DS-diagram の初等変形とは

山下正勝（東洋大 工）

つらつら考えるに 二種類の変形（正逆を区別すれば四種類の変形）を DS-diagramの初等変形とするのが妥当ではないかと思うようになった．その根拠の一端を示すのがこの小論の目的である．先ず type I，II の変形を次のように定める．

定義 type I^+ の変形 ↔ （1-A）⇨（1-B）
type I^- の変形 ↔ （1-B）⇨（1-A）
type II^+ の変形 ↔ （2-A）⇨（2-C）
type II^- の変形 ↔ （2-C）⇨（2-A）

さらに I^+，I^- を併せて **type I の変形**，II^+，II^- を併せて **type II の変形** と呼ぶことにする． type I，type II の変形を総称して **初等 DS-変形** ということにする．

さきに DS-diagram の変形として，D_1-，D_2-，D_3-，D_n-$(n \geq 4)$ の各変形を導入した．[数理研講究録 563 (1985)，207-223 および 575 (1985)，28-41]．そのなかの D_2-変形が type II^-の変形であり，D_3-変形が type I^- の変形である．また，D_1-変形は「near miss を犯したD_n-変形」と見なすのがよさそうである． このことは後の議論から分かるであろう．そこで（3-A）⇨（3-B）は従来通り **D_n-変形** ということにして，（4-A）⇨（4-B）は D_1-変形 改め **D_n^*-変形** と仮称する．

定理 1． **D_n-変形$(n \geq 2)$ および D_n^*-変形$(n \geq 2)$ はいずれも 初等 DS-変形を有限回ほどこして得られる変形である．**

証明　数学的帰納法による.

D_n-変形についての証明:　D_2-変形: (5-A) ⇒ (5-B) は type II^- にほかならない.
D_3-変形: (6-A) ⇒ (6-C).　これは実は type I^- なのであるが 図のような展開で 数学的帰納法に乗せることができる: (6-A)の辺X_3に type I^+ をほどこして (6-B)を得る. (6-B)の斜線面に D_2-変形をほどこして (6-C)を得る.　すなわち

$$D_3\text{-変形: } (6\text{-A}) \overset{I^+}{\Rightarrow} (6\text{-B}) \overset{D_2}{\Rightarrow} (6\text{-C}).$$

同様にして

$$D_4\text{-変形: } (7\text{-A}) \overset{I^+}{\Rightarrow} (7\text{-B}) = (7\text{-C}) \overset{D_3}{\Rightarrow} (7\text{-D}).$$

$$D_5\text{-変形: } (8\text{-A}) \overset{I^+}{\Rightarrow} (8\text{-B}) \overset{D_4}{\Rightarrow} (8\text{-C}) = (8\text{-D}).$$

これで どうすれば数学的帰納法に乗せればよいかが分かる.

D_n^*-変形についての証明:　D_2^*-変形: (9-A) ⇒ (9-B) は type II^- にほかならない.
D_3^*-変形: (10-A) ⇒ (10-B) ... 辺A_2と辺Y_2を結んで type II^+ をほどこして得られる.
(10-B) ⇒ (10-C) ... 斜線面に type I^- をほどこして得られる.
(10-C) ⇒ (10-D) ... 斜線面に D_2^*-変形を適用.
D_n^*-変形については証明できたものとしてD_{n+1}^*-変形について定理がなりたつことを示す.

$$D_{n+1}^*\text{-変形: } (11\text{-A}) \overset{II^+}{\Rightarrow} (11\text{-B}) \overset{I^-}{\Rightarrow} (11\text{-C}) \overset{II^-}{\Rightarrow} (11\text{-D}) \overset{D_n^*}{\Rightarrow} (11\text{-E}).$$

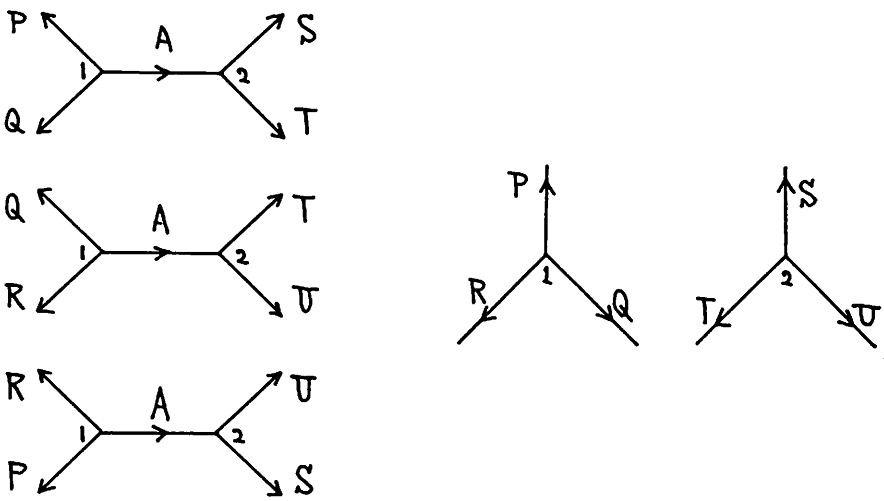
（証明終わり）

定理 2.　**type I と type II は互いに独立な変形である.**

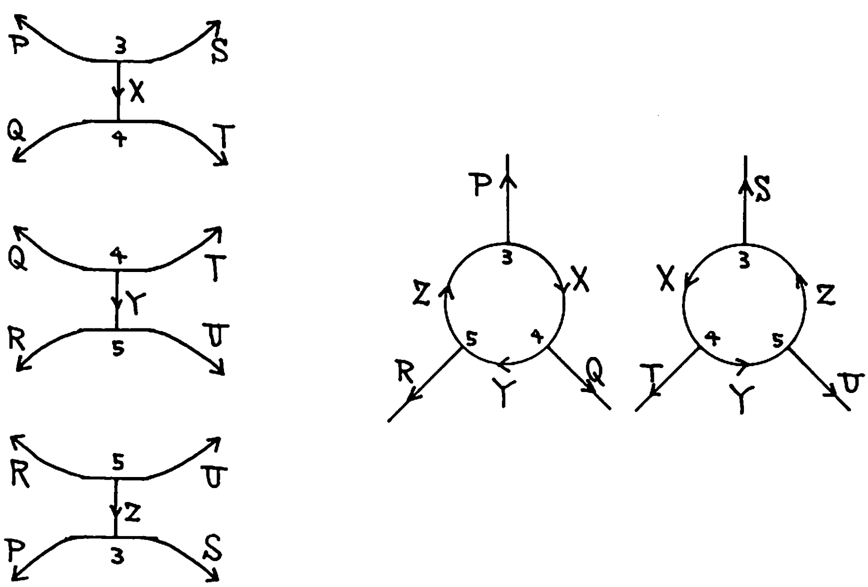
証明　(12-A) ⇒ (12-B) ⇒ (12-C) を見てみよう.　4頂点のグラフから type II^+ で12頂点のグラフに移り，type I^- で8頂点のグラフに移っている.　type II の変形による頂点の変化は ±8 であるから (12-A) ⇒ (12-C) は II だけでは移り得ない変形である.　したがって type I は必要である. また type I が実行できるためには 辺の両端が同じラベルであってはならない.　しかるに，(12-A) ⇒ (12-C) なる変形の出発となる 4頂点のグラフでは すべての頂点が同じラベルにならざるを得ないから，type I だけで変形 (12-A) ⇒ (12-C) を実行しようにも始動できないのである.　よって type II も必要である.

（証明終わり）

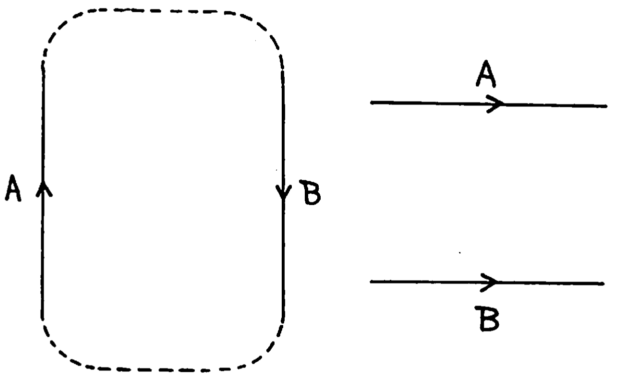
(1-A)


P A S 1 2 Q T
Q A T 1 2 R U
R A U 1 2 P S
P 1 R Q
S 2 T U

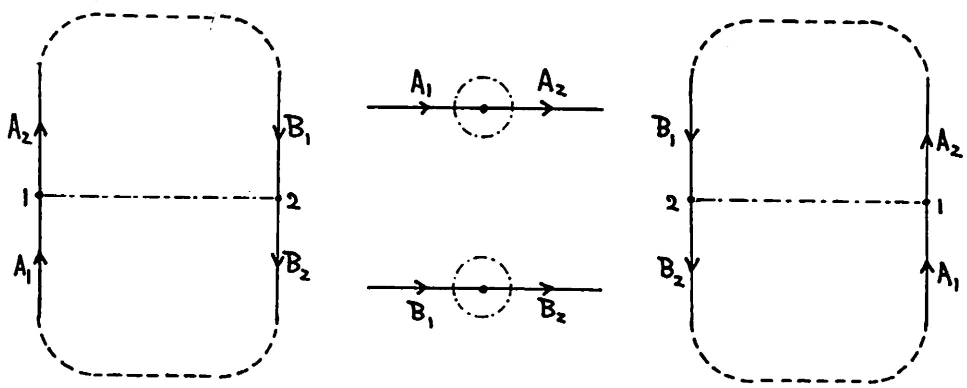
(1-B)


P 3 S X Q 4 T
Q 4 T Y R 5 U
R 5 U Z P 3 S
P 3 Z X 5 4 R Y Q
S 3 X Z 4 5 T Y U

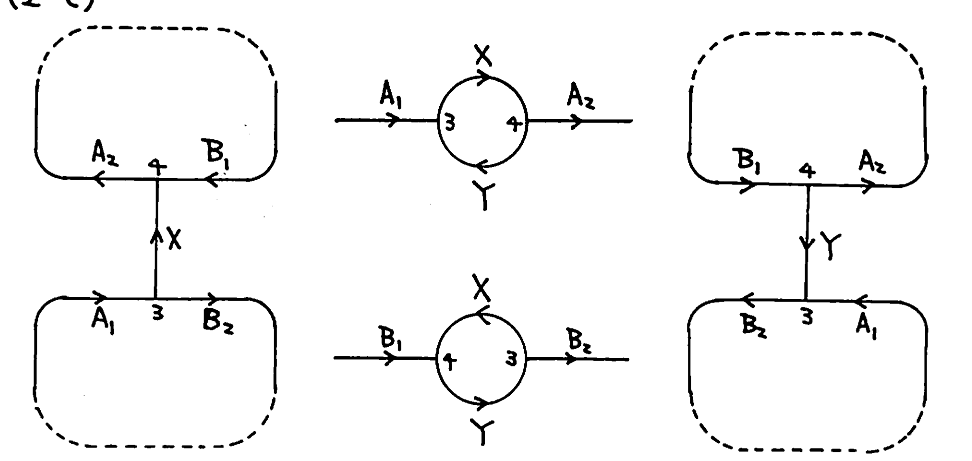
(2-A)


A
B
A
B
B
A

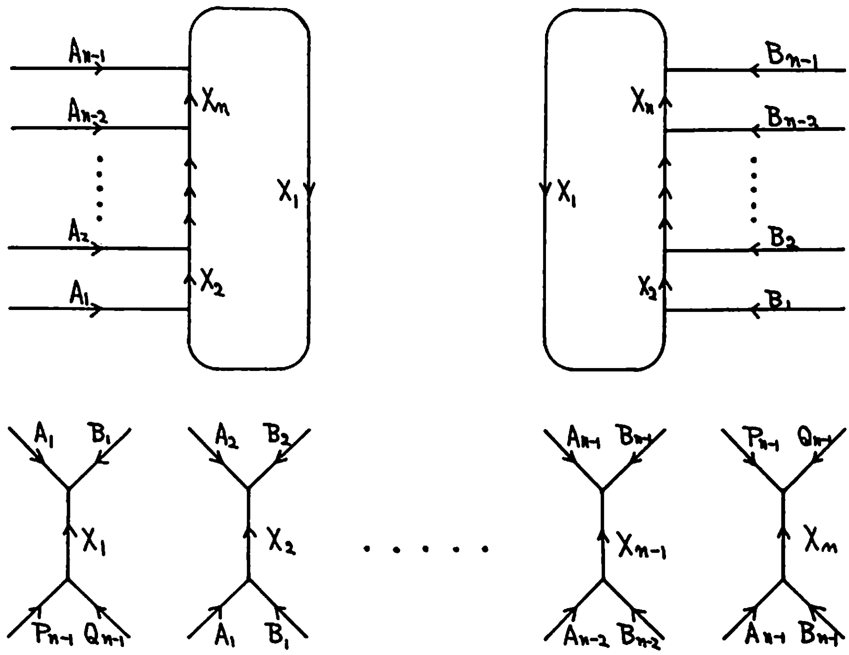
(2-B)


A_2
A_1
B_1
B_2
1
2
A_1
A_2
B_1
B_2
B_1
B_2
A_2
A_1
2
1

(2-C)

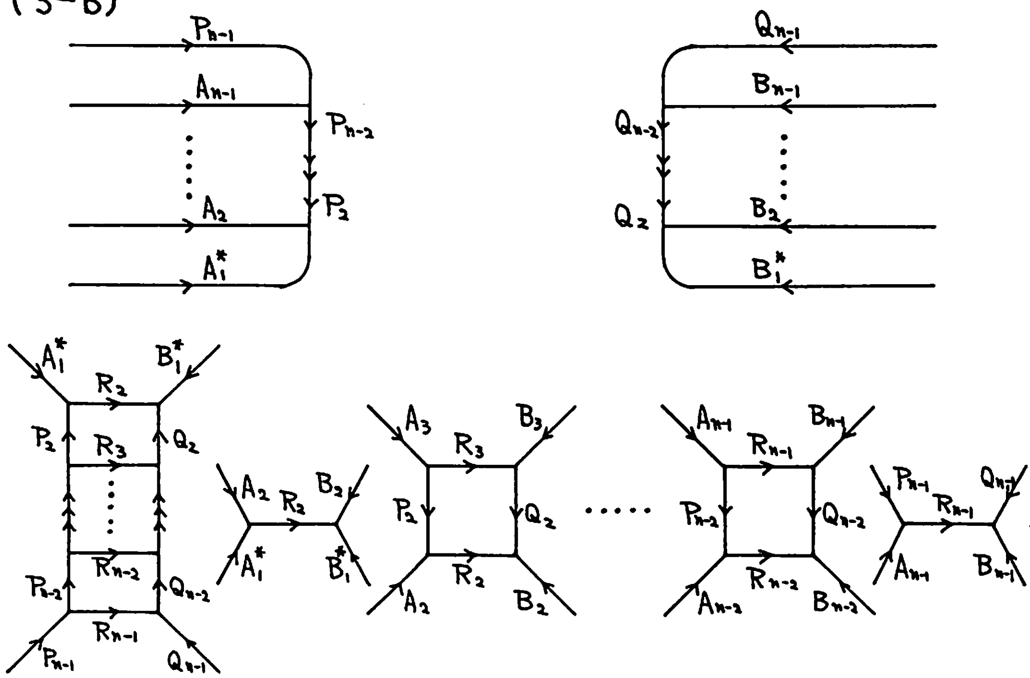

A_2
4
B_1
X
A_1
3
B_2
X
A_1
3
4
A_2
Y
X
B_1
4
3
B_2
Y
B_1
4
A_2
Y
B_2
3
A_1

(3-A)



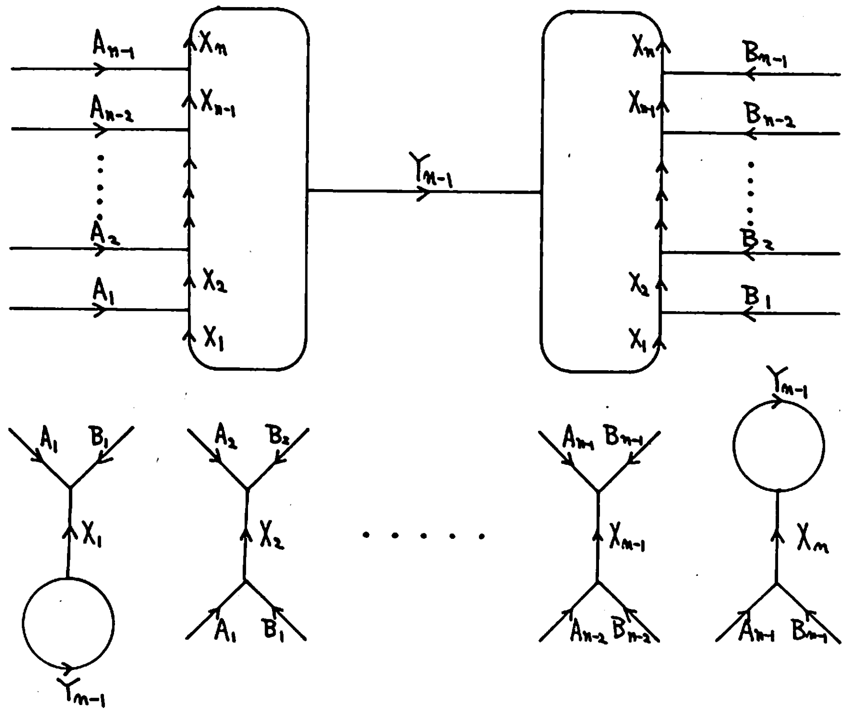
A_{n-1}
A_{n-2}
A_2
A_1
X_n
X_2
X_1
B_{n-1}
B_{n-2}
B_2
B_1
A_1 B_1 X_1 P_{n-1} Q_{n-1}
A_2 B_2 X_2 A_1 B_1
A_{n-1} B_{n-1} X_{n-1} A_{n-2} B_{n-2}
P_{n-1} Q_{n-1} X_n A_{n-1} B_{n-1}

(3-B)



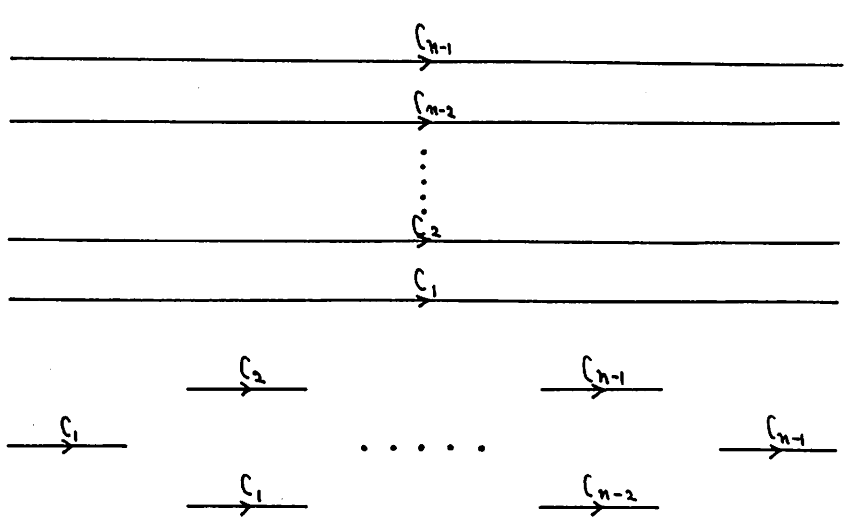
P_{n-1}
A_{n-1}
P_{n-2}
A_2
P_2
A_1^*
Q_{n-1}
B_{n-1}
Q_{n-2}
Q_2
B_2
B_1^*
A_1^* B_1^* R_2 P_2 R_3 Q_2 P_{n-2} R_{n-2} Q_{n-2} R_{n-1} P_{n-1} Q_{n-1}
A_2 R_2 B_2 A_1^* B_1^*
A_3 B_3 R_3 P_2 Q_2 R_2 A_2 B_2
A_{n-1} B_{n-1} R_{n-1} P_{n-2} Q_{n-2} R_{n-2} A_{n-2} B_{n-2}
P_{n-1} Q_{n-1} R_{n-1} A_{n-1} B_{n-1}

(4-A)



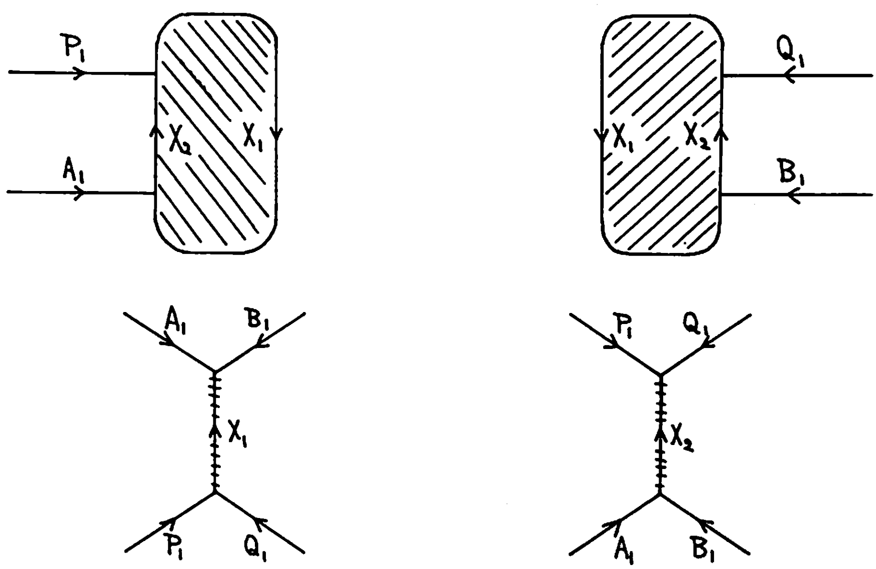
A_{n-1}
A_{n-2}
A_2
A_1
X_n
X_{n-1}
X_2
X_1
Y_{n-1}
B_{n-1}
B_{n-2}
B_2
B_1
A_1 B_1
A_2 B_2
A_{n-1} B_{n-1}
X_{n-1}
X_n
A_{n-2} B_{n-2}

(4-B)



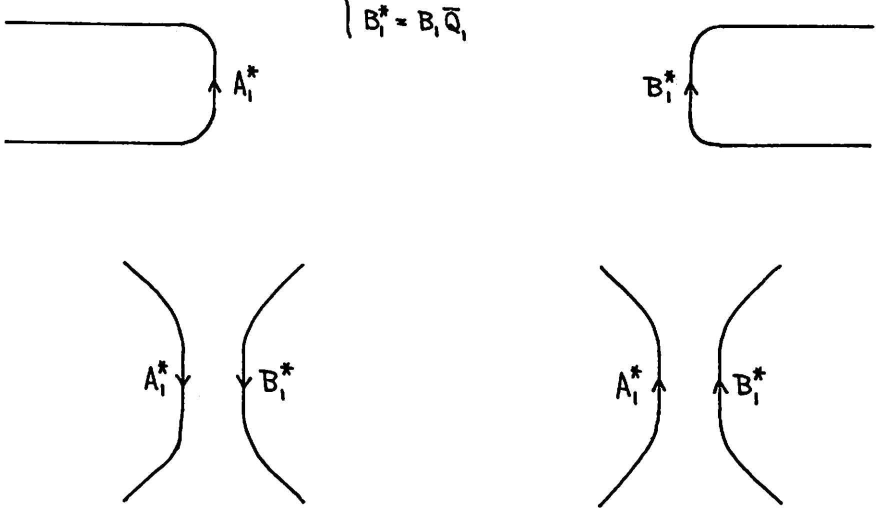
C_{n-1}
C_{n-2}
C_2
C_1
C_2
C_1
C_1
C_{n-1}
C_{n-2}
C_{n-1}

(5-A)

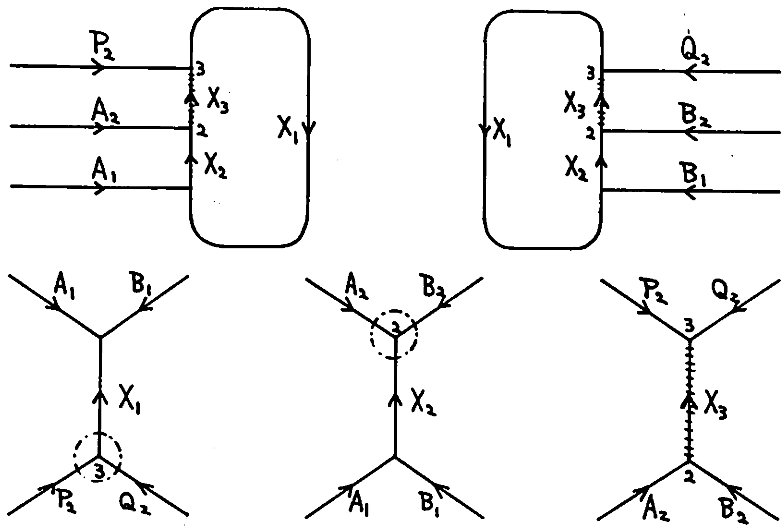


(5-B)

$$\begin{cases} A_1^* = A_1\overline{P}_1 \\ B_1^* = B_1\overline{Q}_1 \end{cases}$$

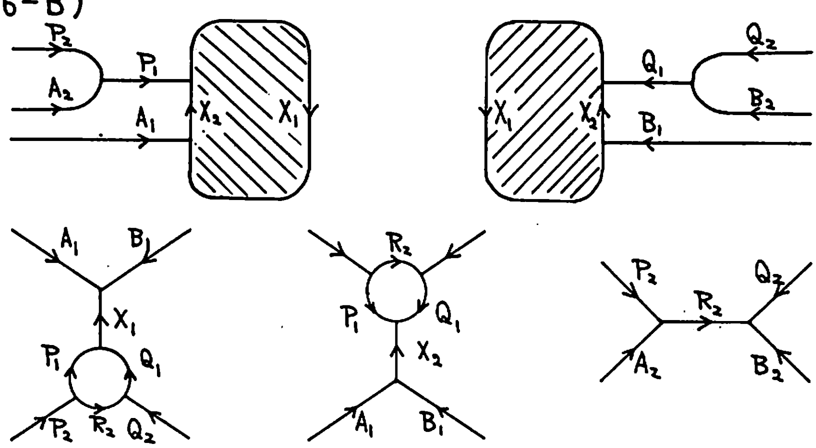


(6-A)



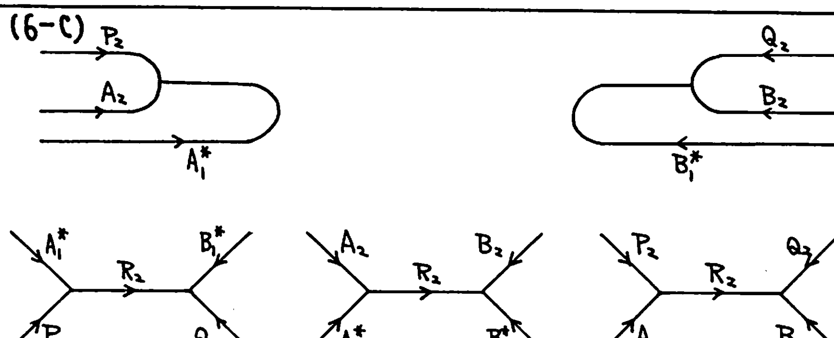
P_2
A_2
A_1
X_3
X_2
X_1
Q_2
B_2
B_1
B_1
A_2
B_2
P_2
Q_2
X_3
A_1
B_1

(6-B)



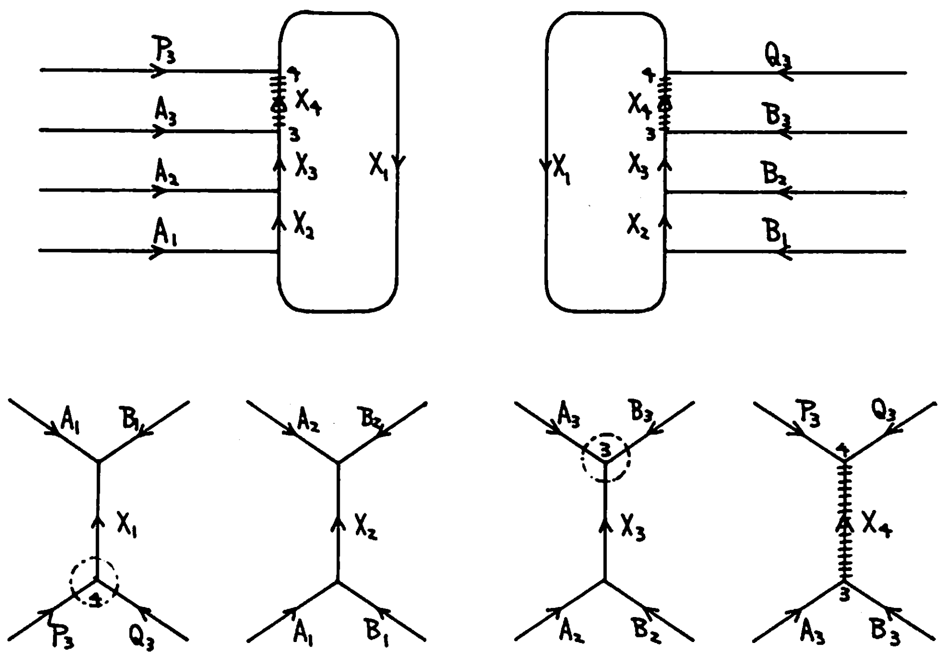
P_2
P_1
A_2
A_1
X_2
X_1
Q_2
Q_1
B_2
B_1
R_2

(6-C)



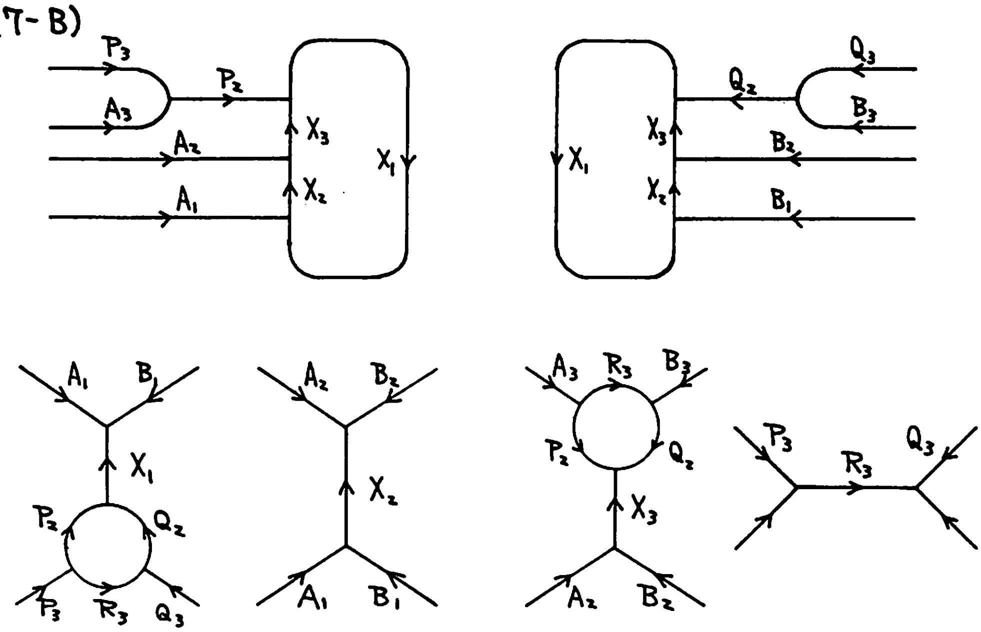
P_2
A_2
A_1^*
Q_2
B_2
B_1^*
R_2

(7-A)



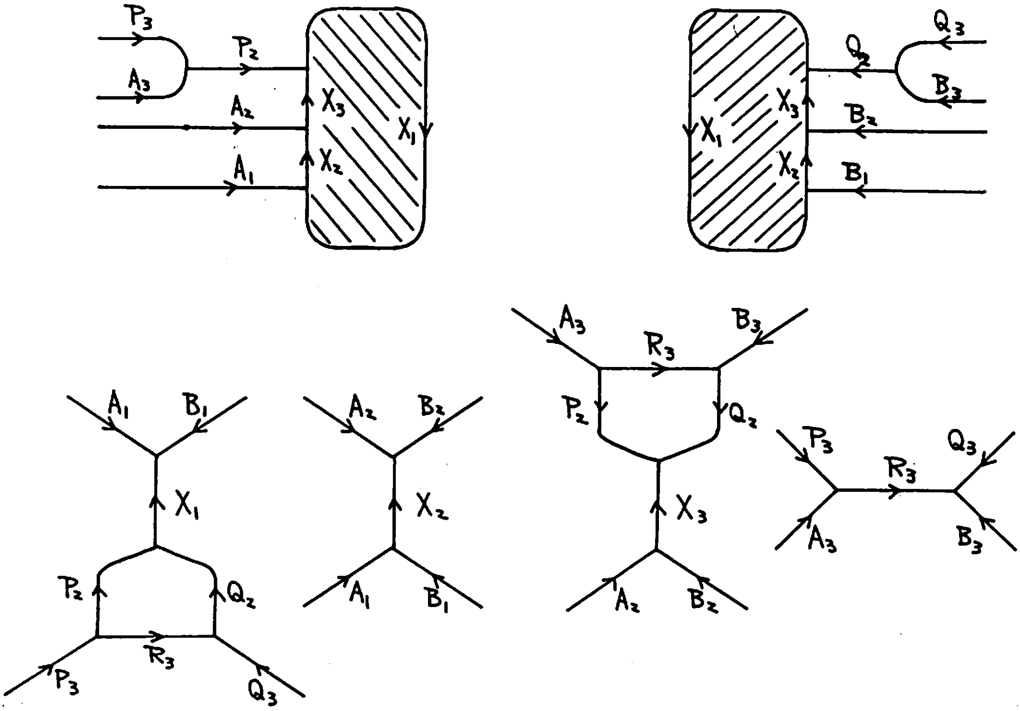
P3 A3 A2 A1
X4 X3 X2 X1
Q3 B3 B2 B1

(7-B)



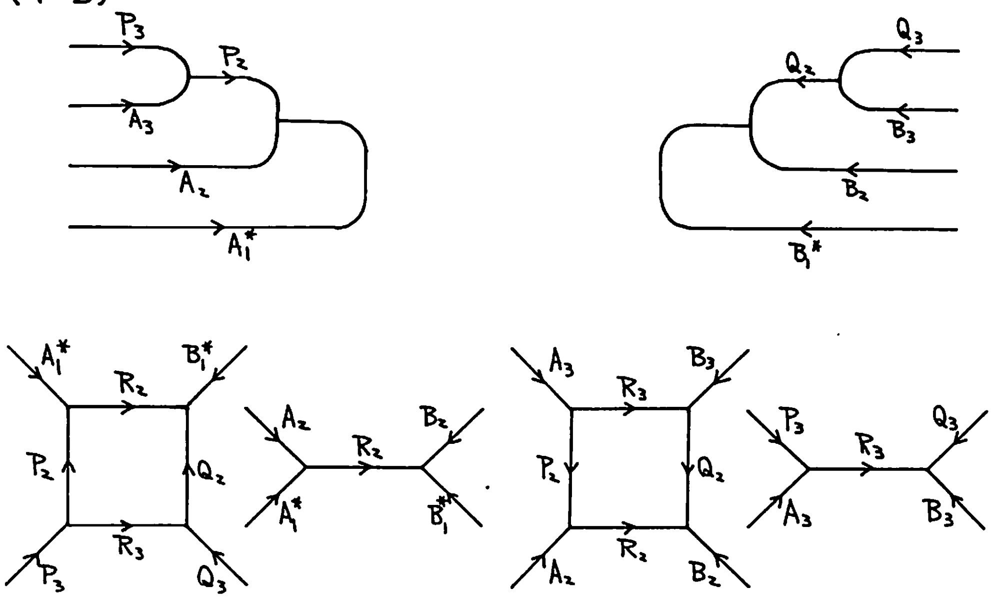
P3 A3 P2 A2 A1
X3 X2 X1
Q3 B3 Q2 B2 B1
R3

(π-C)



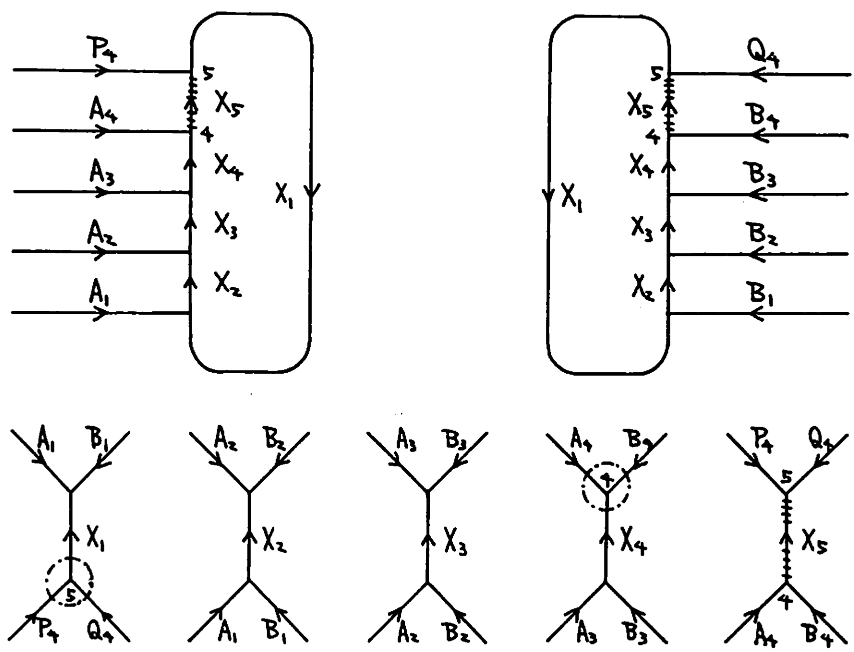
P_3
A_3
P_2
A_2
A_1
X_3
X_2
X_1
Q_3
Q_2
B_3
B_2
B_1
X_3
X_2
X_1
A_3 B_3 R_3 P_2 Q_2 X_3 A_2 B_2
A_1 B_1 X_1 P_2 Q_2 R_3 P_3 Q_3
A_2 B_2 X_2 A_1 B_1
P_3 Q_3 R_3 A_3 B_3

(π-D)



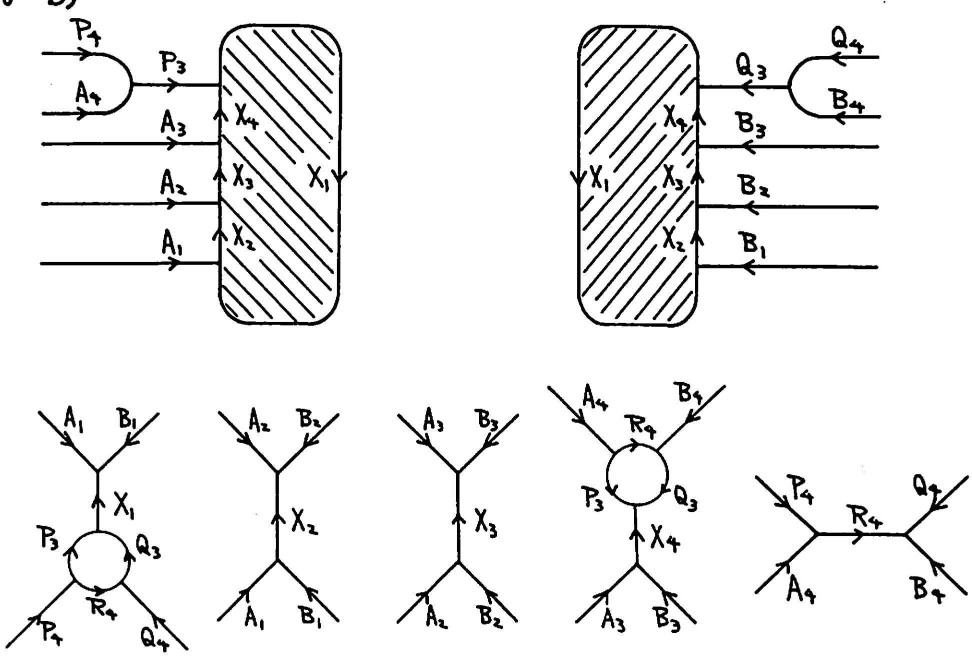
P_3
A_3
P_2
A_2
A_1^*
Q_3
Q_2
B_3
B_2
B_1^*
A_1^* B_1^* R_2 P_2 Q_2 R_3 P_3 Q_3
A_2 B_2 R_2 A_1^* B_1^*
A_3 B_3 R_3 P_2 Q_2 R_2 A_2 B_2
P_3 Q_3 R_3 A_3 B_3

(8-A)



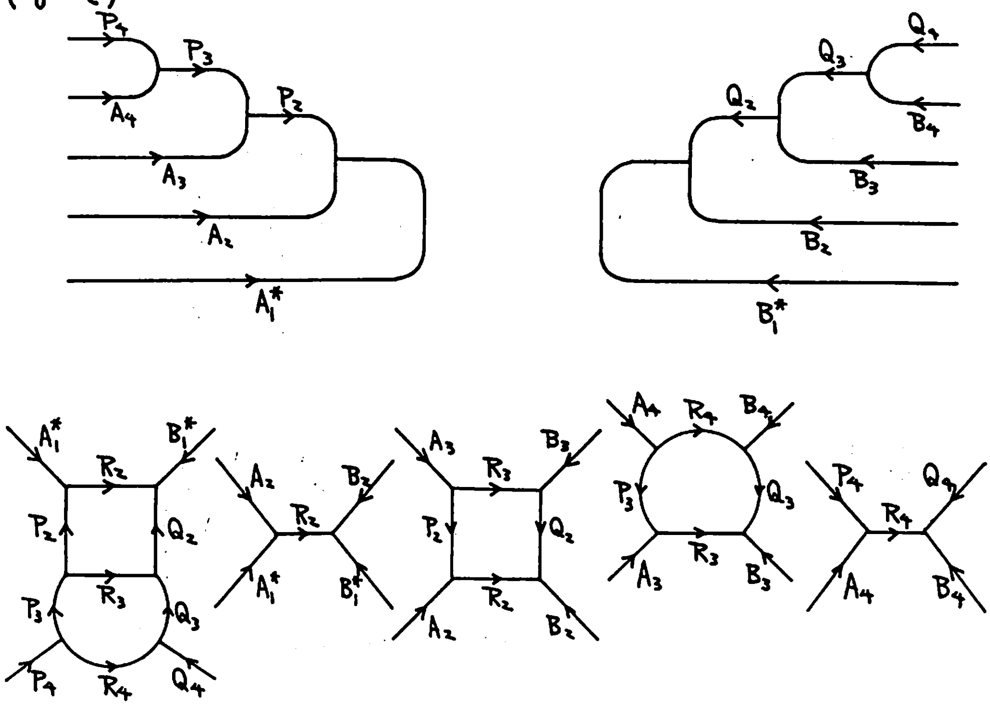
P_4
A_4
A_3
A_2
A_1
X_5
X_4
X_3
X_2
X_1
Q_4
B_4
B_3
B_2
B_1
5
4

(8-B)

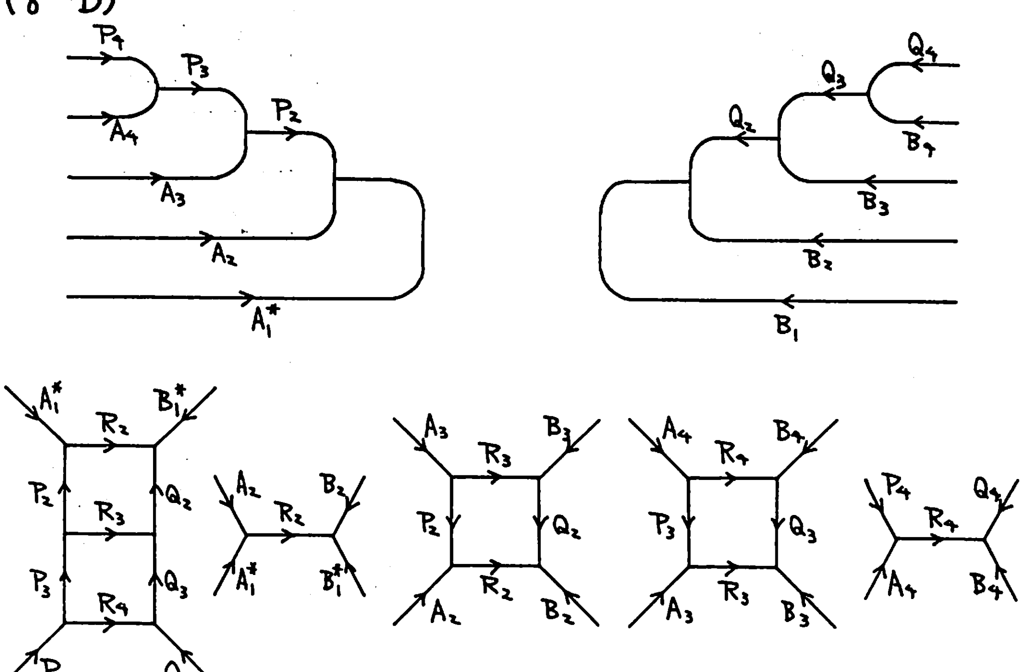


P_4
P_3
A_4
A_3
A_2
A_1
X_4
X_3
X_2
X_1
Q_4
Q_3
B_4
B_3
B_2
B_1
R_4

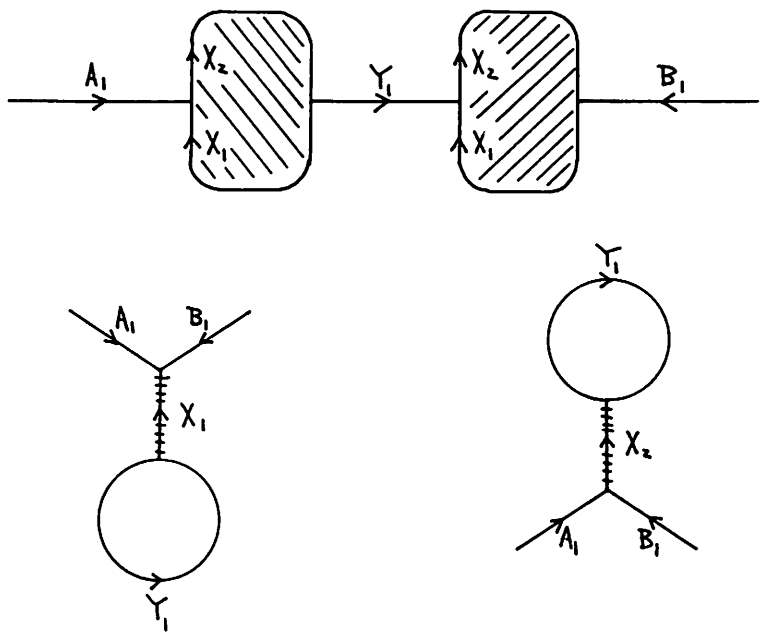
(8-C)


P4 P3 P2 A4 A3 A2 A1*
Q4 Q3 Q2 B4 B3 B2 B1*
A1* B1* R2 P2 Q2 R3 P3 Q3 P4 R4 Q4
A2 B2 R2 A1* B1*
A3 B3 R3 P2 Q2 R2 A2 B2
A4 R4 B4 P3 Q3 R3 A3 B3
P4 Q4 R4 A4 B4

(8-D)

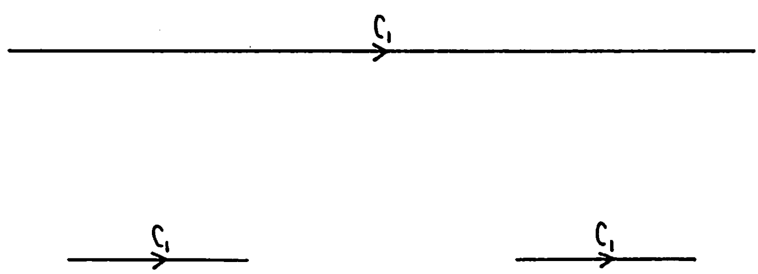

P4 P3 P2 A4 A3 A2 A1*
Q4 Q3 Q2 B4 B3 B2 B1
A1* B1* R2 P2 Q2 R3 P3 Q3 R4 P4 Q4
A2 B2 R2 A1* B1*
A3 B3 R3 P2 Q2 R2 A2 B2
A4 B4 R4 P3 Q3 R3 A3 B3
P4 Q4 R4 A4 B4

(9 - A)

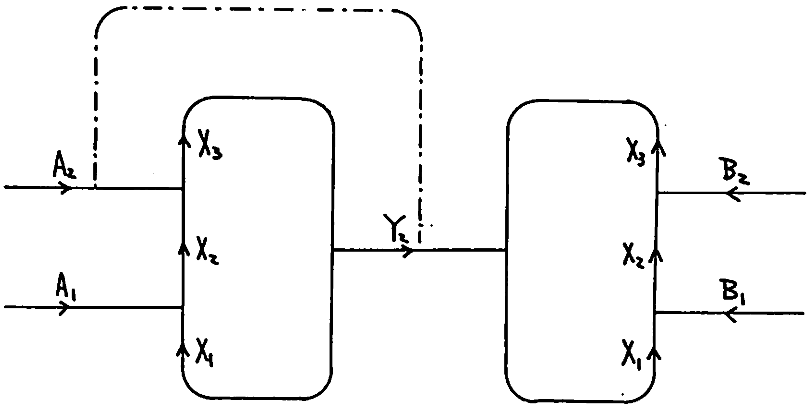


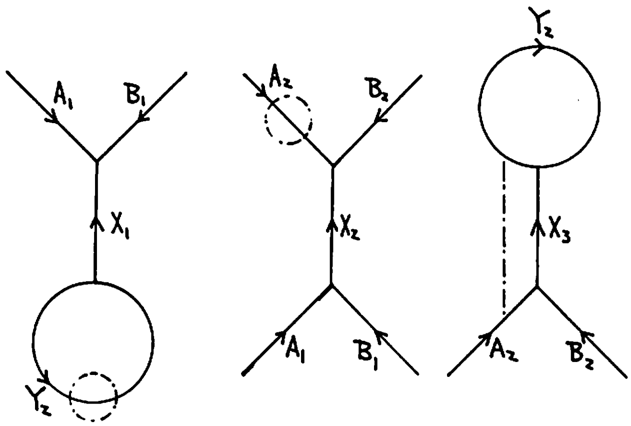
(9 - B)

$(C_1 = A_1 \overline{B_1})$

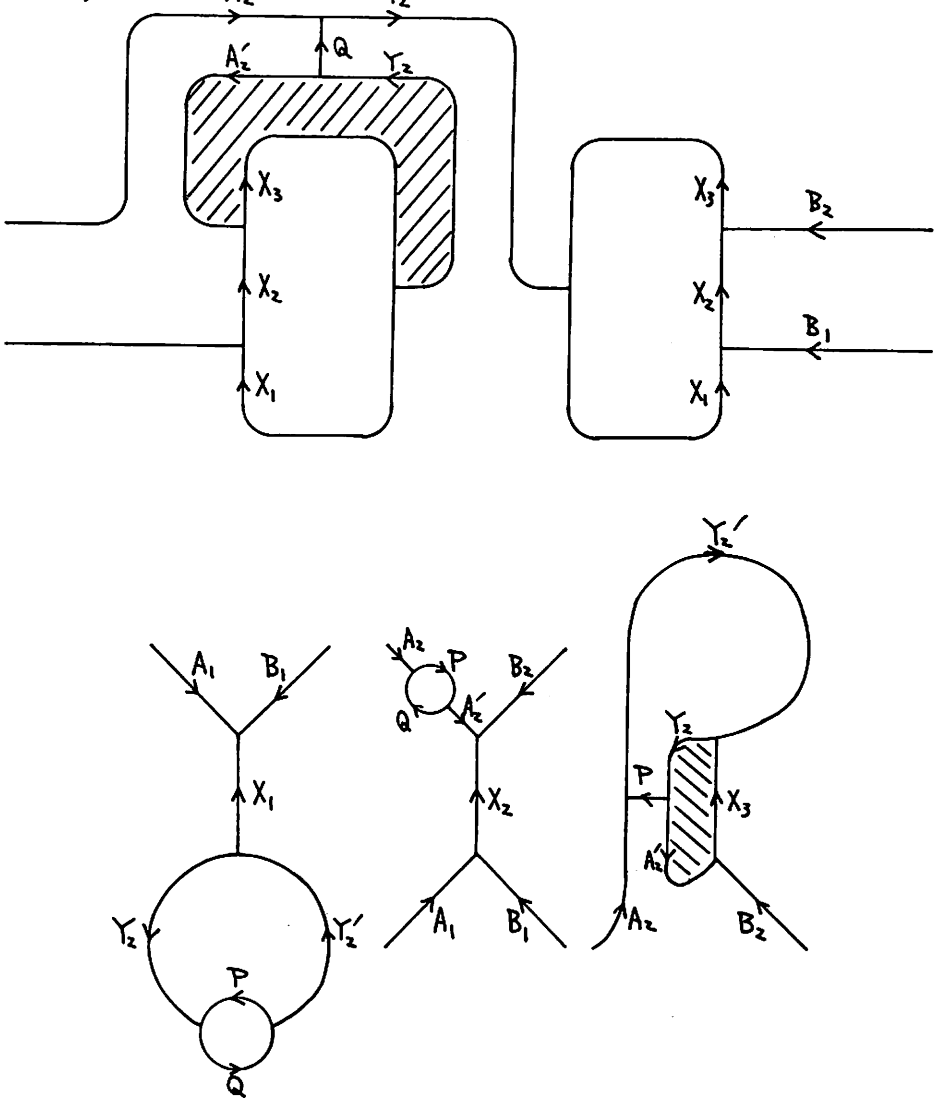


(10-A)



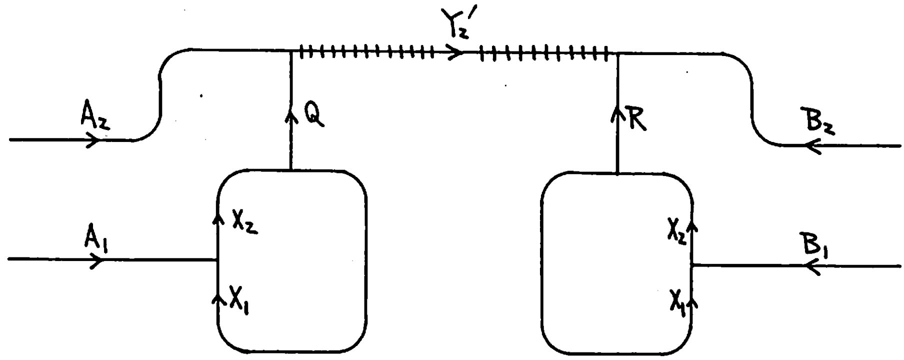


(10-B)

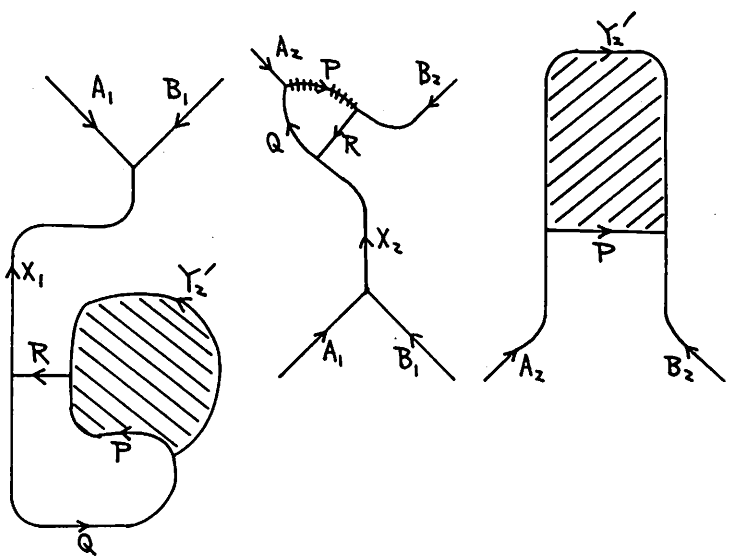


A_2
Y_2'
Q
A_2'
Y_2
X_3
X_2
X_1
X_3
B_2
X_2
B_1
X_1
Y_2'
A_2
P
B_2
A_1
B_1
Q
A_2'
Y_2
X_1
X_2
P
X_3
A_2'
Y_2
Y_2'
A_1
B_1
A_2
B_2
P
Q

(10-C)



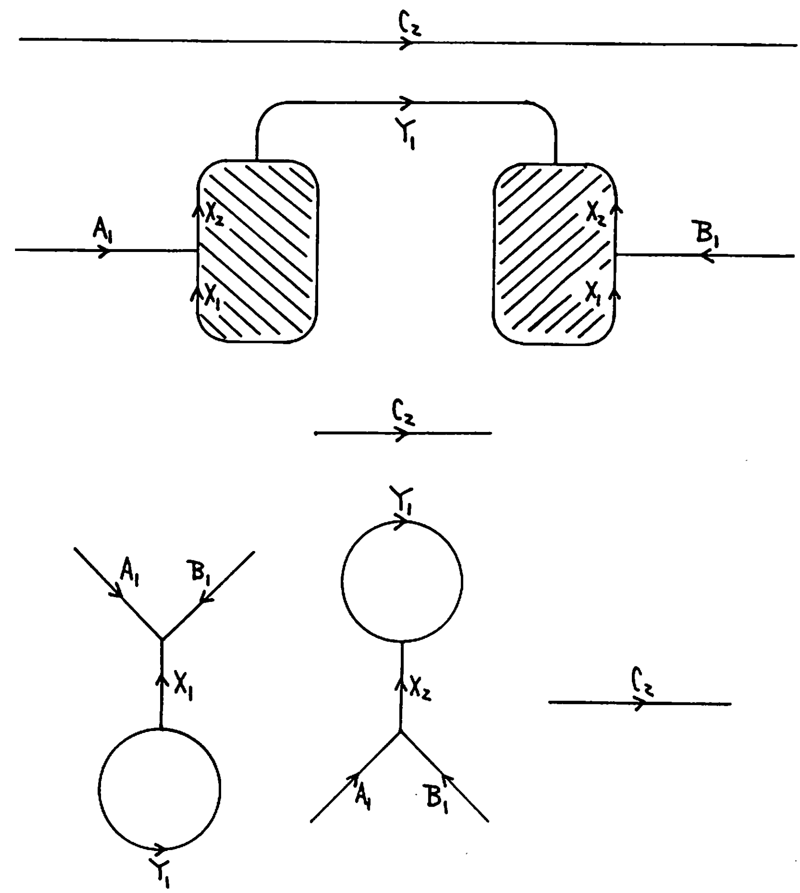
Y_2'
A_2
Q
R
B_2
A_1
X_2
X_1
X_2
B_1
X_1



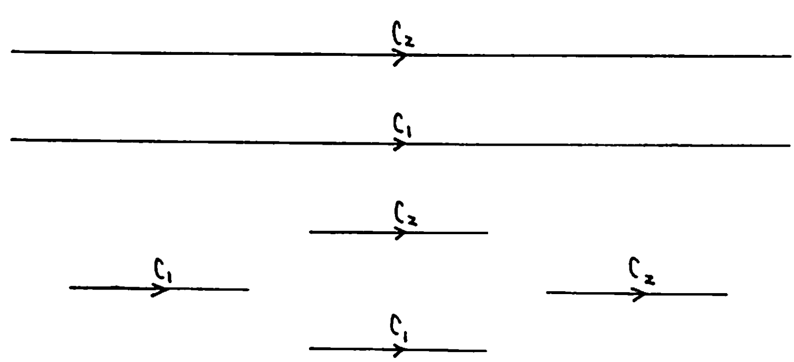
A_1
B_1
X_1
Y_2'
R
P
Q
A_2
P
B_2
Q
R
X_2
A_1
B_1
Y_2'
P
A_2
B_2

(10-D)

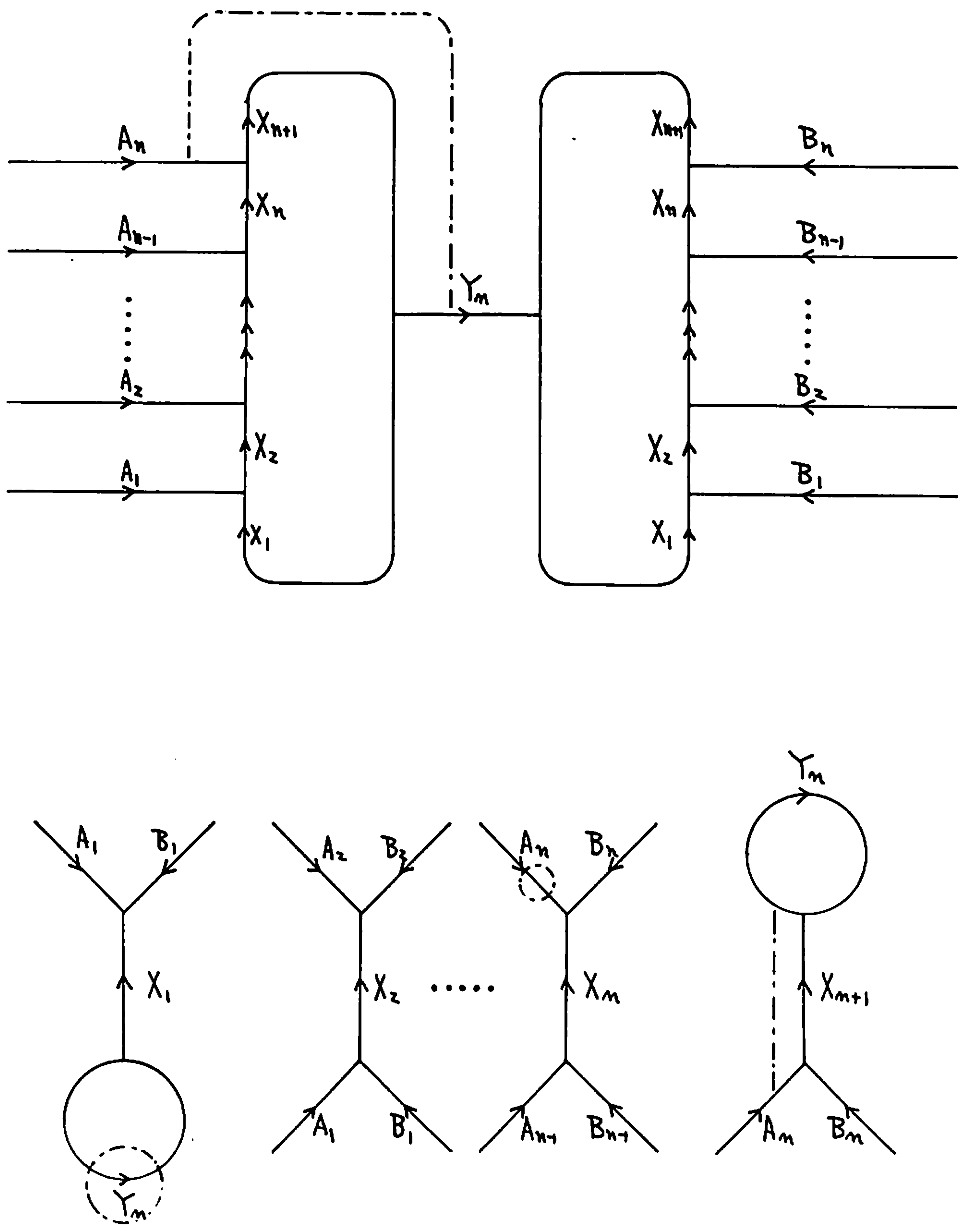
$$C_2 = A_2 \bar{B}_2$$
$$Y_1 = Q \bar{R}$$



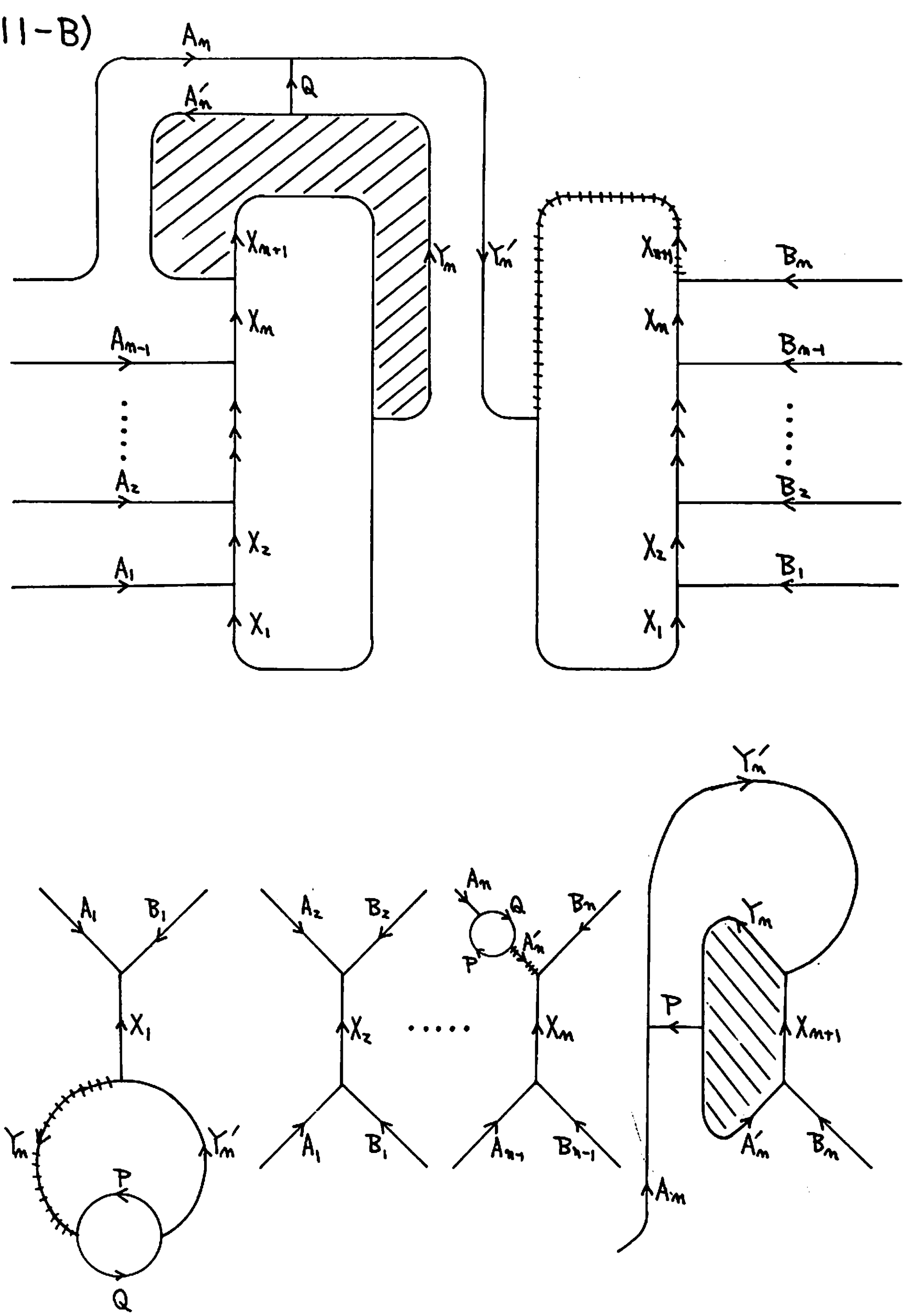
(10-E)



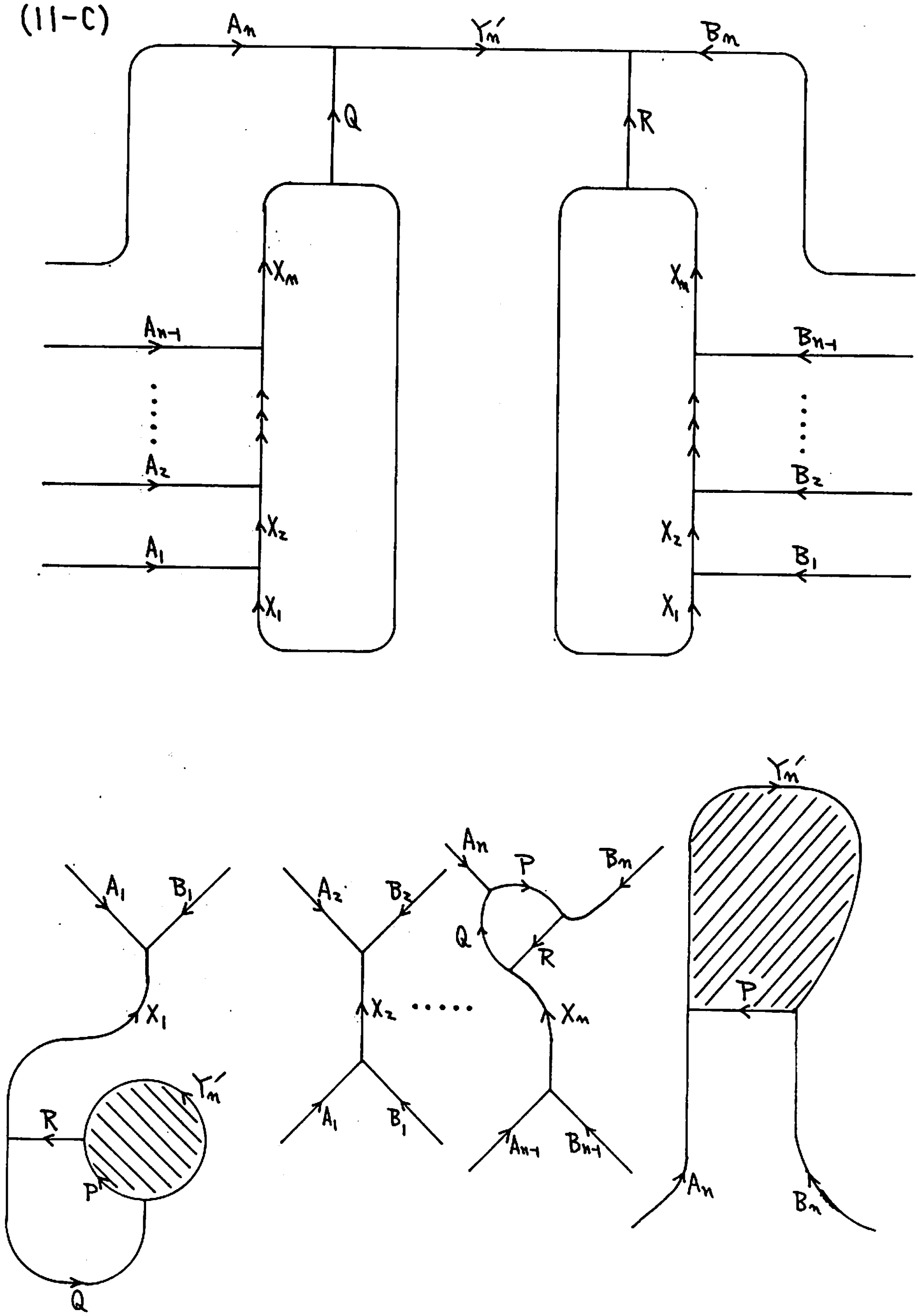
(11-A)


A_n
A_{n-1}
A_2
A_1
X_{n+1}
X_n
X_2
X_1
Y_n
B_n
B_{n-1}
B_2
B_1
A_1 B_1 X_1 Y_n
A_2 B_2 X_2 A_1 B_1
A_n B_n X_n A_{n-1} B_{n-1}
Y_n X_{n+1} A_n B_n

(11-B)


A_m
Q
A'_m
X_{m+1}
Y_m
Y'_m
X_m
A_{m-1}
A_2
X_2
A_1
X_1
B_m
B_{m-1}
B_2
B_1
A_1
B_1
X_1
Y_m
Y'_m
P
Q
A_2
B_2
X_2
A_n
B_n
Q
A'_n
P
X_m
A_{m-1}
B_{n-1}
P
X_{m+1}
A'_m
B_m
A_m

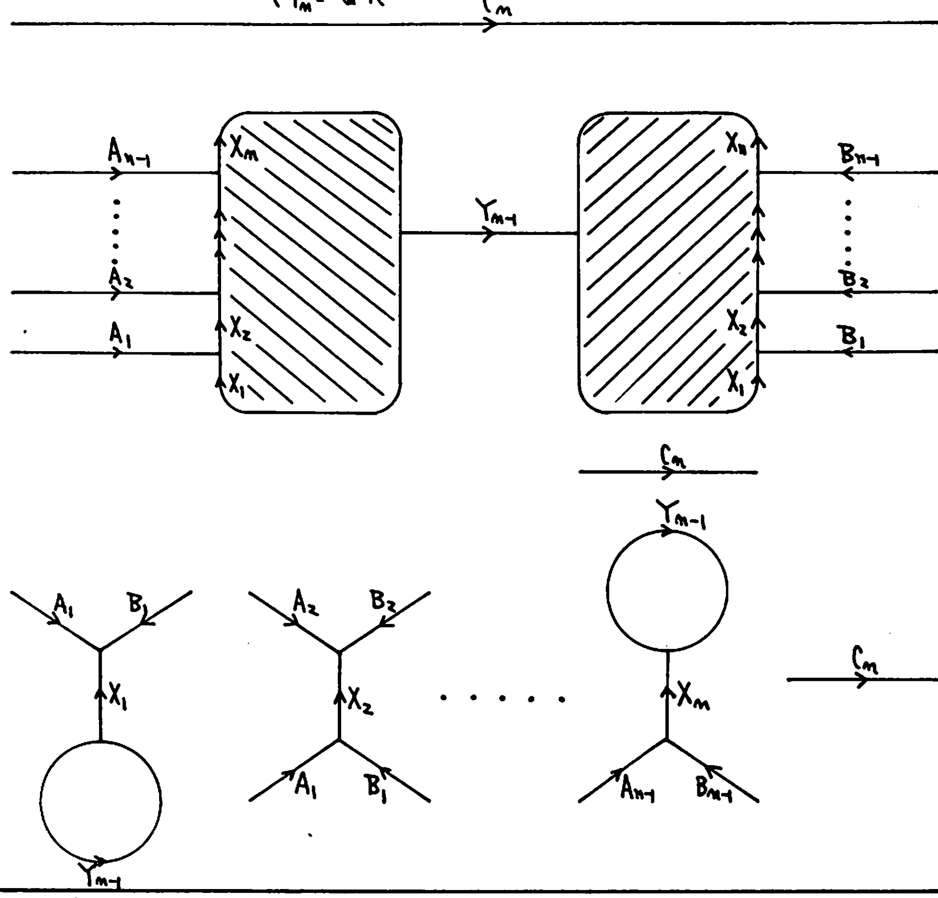
(11-C)



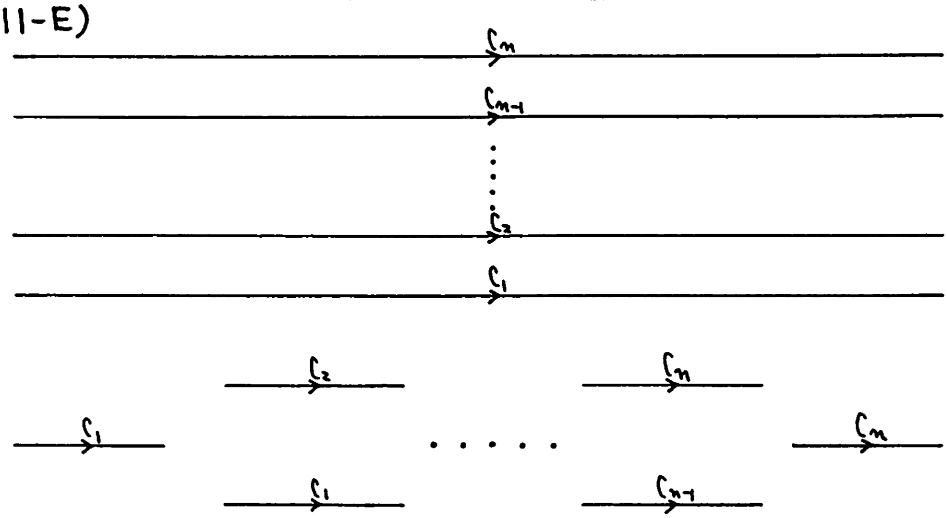
A_n
Y_n'
B_n
Q
R
X_m
A_{n-1}
A_2
A_1
X_2
X_1
B_{n-1}
B_2
B_1
A_1 B_1
X_1
Y_n'
R
P
Q
A_2 B_2
X_2 .....
A_1 B_1
A_n
P
B_n
Q
R
X_m
A_{n-1} B_{n-1}
Y_n'
P
A_n
B_n

(11-D)

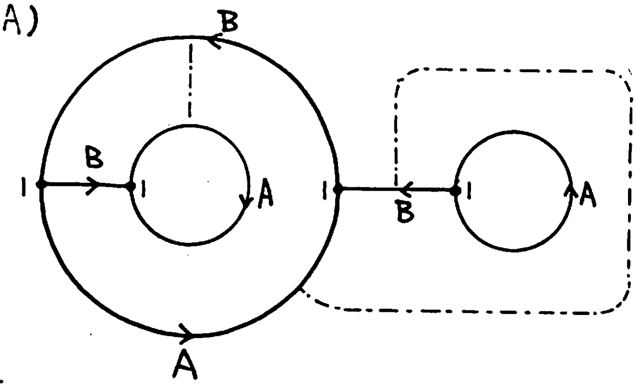
$$\begin{cases} C_n = A_n \overline{B}_n \\ Y_n = Q \overline{R} \end{cases}$$



(11-E)



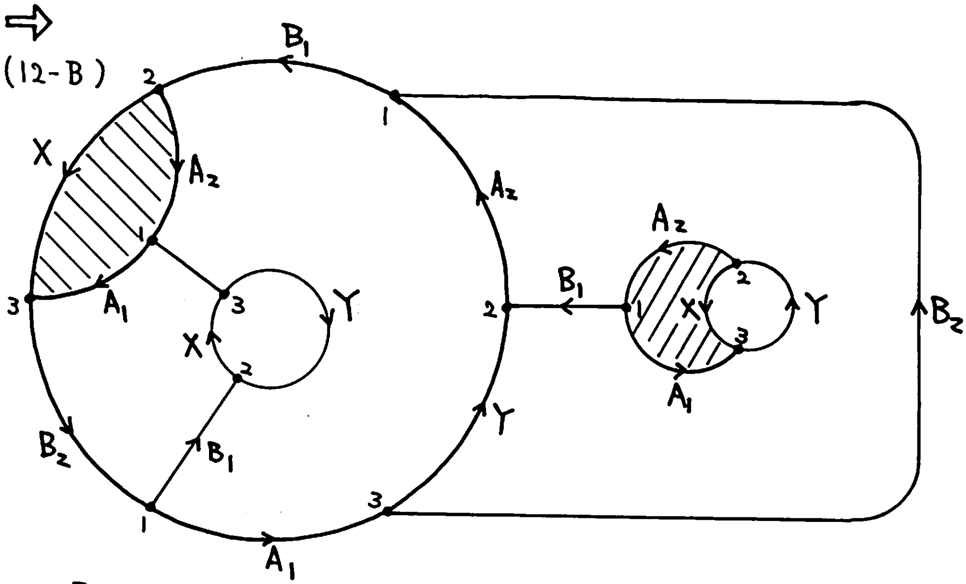
(12–A)



type II$^+$

⇨

(12-B)



type I$^-$

⇨

(12-C)