めた。無駄が多くなるのは覚悟のうえである。

第１工程：クローバー結び目を3-ball B^3 の内部に実現する。
（このことは S^3 内の結び目に対してはいつでも可能であるが，
一般の多様体の中の結び目の場合には，チト無理なんだな。）

第２工程：ｋの結び目をうわべだけ解消するために，B^3 をナイフでカットしてｋをいくつかの弧に分ける必要がある。それを結び目の交叉点の近辺で行なう。その手順について説明しておこう。

出来上がりの図のグラフが連結であるように，またできる限りＤＳに近いものにするための工夫をする。そのための道具として，石井氏のDS-diagramの一覧表から図の形のものを拝借する。

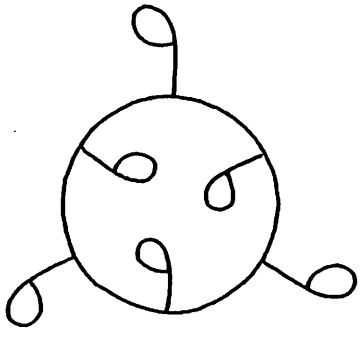


図８：S^3 のDS-diagramの一例

B-cycle の内側にある小円３個をｋの３つの交叉点の上にそれぞれすっぽりとかぶせる。

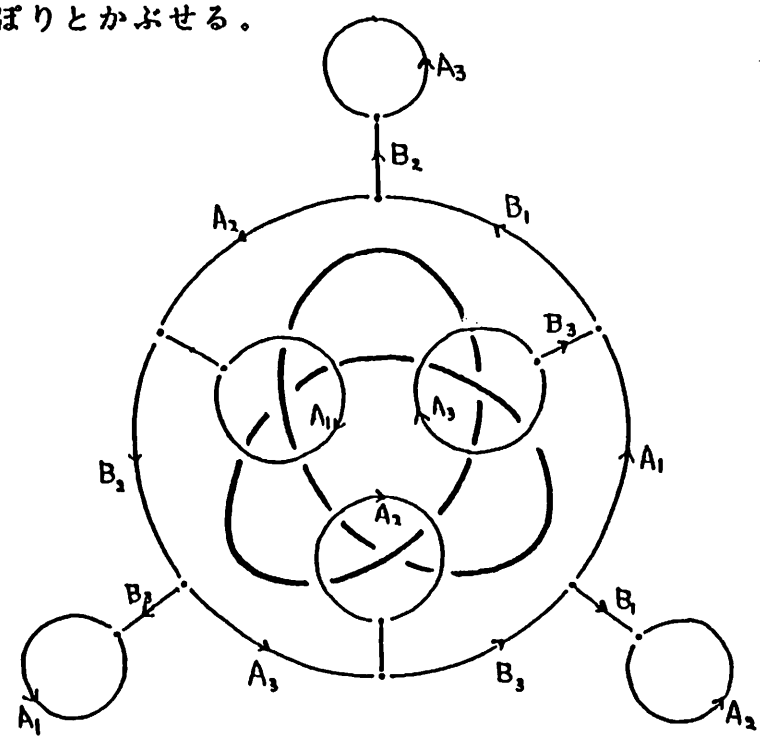


図９：結び目の交叉点に網をかける

そしてこの小円の縁に巧みに（というほどでもないか）因縁をつけてナイフでｋをカットする。もっと正確にいうと，under path に傷をつけないようにover path のチョッと下までＢ³ の境界からナイフで切れ目をいれてＢ³ を裂くのである。

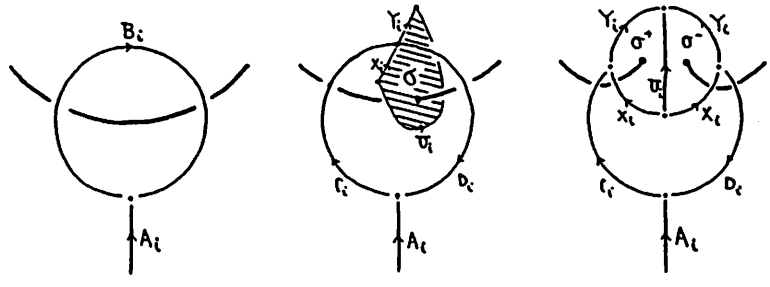


図１０：結び目の切開

切り裂いたあとにできるのは新たな3-ball である。記号の節約のために，これをもB³ と書くことにしよう。kは切り刻まれてこの新たなB³ 内の３つの弧（proper arcs ）に分かれる。

第３工程：ＤＳ化の作業の１つをこの段階で行なっておく。えんまこおろぎ（小円のこと）の鼻筋（奴にそんなものあったかな？）に沿ってpiping を行なうのである。

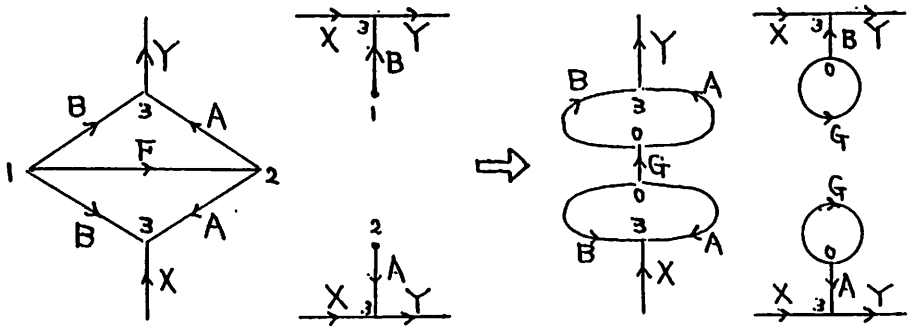


図１１：パイピング

トンボのめがねは七色めがね　虹のお空をとんだから

と唄ったあの頃のことがなつかしい。ところでトンボのめがねはどうしてできたか？恥ずかしいことだが，小生この歳になるまでまったく知らなかった。否，そんなことを考えてみたこともなかった。

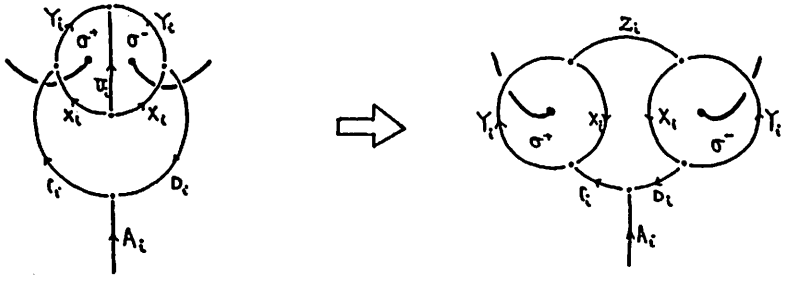


図１２：パイピングの実行でトンボのめがねにしておく

今回，それがえんまこおろぎの鼻筋の整形手術によってできることを知った。やっぱり数学は勉強する値打ちがある。人間のめがねにも応用できるにちがいない。さっそく眼鏡屋に教えてやろう。

第４工程：B^3 内の３つの弧のうち１つを残し（どれでもよい），残りの２つの弧を，弧に張った膜ごと掘り上げる。たとえば下の図の点線の部分掘り残しておく。そして掘り上げたものをそこへ手順にくっつけてゆくのである。

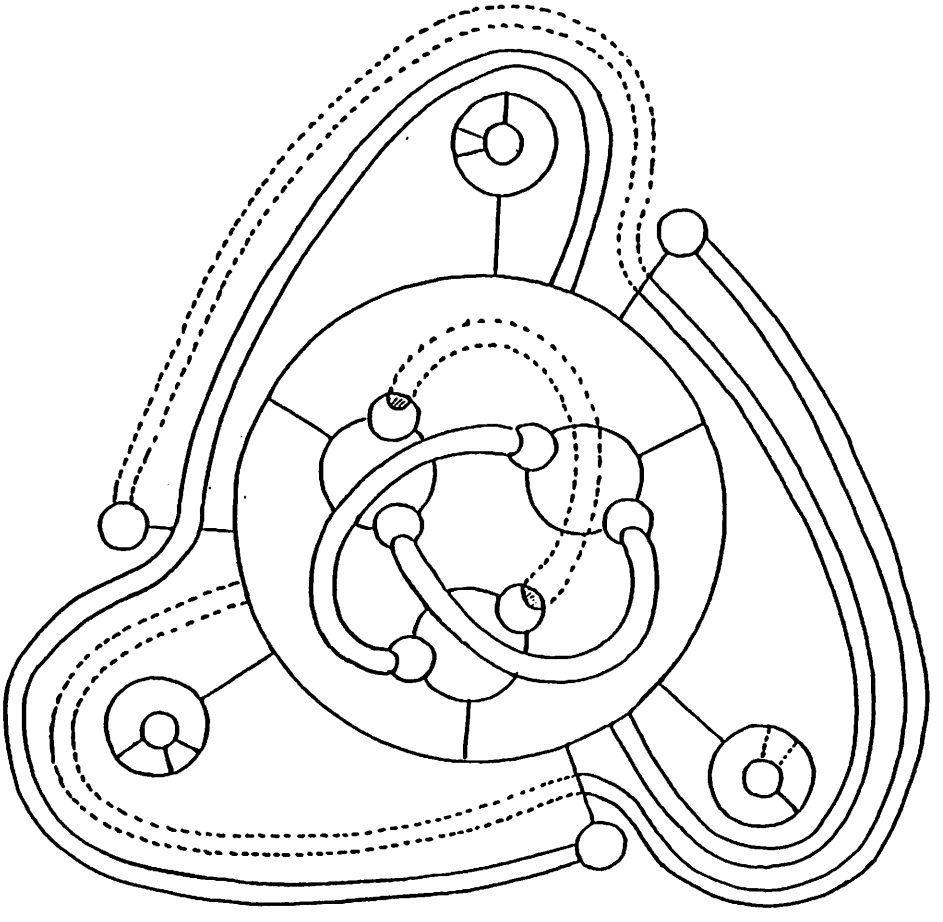


図１３：結び目弧に沿って掘り上げた掘り跡

第５工程：掘り上げてくっつけたときに，またpolygram 化が進んだ。そこで先ず，同じlabel の対になっている辺を消しておく。

さて本格的にＤＳ化してやれば仕事は完了。お茶でも飲んで最後の仕事に取りかかるか。と思ってもう一度図を眺めると，これまたなんとしたことか？すでにそこにあるのはDS-diagram！

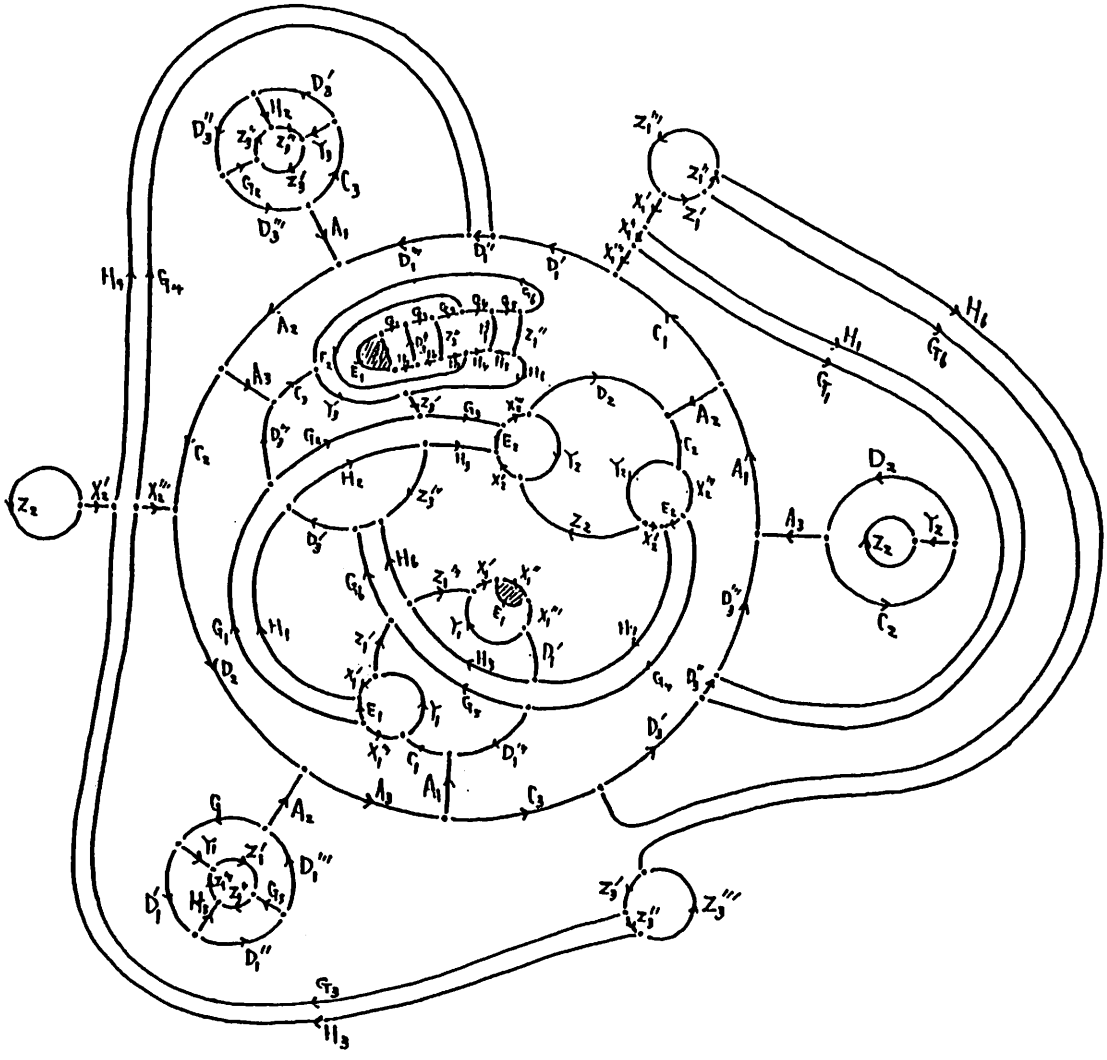


図１４：クローバー結び目の素朴なＤＳ表現

‥‥‥ といった訳でクローバー結び目のＤＳ表現は一応できたのではあるが，この図ではなにせ頂点が多すぎる。そこで例の変形でバタバタやっていたらナントあわびになってしまった。これまでの話がサギでなかったらあわびの１辺形がクローバー結び目ということになる。一瞬，オカシイゾ！やりすぎたかな？と思った。

つぶらな瞳のマギー司郎がトボケた声で「卵がラーメンに入っているときはビックリするんじゃあないのお」と話しかける。

「ドウイタシマシテ，その比じゃなかったヨ，マギーさん」

このとき小生は未だアワクロ病に感染してはいなかったのである。

博識の小林先輩に聞いた話だが，あわび（abalone）なる生物はエーゲ海に棲んでいるんだそうだ。

「‥‥‥ビーナスの丘のすぐ下にある海に棲息しているそうな。ゆらめく海草の下で呼吸しているそうな。あの海草はなんといったかなあ。そうだ。たしかワカメとか言ったよ。‥‥‥」

紅灯の下，酒を手にして語る先輩の語り口に，カタカナ美女も寄ってきて，あたりはなんだか妖しげな雰囲気だったなあ。

改めてあわびを眺める。ナルホドネ。シットリとした湿り具合，不思議な収縮運動，色といい肌ざわりといい‥‥‥。ウーン。ホントかもしんないなあ。

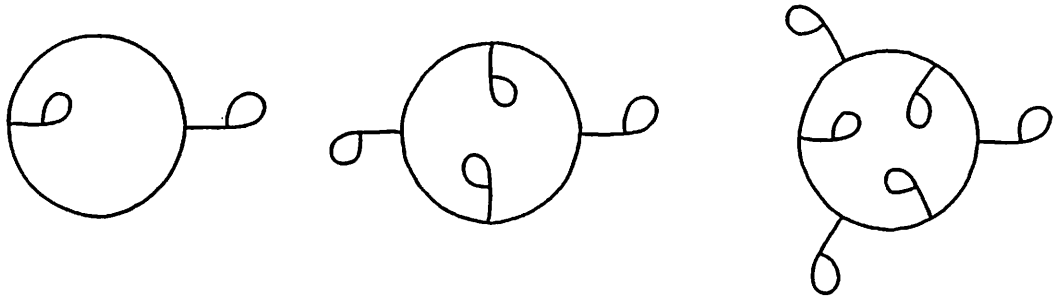
あわびをオモテにしたりウラにしたりして，ためつすがめつ眺めまわす。こんなピーピング豚才を女房ドノは嫌がって「このスケベジジイ！」。夜も寄せつけなくなった。それでも豚才夢中である。

ビングハウスの探険もした。深い理由はない。それ以外の fake surfaceを知らなかったというだけのこと。

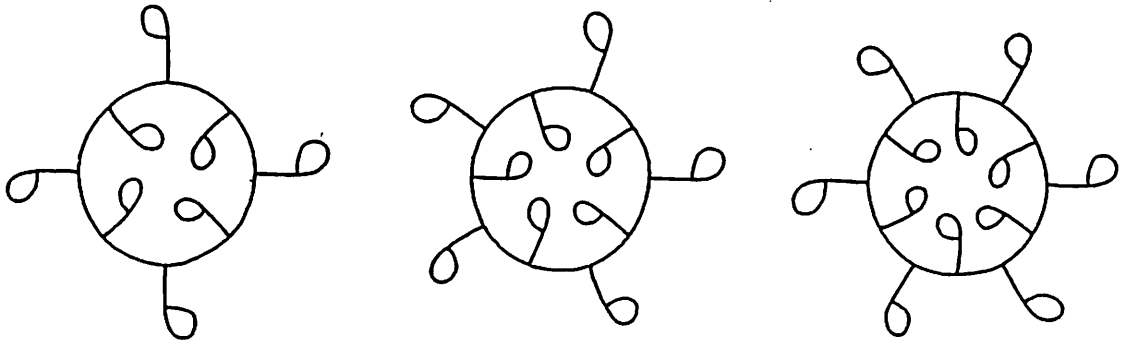
これは一体どうした訳だと考えているうちに思い出したのが２０年前の津久井氏のことである。（ちなみに，津久井氏はその後もしばしばアワクロ，アワクロとうなされている。）ことここに到ってようやく自分もアワクロ病に侵されていることに気がついた。（話はふりだし（＝§１）にもどる。）

§６．Ｓ³のDS-diagramの系列

Ｓ³内にある一般の結び目に§５の方法を適用したい。そこで結び目の交叉点にかぶせる小円を効率よく生産することができないものかと考える。こんなとき，池田－井上－石井の一覧表は便利だ。あわびから始まるつぎの系列を眺める。



この先が



となりそうなことは幼稚園児にも想像がつく。そしてそれは正しかった。

<u>かざぐるまの定理</u>　図１５はＳ³のDS-diagramである。
さらに，各々の一辺形の表わす結び目はクローバー結び目である。

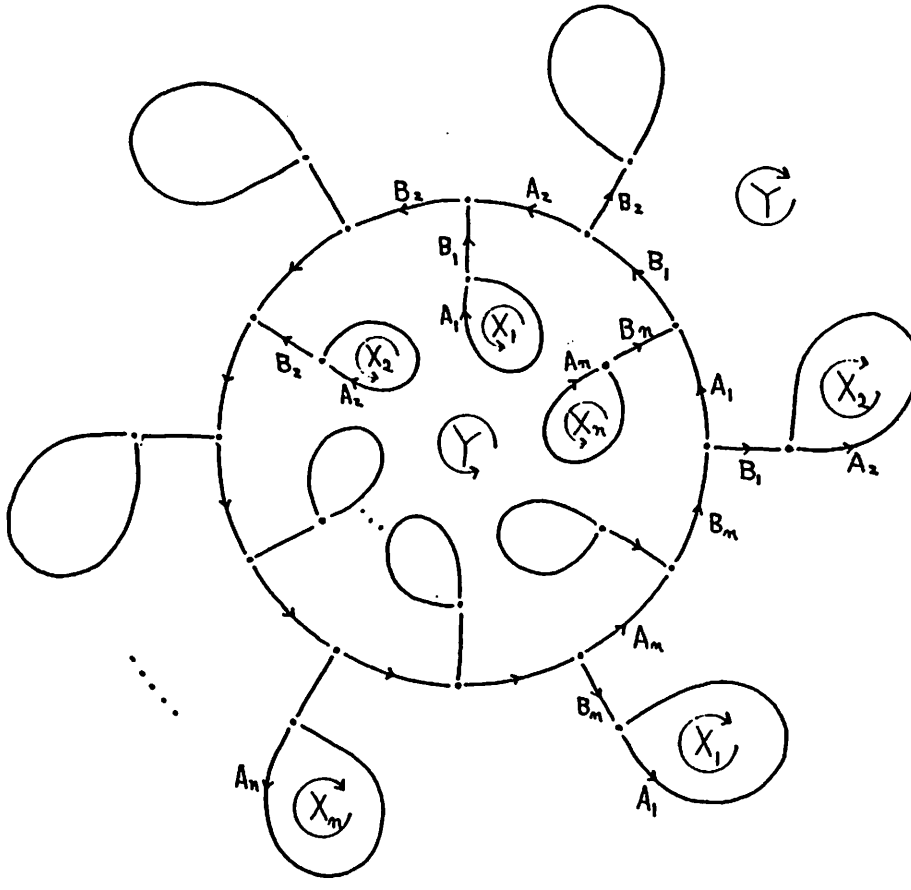


図１５：かざぐるま

証明は n に関する数学的帰納法による。まず，あわびがS^3 の DS-diagram であることは周知の事実である。あわびの一辺形がクローバー結び目であることも，これまでに何度となくくりかえし述べてきた。したがって，帰納法の出発点については問題ない。

<u>証明</u>　図１５のきれいな円はE-cycle を表わしている。このE-cycleをまっすぐ横に描けば，図１５は図１６－１となる。（水平線E-cycle の上部が図１５の円の内部に相当する） DS-diagram 内の word $A_1B_n^{-1}$ に注目する。

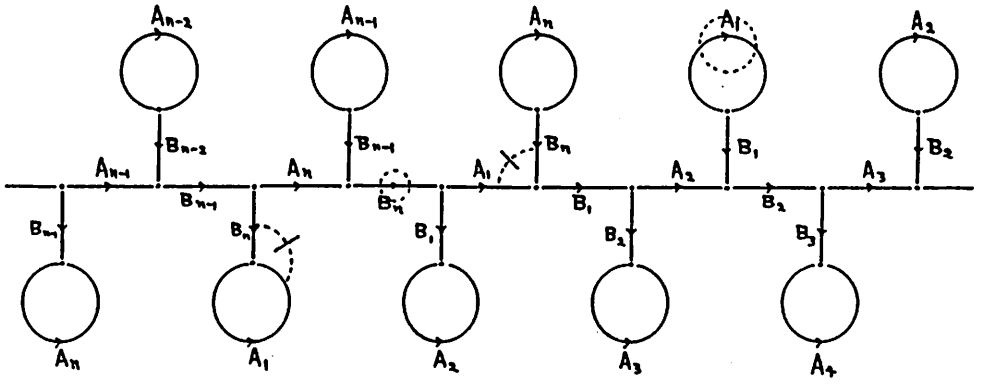


図１６－１

図１６－１の点線に沿ってパイピングを行なえば図１６－２が得られる。

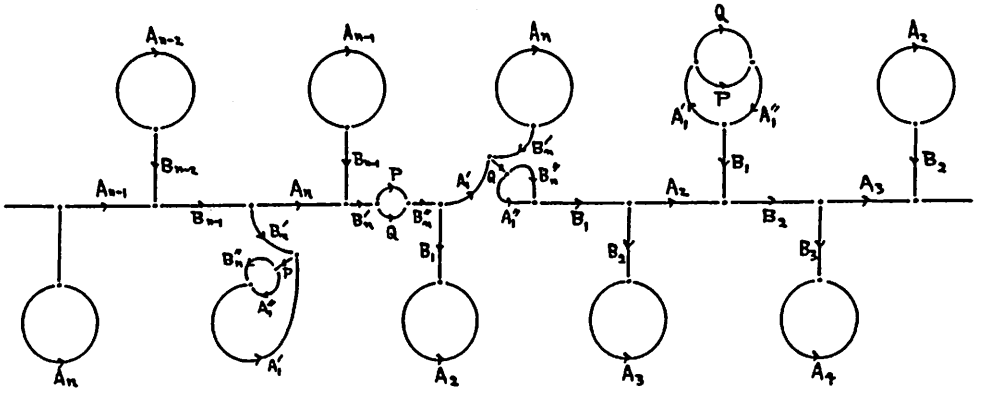


図１６－２

図１６－３は図１６－２をただ書き直しただけのものである。この図の三辺形 $PA_1''A_1'$ を例の変形でつぶしてやれば図１６－４ができる。

図１６－４を分かり易く書き直し，ついでに1-labels B_n'，B_n''，R，Q を B_n，A_{n+1}，B_{n+1}，A_1 と書き直してやれば図１６－５が得られる。

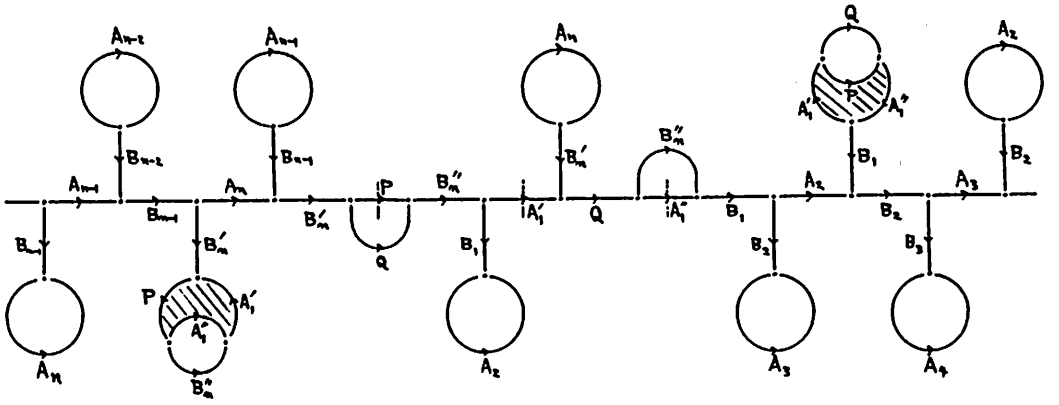


図１６－３

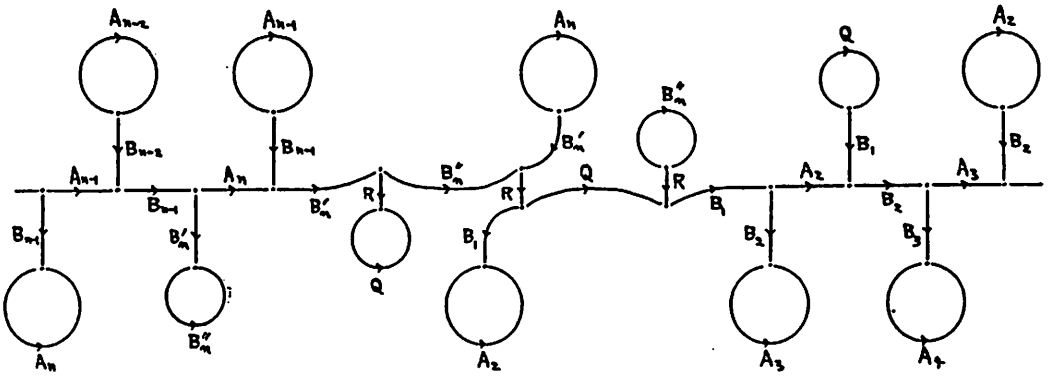


図１６－４

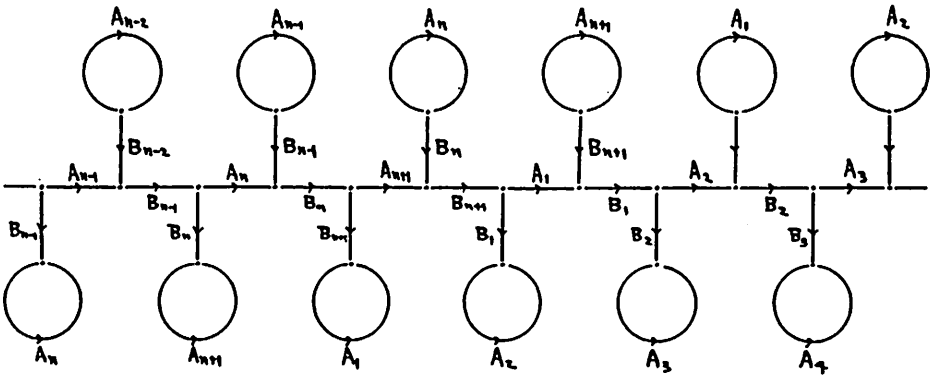


図１６－５

これら一連の手続きによって，かざぐるまがS^3のDS-diagramであることが分かった。

ところでこのかざぐるまの各一辺形がクローバー結び目を表わすことはどうすればわかるのか？

まず気がつくことは，このかざぐるまが異常な対称性を有することである。実際，かざぐるま上で $A_i \to A_{i+1}$，$B_i \to B_{i+1}$ という置き変えを行なっても，得られたものは再び元のかざぐるまそのものにしかならない。まさに「かざぐるま」である。

したがって 一辺形A_iがクローバー結び目を表わすものならば，息を吹きかけてやることにより，A_{i+1}から順にすべての一辺形がクローバー結び目を表わすことになる（でしょうね）。花の子ルンルン「クローバーになあれー」である。ナニ？そんなの証明じゃないって？乙女ごころのわからん奴は犬に食われて死んじまえ，だ。

問題は，ひと花咲かせることにある。（じつに教訓的ですなあ，人生は一度，パッと咲かせてパッと散る。またぞろ戦争がやりたくなってきたナカソネのヤッちゃんたちの気持ちが痛いほどよくわかる。分かるが，やられちゃタマラナイ。）

咲かせるのは危険だから，摘み取る方針でいこう。

n＝1のときにはクローバーの花（じゃなかった葉っぱ）一枚である。n＝2のときはどうするか？それは簡単，葉っぱの一枚を摘んでやれば（DS－変形により）残りの葉っぱはクローバー一枚（n＝1）だけになる。（このDS－変形で結び目型が変わらないことはいつかどこかでお話ししましょう。）あとはご存じ，

花を～摘んでは～　小籠に～入れて～……

と歌を唄うか，

来る，来ない，来る，来ない，……

と花占いをやってれば自然に証明は出来上がり。

§７．結び目のＤＳ表現一覧表

前節で得た道具を手に，いくつかの結び目のＤＳ表現を作ろうとして体力を養っていたときのことである。横山氏が5_1－結び目のＤＳ表現はこんなもんですよと教えてくれた。あとで出てくる 5_1 の図がそうである。

小生がこれからやってみようかなと思っていたやり方と似た方法でつかまえたと言っているが，どうやらもっと近代的な武器を使っているような気がする。いずれ彼が披露してくれるだろうからここではこれ以上詮索したくはないが，こんなしちめんどうくさい作業をいとも簡単にやってのけるところをみると，ヤッパリそうにちがいない。

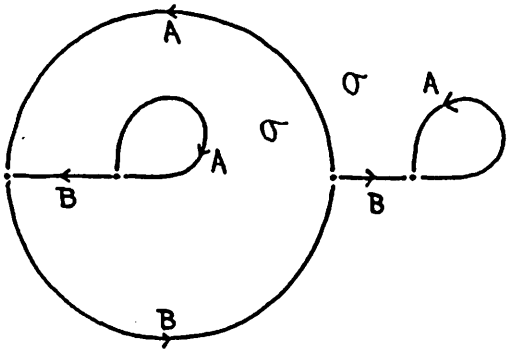
どうやら山芋を切るのにレーザー光線を使い，掘り上げるのにショベルを使っているらしい。秀才と金持ちにはかなわないと大いに感心した。感心はしたが豚才にはショベルを買う金もなければレーザー光線を使う知識もない。今もスコップで汗水たらして細々と掘っている。

追試の結果，横山氏の結果は見事に正しいことを知った。豚才は容易に人を信用しないのである。

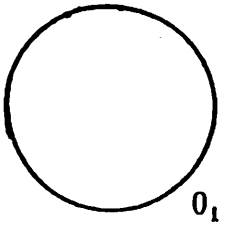
横山氏のことだから，おそらくいまごろは無限個の結び目のＤＳ表現を宝の山から掘り出していることだろう。しかし，小生が得た結び目のＤＳ表現といえば3_1，4_1，5_1，5_2，6_1，6_2，6_3，7_1のたった８個だけである。貧弱だが仕方がない。それを以下に記す。箱根セミナーに集うおちこぼれ諸賢（諸愚というべきかな？賢人ならばおちこぼれたりなどしないものネ）の何かの資料になれば，この駄文も無駄ばっかりではなくなるというもの。

資料：結び目のＤＳ表現

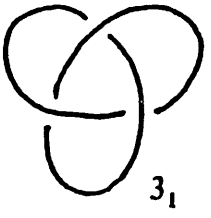
0_1－結び目を除いては，Ａというラベルで囲まれた一辺形（以下，この一辺形をもＡと誤記する）が，指定された結び目を表わす 2-cell である。

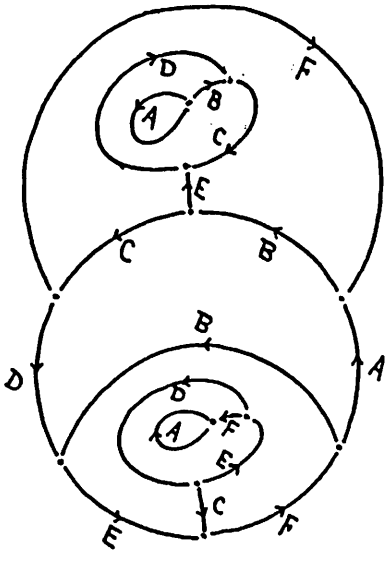


k（σ）＝

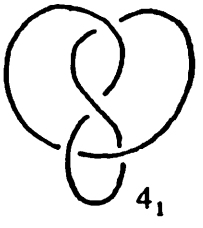


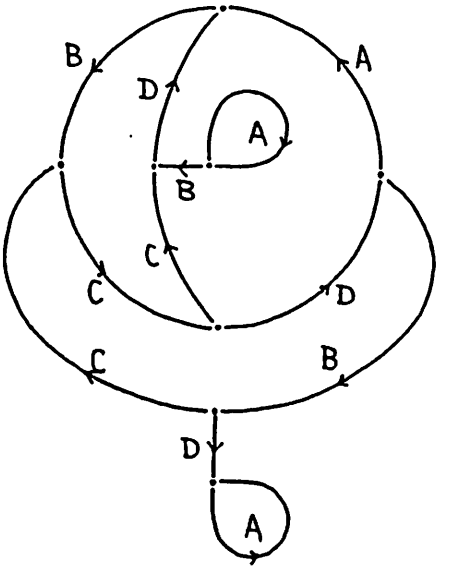
k（A）＝





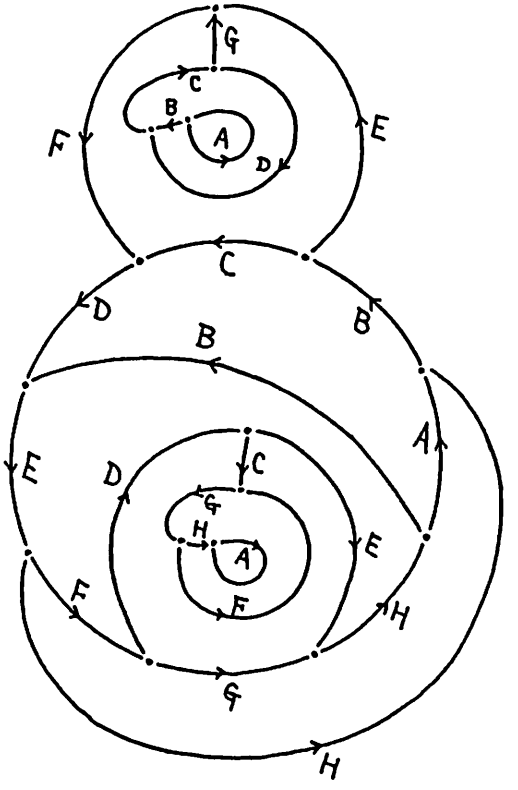
k（A）＝



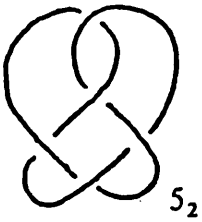


k (A) =

5_1

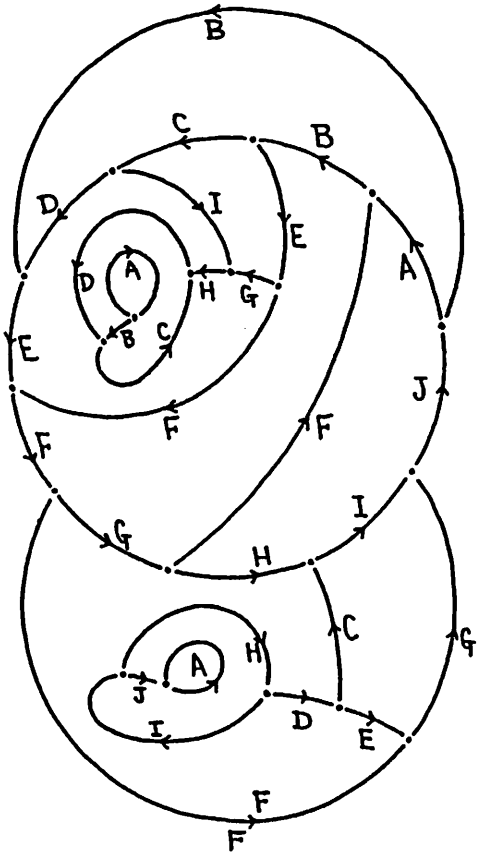


k (A) =



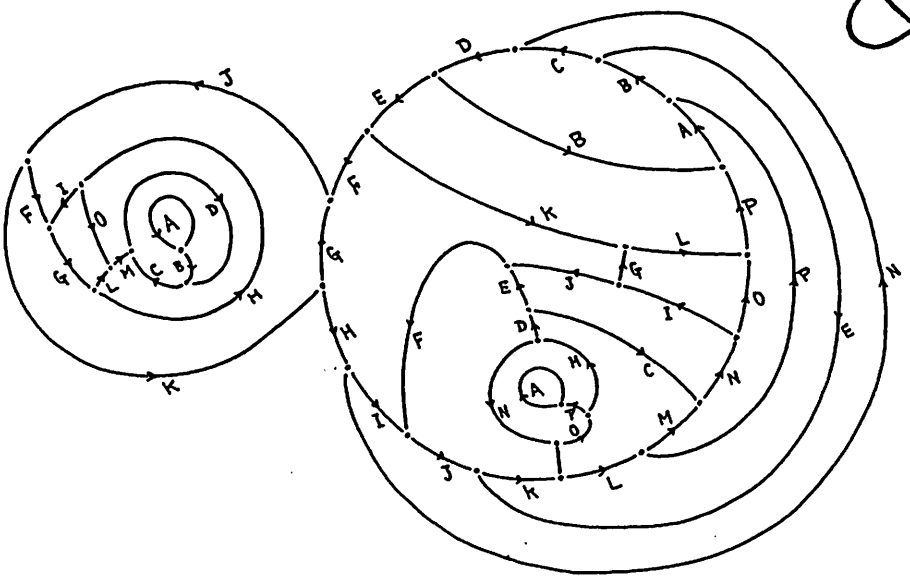
5_2

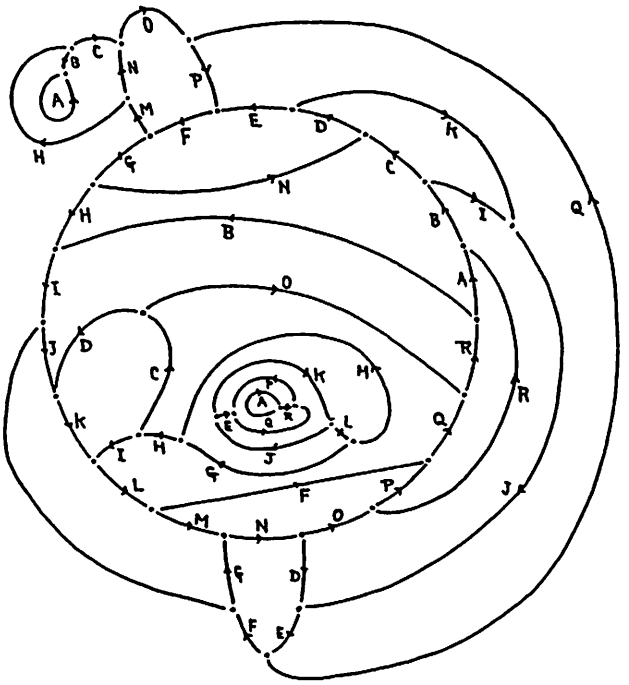
(62)


B
C
B
D
I
E
A
D
A
H
G
B
C
E
J
F
F
F
F
I
G
H
C
G
A
H
J
I
D
E
F
F

k (A) =  6_1

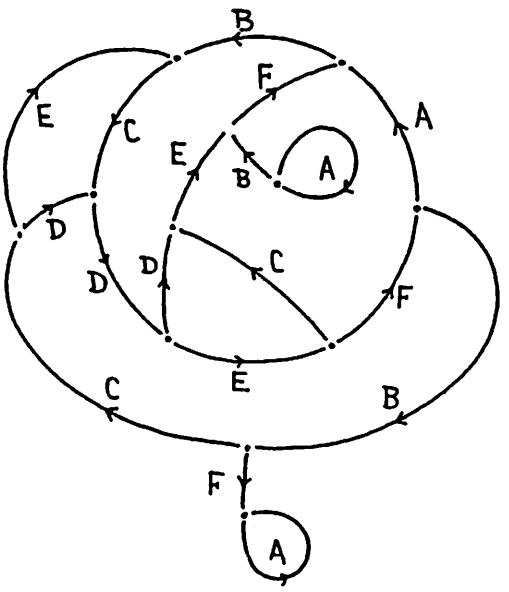
k (A) =  6_2


J
I
F
O
D
A
G
L
H
C
B
H
K
D
C
B
E
A
B
F
K
L
P
G
G
E
J
I
O
P
N
H
F
D
H
C
N
E
A
N
O
I
M
J
K
L

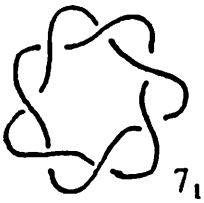


k (A) =

6_3



k (A) =



7_1

§8．knot まっすぐ，世界がくねる

駒ケ岳の山頂は，秋風が爽やかに吹き抜けてここちよい。少し寒いぐらいだ。相摸湾に向かって金戸某が何やら吠えている。

「のっと～まっす～ぐ　せか～いが～くね～る～
　　く～ね～る～おま～え～を～みて～いた～い～」

聞くともなしに聞いていた阿呆どもがなにやらゴチャゴチャ騒ぎだした。
「アリャアなんだい？」
「あれか？俺も気になっていたんだ。だれかわかる奴いるかい？カズちゃんどうだい？」
「いやあ，俺にゃあ，わからねえ。オイ晴公，常から博学を自慢しているオメエのことだ，意味分かるだろ？やっツクれ」
「アアまかしとけ。あれはナ，グータラ亭主が仕事もせずに家でブラブラ，流石のカミさんも生活に疲れて病気ンなってく場面だよ」
「そんなもんかね」
「そうだよ。ホラ，下の句は『食う寝るおまえを見て痛い』だよ」
「なんだい？そりゃ」
「わからないかい？」
「分からねえから聞いているんじゃねえか。まるで判じ物だよ。」
「ホレ，いいかい。 ‥‥‥『食う寝るだけのおまえさんをみていると，ホントに情けなくなっちゃうよ。あたし，もう疲れ果てて体じゅう痛いわ』‥‥‥‥どうだ，今度はよくわかったろ。」
「なんだか変だな。じゃ上の句はどうなるんだい？」
「少しは自分で考えろよ，カズちゃん。『喉は棒切れを飲み込んだみたいになっちゃうし，背中も腹もよじれるほど痛いのよ』ってわけだ」

「エ？なんか言ったかい？」
「だからサ，『喉はまっすぐ，背が胃がくねる』だよ」
「エーッ？喉？背が胃が，かい？なんかエラくなまっているなあ」
「カミさんは病気なんだぜ。それぐらい，なまらあな」
「そんなもんかねえ」
ナルホドという者もあれば，そんなのコジツケもいいとこだ，と否定する者もあり。

……ワイワイガヤガヤ……

そこへ来合わせたのが，チャラチャラした若旦那の哲ッつあん。
「若旦那，ちょっとお尋ねしますが，あれなんですか？」
「コレナンデスカ？ … トウキョウダンゴノキリ～モチ～ … 」
「こりゃあ だめだ，だれか 受け付け変っとくれえ」

……ワイワイガヤガヤ……

それまで皆の話を黙って聞いていたヒロ坊が
「裏の隠居の龍じいさんならわかるかもしれねえな」
「若い頃には粋な遊びもずいぶんやったもんじゃ，芸者遊び，庭球卓球，囲碁，スキー，なんでもやったもんじゃ。今でも週に一度はデスコに行く」
というのがハイカラご隠居の口癖。ホントのことは誰も知らない。
「あれはナ，艶っぽい情景を唄った歌じゃよ。都都逸といってナ，七七七五のリズムの，まあ言ってみりゃあ，音楽の一形式じゃな。ワルツとかロンドとかいったのと同じようなもんじゃよ。そういや三亀松師匠の都都逸は，軽妙酒脱な語り口で合い間をつないで，聞き手をおいらんの世界に連れてってくれたりしたもんじゃ。
『三千世界のからすを殺し，ヌシと朝寝がしてみたい』
なんてのはゾッとするほど艶っぽかったヨ。思い出すねえ」

「さすが，ご隠居だね。よく遊んだんだねえ。なんでもよく知ってること。あれを都都逸というのか。それにしても都都逸がワルツとおなじものだとは思わなかったなあ」
「バカだな，おまえ。真にうける奴があるか。ご隠居も近頃は少し言うことが怪しくなってきてるんだぜ。それよか，ご隠居いいこと教えてくれたよ。ドドイツは艶っぽい歌だとか言ったぜ。晴公の『喉はまっすぐ，背が胃がくねる，食う寝るおまえを見て，痛い』じゃ病人くさくて，どこも艶っぽくなんかねえ。ありゃウソだぜ」

「誰か分かるものいないかい。やっちゃん，あんた，さっきから黙っているね。なんか言ったらどうだい」
「そんなこと言ったって俺にもわからねえよ。まずアタマの『のっと〜』からして分からネエ」
「チョッと待てよ。エート，たしか公儀隠密バナナの介とかいう男がよんだ名句に

梅が香にのっと日の出る山路哉

というのがあったなあ。あれかな？」
「オッ！さすがだ，せいちゃん。学があるねえ」
「そうすると，　のっと　＝　ヌッと　だな」
「ナニかがヌッと出るんだな？ヌッと出たものがチョク（直立）だっていうわけだ」
「そのあと，せかいがくねる，という段取りになる？」
「せかいというのはオイランの名前かなんかだろう」
「変な名前だね。どんな字書くんだい？」
「おおかた，瀬会太夫とでも書くんじゃないか」
「そうすると『ヌッとまっすぐ（のものでナニがナニすると）瀬会太夫がくねりだす』ということになるわけだ」
「なんだかいやらしい雰囲気だね。下の句だってそうだよ」
「ほんとだ，『くねるお前を見ていたい』なんて」
「いいんだよ，都都逸なんだから」

……ワイワイガヤガヤ……

やっぱり本人に聞いてみなくちゃあわからないなあ ……
てなわけで，まだ気持ちよさそうに吠えているご当人の金やんに，講釈してもらうことに衆議一決した。

金戸某いわく：

「knot をＤＳ表現で眺めれば，どんな結び目もみかけ上は真っ直ぐになってしまって，結び目の差異などなんにも分からなくなったようだけど，結び目のうねりが貼り合わせのところにくるから大丈夫なんですよ。
ＤＳの貼り方でB^3の表面を貼り合わせてやれば，肝心の世界であるS^3のほうがくねくねとよじれてくれる。
あとはただ，入れ物のS^3のくねる様子を見ていればいいという次第……」

だってさ，アホクサ。
金戸某は，謹厳実直，木石の人，であったのだ。
紛らわしいドドイツなんか，うなるなッツーの。

結び目の複雑さはＤＳ表現のなかにも現われるはずである。そこで豚才は，結び目の交点数が増えるとその結び目のＤＳ表現も当然複雑になるものと予想した。ところが3_1，5_1，7_1の系列の結び目たちはどうもえらく簡単なＤＳ表現を持つ。
「交点数が多ければ結び目も複雑だということにはなっていないよ」とは鈴木大先生から聞かされていたが，それがＤＳ表現としても現われてきたので今度はよく実感できた。

DS-diagram の複雑さはどんなモノサシではかればよいかわからないが，一番素朴に考えつくのは頂点数の多寡であろう。そういえば昔，横山氏がそんなことを言っていたような気がする。あのときはたしかレンズ空間がどうとか言っていた。ウンあれを焼き直してみるとどうなるかな？エート，頂点は４点ずつ同じラベルが貼ってあるんだから，いっそ０－ラベルの数で勘定するのがいい，とか言っていたな。というわけで・・・・・

DS-diagram Σ の0-label の数を$\nu(\Sigma)$と書くことにする。たとえば，ν(あわび) ＝ 1，ν(ビングハウス) ＝ 2 である。

いま，結び目kに対して

$$\nu(k) \equiv \min_{\Sigma\text{はkのDS表現}} \nu(\Sigma)$$

と定めることにしよう。ウン。これはたしかに結び目の不変量だがどんなもんかな。

前節の資料から

$$\nu(0_1) \leqq 1$$
$$\nu(3_1) \leqq 1$$
$$\nu(4_1) \leqq 3$$
$$\nu(5_1) \leqq 2$$
$$\nu(5_2) \leqq 4$$
$$\nu(6_1) \leqq 5$$
$$\nu(6_2) \leqq 8$$
$$\nu(6_3) \leqq 9$$
$$\nu(7_1) \leqq 3$$

となる。$\nu(6_2)$，$\nu(6_3)$ の評価数はもうすこし小さくてもよさそうだが ・・・・・。

ところでS^3のDS-diagramとしては，$\nu(\Sigma) = 1$ なるものはあわびだけ，$\nu(\Sigma) = 2$ となるものは ビングハウスを含めて計

3個だけ，という池田大神からの御託宣があるから

$$\nu(0_1) = 1$$
$$\nu(3_1) = 1$$
$$\nu(4_1) = 3$$
$$\nu(5_1) = 2$$
$$\nu(7_1) = 3$$

となる。その理由をグダグダと書くならば ……

あわびの2-cells が表わす結び目が平凡結び目とクローバー結び目だけであることは見ての通り。ビングハウスの3種類の 2-cells はどれもこれも平凡結び目ばかり。こんなことはアワクロ病におかされている諸愚ならばたちどころに理解できる。

そのつぎだが，残りの2種類の$\nu(\Sigma)=2$のDS-diagram は 0_1－，3_1－，5_1－型の結び目しか内蔵しない（例3，例4）。これらのことから上の等号は得られる。

ところで上の表から3_1，5_1，7_1の系列を抜き出してみれば

$$\nu(3_1) = 1$$
$$\nu(5_1) = 2$$
$$\nu(7_1) = 3$$

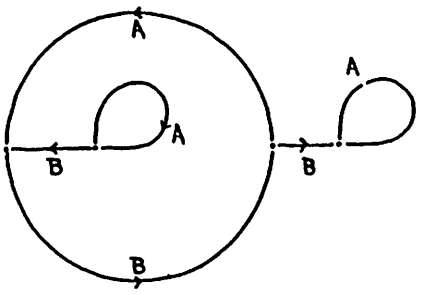
となる。このあとどうなるかと幼稚園児に尋ねてみたら

$$\nu(9_1) = 4$$
$$\nu(11_1) = 5$$
$$\nu(13_1) = 6$$
$$\vdots$$

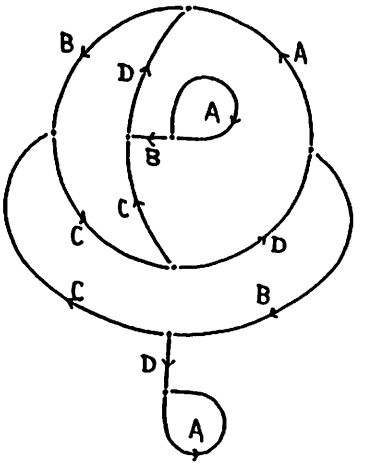
だってサ。うれしいね。でも豚才にはトンとわからない。豚才は人を信用しないんですよ。（たとえ相手が幼稚園児であってもだ）

（２，ｐ）型のトーラス結び目のＤＳ表現の系列

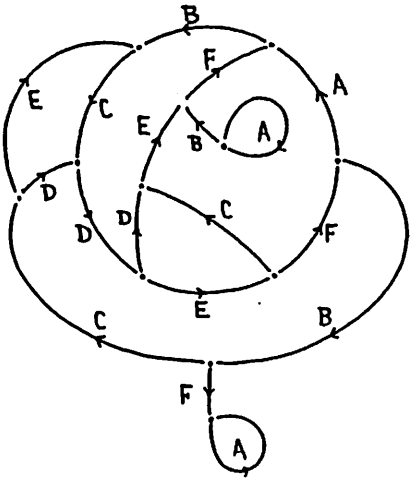
（２，３）型　（＝3_1）



（２，５）型　（＝5_1）



（２，７）型　（＝7_1）



この先どうなっていくのだろう？

さて，結び目kのＤＳ表現をE-cycle 付きに限ったものを仮に$\nu_E(k)$と書くことにすると，勿論（理屈のうえでは）

$$\nu(k) \leqq \nu_E(k)$$

であるが，これまでのところ

$$\nu(k) < \nu_E(k)$$

なる例は得られていない。

情けないことにこんな簡単な不変量ですら計算する方法がわからない，といったところで長々としたヨタ話はこれでおしまい！

これでもまだ眠れない人のために

DS-diagram の2-cell のknot type はどうして決定するのかという問題がある。

小生はDS-diagram の初等変形を利用した。初等変形を施すと，それに応じてDS-diagram の2-cell が発生したり消滅したりするが，その他の2-cells は幸いなことにknot type を遺伝させる。したがってknot type のよく分かっている2-cell を睨んで変形を続ければ目的の2-cell のknot type を知ることができる（こともある）。この方法の詳しい解説はいずれまた。（しかし，もっと簡単な方法がありそうなものだ）

小林先輩曰く「E-cycle 付きDS-diagram はnon trivial knot を表現する2-cell を含む，ってのはどうだろう」なるほど，と思って調べていたら，残念にも反例が見つかってしまった。

横山氏はDS-diagram 上で結び目のザイフェルト膜を表わす弧を捜しています。お心当たりの人は横山氏までご一報下さい。