

# Dehn surgery と homology sphere

山下 正勝

## § 1. knot の coil 表示と knot exterior

DS-diagram  $\Delta = (S^3, G, f)$  が対隣接面  $X = (X^+, X^-)$  を含むとき,  $cl(\partial X^+) \cap cl(\partial X^-)$  上の任意の辺  $A^0$  に対して  $\Delta$  の 1-label, すなわち 3 対の辺の組:

$(A^0; A^+, A^-); A^0 \in cl(\partial X^+) \cap cl(\partial X^-), A^+ \in \partial X^+, A^- \in \partial X^-$  が自動的に見つかる。ただし,  $f(A^0) = f(A^+) = f(A^-) = A \subset f(G)$  である。

(注)  $X = (X^+, X^-)$  が対隣接面である  $\Leftrightarrow cl(X^+) \cap cl(X^-) \neq \emptyset$ .

このとき,  $G$  が 3-regular graph であることから,  $cl(X^+) \cap cl(X^-)$  は少なくとも一つの辺を含む。もしも DS-diagram  $\Delta = (S^3, G, f)$  が E-cycle を持つならば,  $A^0$  は必ず E-cycle 上にある。

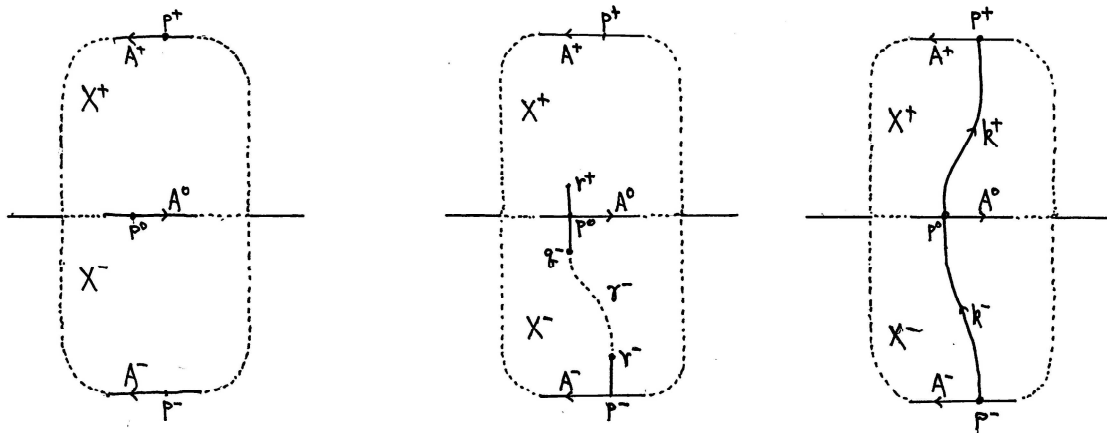


図 1 : coil ができるまで

$p^0$  を  $A^0$  の一つの内点とすると, それに対して

$$p^+ \in A^+, p^- \in A^-; f(p^0) = f(p^+) = f(p^-) = p \in A$$

となる点  $p^+ \in A^+, p^- \in A^-$  が定まる。

点  $p^0$  において辺  $A^0$  と垂直に交わる短い線分

$$q^- p^0 r^+ \subset cl(X^- \cup X^+); \text{ただし } q^- \in A^-, r^+ \in A^+$$

を考える。点  $p^-$  から点  $r^-$  に向かう線分を  $p^- r^-$ , ただし  $f(p^- r^-) = f(p^0 r^+)$ , とし,  $f(r^-) = f(r^+) \in A$  である点  $r^- \in A^-$  から点  $q^-$  に向かう  $cl(X^-)$  上の (oriented) arc を  $\gamma^-$  とする。そのようにして得られる  $cl(X^-)$  上の proper arc  $p^- r^- \cup \gamma^- \cup q^- p^0$  を  $k^-$  と書く。このとき,  $k^-$  に対応する proper arc  $k^+ = p^0 r^+ \cup \gamma^+ \cup q^+ p^+$  も自動的に得られる。 $f(k^+) = f(k^-)$  は spine  $P = f(S^2)$  上の閉曲線  $k$  に  $P$  の表裏両面から重なって乗っかっ

ている。このような  $(k^-, k^+)$  のことを  $X$  上の **coil** と称する。

$S^3$  内の knot  $k$  に対して,  $(k^-, k^+)$  が  $f(k^+) = f(k^-) = k \subset S^3$  であるような coil であるならば, それを knot  $k$  の **coil 表示** といい, 乱暴に  $k = (k^-, k^+)$  と表記することにする。

$S^3$  内の任意の knot は coil 表示を持っているような気がする (証明はできないが, 少ない経験からの勘! )。

以下, これから扱う DS-diagram  $\Delta = (S^3, G, f)$  は,  $S^3$  に関連する DS-diagram にターゲットを合わせ, 断らない限り, 常に E-cycle を持っているものとする。

さて,  $k = (k^-, k^+)$  を  $S^3$  内の knot  $k$  の coil であるとする, knot  $k$  の knot exterior  $E(k) = S^3 - \text{Int}N(k)$  の DS-diagram は  $S^3$  の DS-diagram  $\Delta = (S^3, G, f)$  上に現れる knot  $k$  の coil  $k = (k^-, k^+)$  をスプーンカットすることにより, 六角形状の境界  $\partial E(k) = \partial N(k)$  を持った DS-diagram として容易に求めることができる (図2)。これを **knot  $k$  の exterior の coil 表示** といい,  $\Delta(E(k))$  と書く。

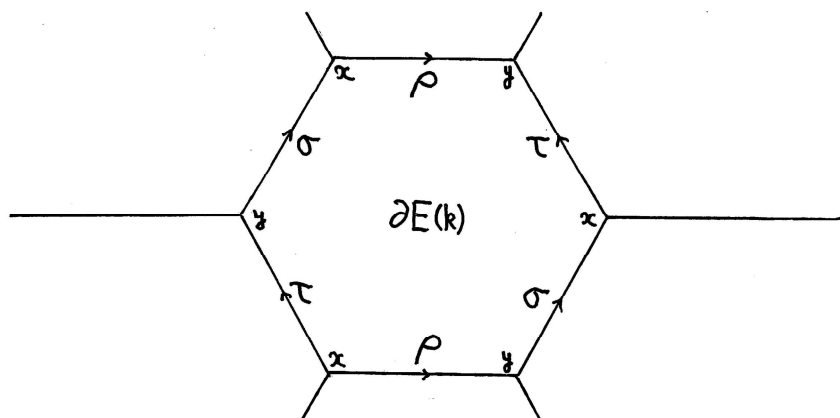


図2 : knot exterior の coil 表示  $\Delta(E(k))$

この knot exterior  $E(k)$  の自然な meridian loop  $m$  の  $E(k)$  および  $\partial E(k)$  における homology class をそれぞれ  $\langle\langle m \rangle\rangle$ , および  $\langle m \rangle$  と書くことにする。

knot exterior  $E(k)$  の coil 表示  $\Delta(E(k))$  のなかで明示されている辺  $\rho, \sigma, \tau$  から得られる  $\partial E(k) \subset E(k)$  上の閉曲線  $\rho\sigma, \tau\rho$  の  $E(k)$  における homology class をそれぞれ  $\langle\langle \sigma \rangle\rangle, \langle\langle \tau \rangle\rangle$  とする。このとき  $H_1(E(k)) = \mathbb{Z}$  であり,  $m$  は閉曲線  $\sigma^{-1}\rho^{-1}\tau \cdot \rho^{-1}$  と homotopic on  $\partial E(k) \subset E(k)$  であるので,

$$\langle\langle m \rangle\rangle = \langle\langle \sigma^{-1}\rho^{-1}\tau \cdot \rho^{-1} \rangle\rangle = \langle\langle \tau \rangle\rangle - \langle\langle \sigma \rangle\rangle$$

あるいは

$$\langle\langle \tau \rangle\rangle = \langle\langle \sigma \rangle\rangle + \langle\langle m \rangle\rangle$$

という関係が成り立つ。したがって

$\langle\langle\sigma\rangle\rangle = j \langle\langle m\rangle\rangle$  であるならば  $\langle\langle\sigma\rangle\rangle = (j+1) \langle\langle m\rangle\rangle$  となる。この場合の knot exterior の coil 表示  $\Delta(E(k))$  のことを **(j, j+1)型の coil 表示** ということにする。

knot exterior の境界  $\partial E(k)$  はトーラスであるので、その meridian を  $\langle m \rangle$ , longitude を  $\langle l \rangle$  と表す。閉曲線  $\rho, \sigma, \tau, \rho$  の  $\partial E(k)$  における homology class をそれぞれ  $\langle \sigma \rangle, \langle \tau \rangle$  とする。このとき

$$\begin{array}{ll} j \geq 0 \text{ ならば} & j < 0 \text{ ならば} \\ \langle \sigma \rangle = \langle l \rangle + j \langle m \rangle & \langle \sigma \rangle = - \langle l \rangle + j \langle m \rangle \\ \langle \tau \rangle = \langle l \rangle + (j+1) \langle m \rangle & \langle \tau \rangle = - \langle l \rangle + (j+1) \langle m \rangle \end{array}$$

という関係がある。

## § 2. solid torus の fiber 構造と DS-diagram

fiber 構造を明確に反映させた形での solid torus の (境界付きの) DS-diagram が存在する。詳しくは

山下正勝「Fibered solid torus の DS-diagram」Hakone Seminar 17 (2001) 57-79  
を見ていただくことにして、ここではその大筋を簡単に概観しておこう。

円柱をプラスネジ方向に  $\frac{1}{3}$  ひねりして上下の円板を貼り合わせると  $\frac{1}{3}$  ひねりのソリッドトーラスが得られる。これは、見た目には普通のソリッドトーラスと較べて何一つ変わってはいないようなのだが、実はファイバー構造が内蔵されていて、中心軸のファイバーのまわりは 3 周巡りのファイバーたちでぎっしり埋め尽くされている。これを  $\frac{1}{3}$  型の fibered solid torus という。

一般に  $\frac{q}{p}$  型の fibered solid torus も考えることができる。solid torus  $D^2 \times S^1$  を meridian disk で一旦切り離して円柱  $D^2 \times [0, 1]$  にする。その円柱を  $\frac{q}{p}$  ひねりしたうえで、改めて

上下の disk を貼り直して得られる solid torus が  $\frac{q}{p}$  型の fibered solid torus である。見た目にはなんにも変わらない solid torus であるが、実はこれには fiber 構造が内蔵されているのである。市販の蟹蒲鉾をほぐすと繊維状になっているが、fiber はこの繊維状のものに似ている。見た目は普通のドーナツ型蟹蒲鉾 (こんな市販品は寡聞にして見たことはないが) のようだけれども、ほぐしてみると繊維がすっかりよじれてしまっている欠陥蟹カマ風のものが一般の fibered solid torus である、といってもよからう。

もう少し正確に述べておこう。solid torus  $D^2 \times S^1$  の1本の meridian を  $p$  等分する。その頂点を順に  $0, 1, 2, \dots, p-1$  と名付けておく。さて、ソリッドトーラスの表面で、頂点  $\{0\}$  から出発して頂点  $\{q\}$  へ向かってゆく繊維は

$$\{0\} \rightarrow \{q\} \rightarrow \{2q\} \rightarrow \{3q\} \rightarrow \dots \pmod{p}$$

とさらに伸びていって、やがては  $\{aq\} = \{1\} \pmod{p}$  に達する。この繊維は solid torus  $D^2 \times S^1$  の中心線  $\{0\} \times S^1$  のまわりを、絡みつくように  $a$  回巻き付いている。meridian 方向には  $b$  回巻き付いている。この様子を式で書くと

$$aq \equiv 1 \pmod{p} \Leftrightarrow aq = 1 + bp$$

である。この繊維を  $F_{0^*}$  と書くことにする。

さて、この繊維の先は頂点  $\{1\}$  からさらに

$$\{1\} \rightarrow \{1+q\} \rightarrow \{1+2q\} \rightarrow \{1+3q\} \rightarrow \dots \pmod{p}$$

と伸びていって、やがては  $\{1+cq\} = \{0\} \pmod{p}$  に達する。式で書くと

$$1+cq \equiv 0 \pmod{p} \Leftrightarrow 1+cq = dp$$

である。この繊維を  $F_{1^*}$  と書くことにする。

$F_{0^*} \cup F_{1^*}$  は torus  $S^1 \times S^1 \subset D^2 \times S^1$  の上を走る loop である。solid torus  $D^2 \times S^1$  は1本の中心線と  $F_{0^*} \cup F_{1^*}$  に平行な無数の fiber で埋め尽くされている。このような solid torus のことを  $\frac{q}{p}$  型の **fibered solid torus** といい、 $Q(\frac{q}{p})$  と書く。

solid torus  $D^2 \times S^1$  の DS 表示を考えるとき、当然なことながら、それを表す(境界を持った)DS-diagram が無数に存在する。そんななかで、ここでは fiber  $\{F_{0^*}, F_{1^*}\}$  を内蔵したものを考えてゆきたい。

これからの議論では分数  $\frac{q}{p}$  を連分数表示しておくのも便利である。そこで連分数表記について簡単に述べておく。(通常の記事とは多少異なるところがあるのでご注意を！)

自然数  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  に対して

$$[a_0 ; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}$$

と定める。 $a_0 = 0$  のときは、セミコロンまでの部分 " $a_0 ;$ " を省略して、 $[a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n]$  と書くことにする。すなわち

$$[a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n] = [0 ; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n]$$

連分数表記には以下のような性質がある。

$$\begin{aligned}
[a_1, \dots, \underline{a_n + 1}] &= [a_1, \dots, \underline{a_n}, 1] \\
[\underline{b}, a_1, \dots, a_n] &= \frac{1}{b + [a_1, \dots, a_n]} \\
[\underline{1 + b}, a_1, \dots, a_n] + [\underline{1}, \underline{b}, a_1, a_2, \dots, a_n] &= 1 \\
0 < [a_1, \dots, a_n] &< 1 \\
a_1 \geq 2 &\Rightarrow 0 < [a_1, a_2, \dots, a_n] < \frac{1}{2} \\
a_1 = 1 &\Rightarrow \frac{1}{2} < [1, a_2, \dots, a_n] < 1
\end{aligned}$$

等々。

fibred solid torus  $Q(\frac{q}{p})$  の DS-diagram  $\Delta(\frac{q}{p})$  は,

$$\frac{1}{3} = [3] = [2, 1] \text{ に対する } Q[2, 1] = Q(\frac{1}{3}), \text{ および } \frac{2}{3} = [1, 2] \text{ に対する } Q[1, 2] = Q(\frac{2}{3})$$

を出発点として帰納的に記述することができる。

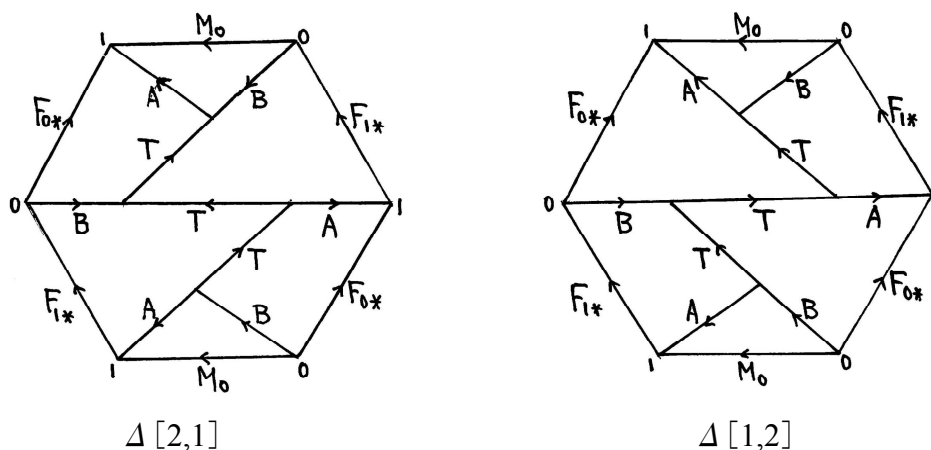


図 3 : fibred solid torus  $Q[2,1]$  および  $Q[1,2]$  の DS-diagram

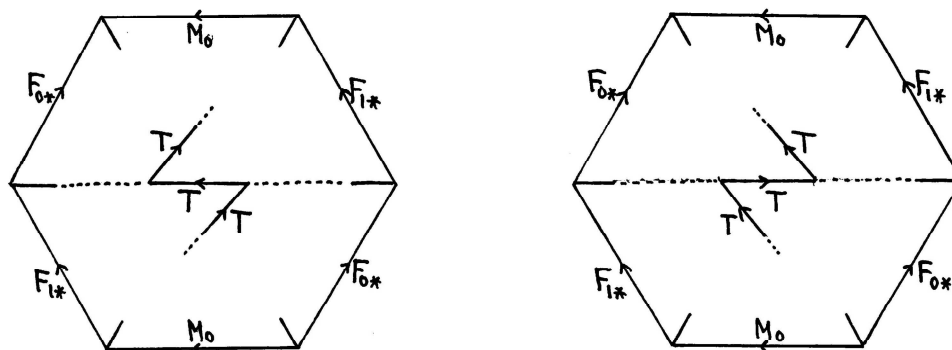


図 4 : DS-diagram  $\Delta(\frac{q}{p})$  の辺のラベル付け

一般の fibered solid torus  $Q(\frac{q}{p})$  に対する DS-diagram  $\Delta(\frac{q}{p})$  は六角形のなかに描かれる図である。この絵は(ラベルを気にしなければ)上下対称になっている。中央に横たわる水平線は E-cycle の役割を演ずるものなので、ここでは“DS-diagram  $\Delta(\frac{q}{p})$  の E-cycle”と呼ぶことにする。E-cycle の中心部近くにはいつでも zigzag type の辺が陣取っているので、この 3 本の辺を下から上に向かうように矢印をつけ、“T” というラベルをつける。

E-cycle 上のその他の辺には、たとえばすべて左から右へ向かう方向に向きをつけ、これらのすべての辺に異なる名前を付加すれば、E-cycle 上にないすべての辺にも自然にラベル付けが広がってゆき、ついには図全体に一意なラベル付けが完成する。言い換えれば、fibered solid torus  $Q(\frac{q}{p})$  に対する DS-diagram  $\Delta(\frac{q}{p})$  は、ラベルをわざわざ明示しなくても、図形だけですべての情報が得られるということである。

DS-diagram  $\Delta(\frac{q}{p})$  の zigzag type の辺 T は solid torus  $Q(\frac{q}{p})$  内では loop になっているが、その homotopy class は基本群  $\pi_1(Q(\frac{q}{p})) = Z$  の generator になっている。したがって loop  $F_0 \cdot M_0^{-1}$ ,  $M_0 F_{1*}$  の solid torus  $Q(\frac{q}{p})$  における homotopy class  $[F_0^*]$ ,  $[F_{1*}]$  は乗法的記法で  $t = [T]$  の冪の形で表すことができる。また、solid torus  $Q(\frac{q}{p})$  における homology class  $\langle\langle F_0^* \rangle\rangle$ ,  $\langle\langle F_{1*} \rangle\rangle$  は加法的記法で  $t = \langle\langle T \rangle\rangle$  の整数倍の形で書くことができる。

### § 3. knot exterior の coil 表示による Dehn surgery

$\Delta(E(k))$  を knot  $k$  の exterior  $E(k)$  の coil 表示(図 2)とする。この diagram の六角形の部分は  $E(k)$  の境界であるトーラス  $\partial E(k) = \partial N(k)$  であるから、この台紙に fibered solid torus の DS-diagram  $\Delta(\frac{q}{p})$  を貼り付ければ一つの閉多様体の DS-diagram

$$\Delta(E(k)) \# \Delta(\frac{q}{p})$$

が得られる。これを knot exterior の coil 表示による Dehn surgery, 略して  $k$  の coil 式 Dehn surgery と呼ぶことにする。このときの貼り付け方法は、向きも込めて

$$F_0^* \leftrightarrow \sigma, \quad F_{1*} \leftrightarrow \tau, \quad M_0^{-1} \leftrightarrow \rho$$

となるように定めておく。その identification map を  $\eta : \Delta(\frac{q}{p}) \rightarrow \Delta(E(k))$  と書くことにする。張り合わされるトーラスにおける homology の関係は ( $j \geq 0$  の場合には)

$$\langle F_{0*} \rangle = a \langle \lambda \rangle + b \langle \mu \rangle, \quad \langle \sigma \rangle = \langle l \rangle + j \langle m \rangle$$

$$\langle F_{1*} \rangle = c \langle \lambda \rangle + d \langle \mu \rangle, \quad \langle \tau \rangle = \langle l \rangle + (j+1) \langle m \rangle$$

の形に書ける。そのとき、 $\langle \lambda \rangle$ ,  $\langle \mu \rangle$  を未知数とする 1 次方程式

$$a \langle \lambda \rangle + b \langle \mu \rangle = \langle l \rangle + j \langle m \rangle$$

$$c \langle \lambda \rangle + d \langle \mu \rangle = \langle l \rangle + (j+1) \langle m \rangle$$

を  $\langle \mu \rangle$  について解くと

$$\langle \mu \rangle = (a+c) \langle l \rangle + \{(j+1)a+jc\} \langle m \rangle$$

となる。このとき

$$\chi = \frac{a(j+1)+cj}{a+c}$$

は Dehn surgery  $\Delta(E(k)) \# \Delta\left(\frac{q}{p}\right)$  の **surgery 係数** と呼ばれるものである。

#### § 4. knot exterior の $(j, j+1)$ 型 coil 表示を台紙とする Dehn surgery で homology sphere が得られる fibered solid torus のパターン

$\Delta(E(k))$  を任意の knot  $k$  の exterior の  $(j, j+1)$  型 coil 表示としよう。  $\chi = \frac{(j+1)a+jc}{a+c}$  を

Dehn surgery  $\Delta(E(k)) \# \Delta\left(\frac{q}{p}\right)$  の surgery 係数とする。その結果得られる閉多様体  $M$  が homology sphere となるための fibered solid torus の DS-diagram

$$\Delta\left(\frac{q}{p}\right) = \Delta[a_n, \dots, a_2, a_1, 1]$$

のパターンは knot  $k$  の種類がなんであっても変わらず、knot exterior の coil の型  $(j, j+1)$  と Dehn surgery の surgery 係数  $\chi$  にのみ関係する。

その DS-diagram  $\Delta\left(\frac{q}{p}\right) = \Delta[a_n, \dots, a_2, a_1, 1]$  のパターンと、それに対応する fibered solid torus  $Q[a_n, \dots, a_2, a_1, 1]$  の基本群  $\pi_1(Q[a_n, \dots, a_2, a_1, 1])$  の群表示を以下に挙げておく。

(I)  $\chi < 0$  のパターン

$\Delta(E(k))$  が  $(0, 1)$  型の場合 ( $j = 0$ )

$$\chi = -\frac{1}{n} \Rightarrow \Delta\left(\frac{q}{p}\right) = \Delta[1+n, 1]$$

$\Delta(E(k))$  が  $(j, j+1)$  型の場合 (ただし,  $j = 1, 2, 3, \dots$ , i. e.  $j \geq 1$ )

$$\chi = -\frac{1}{n} \Rightarrow \Delta\left(\frac{q}{p}\right) = \Delta[n, j, 1, 1]$$

$$\pi_1(Q[1+n, 1]) = \langle \sigma, \tau, t \mid \sigma = t, \tau = t^{1+n} \rangle$$

$$\pi_1(Q[n, j, 1, 1]) = \langle \sigma, \tau, t \mid \sigma = t^{1+jn}, \tau = t^{1+(j+1)n} \rangle$$

(II)  $\chi > 0$  のパターン

$\Delta(E(k))$  が (0, 1) 型の場合 ( $j = 0$ )  $\Rightarrow$  該当なし

$\Delta(E(k))$  が (1, 2) 型の場合 ( $j = 1$ )

$$\chi = 1 \quad \Rightarrow \text{該当なし}$$

$$\chi = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \Delta\left(\frac{q}{p}\right) = \Delta[3, 1]$$

$$\chi = \frac{1}{n} \quad (n \geq 3) \quad \Rightarrow \Delta\left(\frac{q}{p}\right) = \Delta[1, n-2, 2, 1]$$

$$\begin{aligned} \pi_1(Q[3, 1]) &= \langle \sigma, \tau, t \mid \sigma = t, \tau = t^3 \rangle \\ \pi_1(Q[1, n-2, 2, 1]) &= \langle \sigma, \tau, t \mid \sigma = t^{-1+n}, \tau = t^{-1+2n} \rangle \end{aligned}$$

$\Delta(E(k))$  が (2, 3) 型の場合 ( $j = 2$ )

$$\chi = 1 \quad \Rightarrow \Delta\left(\frac{q}{p}\right) = \Delta[2, 1]$$

$$\chi = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \Delta\left(\frac{q}{p}\right) = \Delta[2, 1, 1, 1]$$

$$\chi = \frac{1}{n} \quad (n \geq 3) \quad \Rightarrow \Delta\left(\frac{q}{p}\right) = \Delta[1, n-2, 1, 1, 1, 1]$$

$$\begin{aligned} \pi_1(Q[2, 1]) &= \langle \sigma, \tau, t \mid \sigma = t, \tau = t^2 \rangle \\ \pi_1(Q[2, 1, 1, 1]) &= \langle \sigma, \tau, t \mid \sigma = t^3, \tau = t^5 \rangle \\ \pi_1(Q[1, n-2, 1, 1, 1, 1]) &= \langle \sigma, \tau, t \mid \sigma = t^{-1+2n}, \tau = t^{-1+3n} \rangle \end{aligned}$$

$\Delta(E(k))$  が ( $j, j+1$ ) 型の場合 (ただし,  $j = 3, 4, 5, \dots$ , i. e.  $j \geq 3$ )

$$\chi = 1 \quad \Rightarrow \Delta\left(\frac{q}{p}\right) = \Delta[1, j-2, 1, 1]$$

$$\chi = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \Delta\left(\frac{q}{p}\right) = \Delta[2, j-1, 1, 1]$$

$$\chi = \frac{1}{n} \quad (n \geq 3) \quad \Rightarrow \Delta\left(\frac{q}{p}\right) = \Delta[1, n-2, 1, j-1, 1, 1]$$

$$\begin{aligned} \pi_1(Q[1, j-2, 1, 1]) &= \langle \sigma, \tau, t \mid \sigma = t^{j-1}, \tau = t^j \rangle \\ \pi_1(Q[2, j-1, 1, 1]) &= \langle \sigma, \tau, t \mid \sigma = t^{2j-1}, \tau = t^{2j+1} \rangle \\ \pi_1(Q[1, n-2, 1, j-1, 1, 1]) &= \langle \sigma, \tau, t \mid \sigma = t^{-1+jn}, \tau = t^{-1+(j+1)n} \rangle \end{aligned}$$



## § 5. trefoil knot の Dehn surgery によって得られる homology sphere

前節で述べたように、任意の knot から Dehn surgery によって homology sphere を造る方法がある。この節では trefoil knot を用いて Dehn surgery による homology sphere の作り方の一例を示しておこう。

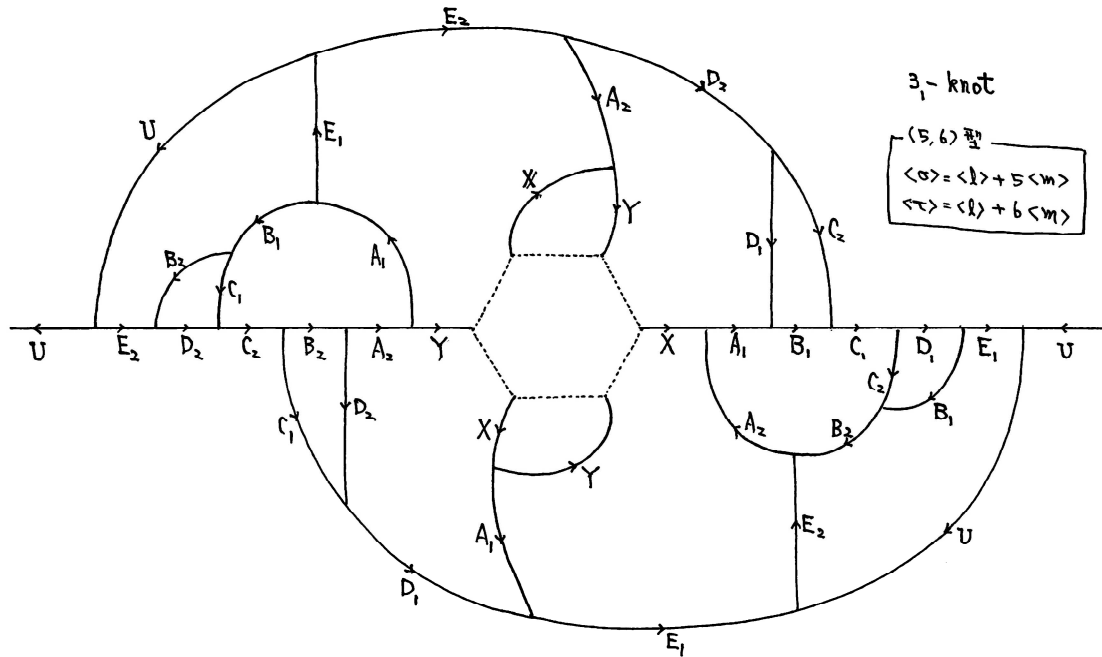


図 5 : trefoil knot の (5,6) 型 coil 表示

図 5 の DS-diagram は trefoil knot の exterior の coil 表示の一例である。計算すればわかるように、これは (5, 6) 型 coil 表示である。そこでこの DS-diagram のことを  $\Delta(E(3_1(5, 6)))$  と書いておこう。

この図を利用して Dehn surgery で homology sphere を得るためには、 $\Delta(E(3_1(5, 6)))$  に載せるべき fibered solid torus を探さなければならない。

$\Delta(E(3_1(5, 6)))$  の型が  $(j, j+1) = (5, 6)$  であることから、それらは

$$\chi < 0 \text{ のパターン} : \chi = -\frac{1}{n} \Rightarrow Q[n, 5, 1, 1]$$

$$\chi \geq 0 \text{ のパターン} : \chi = 1 \Rightarrow Q[1, 3, 1, 1]$$

$$\chi = \frac{1}{2} \Rightarrow Q[2, 4, 1, 1]$$

$$\chi = \frac{1}{n} \Rightarrow Q[1, n-2, 1, 4, 1, 1], \text{ ただし } n = 3, 4, 5, \dots$$

のいずれかでなければならない。

(5,6)型 : homology sphere 用  
 $\chi = -\frac{1}{m} : \Rightarrow [m, 5, 1, 1]$

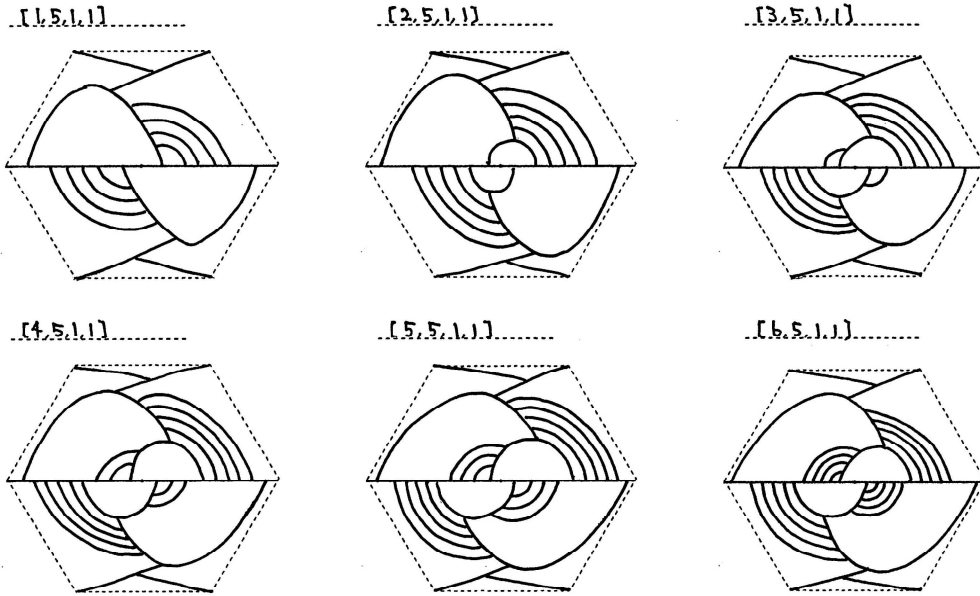


図6-1 : (5,6)型 coil から homology sphere を得るためのカセットQ[\*] :  $\chi < 0$

(5,6)型 : homology sphere 用  
 $\chi = \frac{1}{m+2} : \Rightarrow [1, m, 1, 4, 1, 1]$

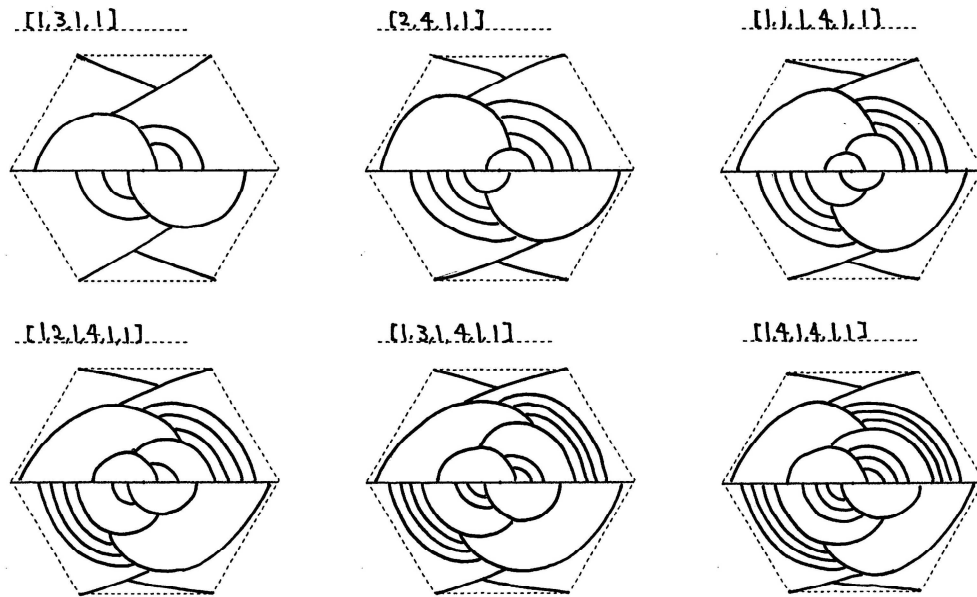


図6-2 : (5,6)型 coil から homology sphere を得るためのカセットQ[\*] :  $\chi \geq 0$

図5のDS-diagram  $\Delta(E(3_1(5, 6)))$ の六角形の部分に、図6のDS-diagram  $\Delta[\dots]$ のいずれかを載せてやり、縫い目(境目の六辺形の点線部分)を消し去って得られるDS-diagramを

$$\Delta = \Delta[\dots] \# \Delta(E(3_1(5, 6)))$$

と書いてやり、そのDS-diagramに対応する閉多様体を

$$M = Q[\dots] \# E(3_1(5, 6))$$

と書くことにする。trefoil knotのexterior  $E(3_1(5, 6))$ にDehn surgeryでfibered solid torus  $Q[\dots]$ を貼り付けて得られたhomology sphereがMであり、 $\Delta$ はそのDS-diagramである。

図5の $\Delta(E(3_1(5, 6)))$ からtrefoil knotのexterior  $E(3_1(5, 6))$ の基本群を計算すると、次のような群表示:

$$\pi_1(E(3_1(5, 6))) = \langle \sigma, \tau, u \mid \sigma\tau = \tau\sigma, \tau u^3 = 1, \sigma u \sigma u^4 = 1 \rangle$$

が得られる。

またここでカセットとして利用するfibered solid torus  $Q[\dots]$ の基本群は

$$\chi = -\frac{1}{n} \Rightarrow \pi_1(Q[n, 5, 1, 1]) = \langle \sigma, \tau, t \mid \sigma = t^{1+5n}, \tau = t^{1+6n} \rangle$$

$$\chi = +\frac{1}{n} \Rightarrow \pi_1(Q[1, 3, 1, 1]) = \langle \sigma, \tau, t \mid \sigma = t^4, \tau = t^5 \rangle$$

$$\pi_1(Q[2, 4, 1, 1]) = \langle \sigma, \tau, t \mid \sigma = t^9, \tau = t^{11} \rangle$$

$$\pi_1(Q[1, n, 1, 4, 1, 1]) = \langle \sigma, \tau, t \mid \sigma = t^{-1+5n}, \tau = t^{-1+6n} \rangle$$

という群表示を持っている。

surgery係数 $\chi = \pm \frac{1}{n}$ に対応する閉多様体 $M = Q[\dots] \# E(3_1(5, 6))$ は一意に定まるので、

ここではMの代わりにひとまず $M(3_1(5, 6), \pm \frac{1}{n})$ と書くことにしよう。そのとき

$M(3_1(5, 6), \pm \frac{1}{n})$ の基本群は

$$\pi_1(M(3_1(5, 6), -\frac{1}{n}))$$

$$= \langle \sigma, \tau, u, t \mid \sigma\tau = \tau\sigma, \tau u^3 = 1, \sigma u \sigma u^4 = 1, \sigma = t^{1+5n}, \tau = t^{1+6n} \rangle$$

$$= \langle u, t \mid t^{1+6n} u^3 = 1, t^{1+5n} u t^{1+5n} u^4 = 1 \rangle$$

$$\pi_1(M(3_1(5, 6), +\frac{1}{n}))$$

$$= \langle \sigma, \tau, u, t \mid \sigma\tau = \tau\sigma, \tau u^3 = 1, \sigma u \sigma u^4 = 1, \sigma = t^{-1+5n}, \tau = t^{-1+6n} \rangle$$

$$= \langle u, t \mid t^{-1+6n} u^3 = 1, t^{-1+5n} u t^{-1+5n} u^4 = 1 \rangle$$

という群表示を持つ。これらをアーベル化すると $\langle \mid \rangle$ すなわち $\{0\}$ となるので $M(3_1(5, 6))$ はhomology sphereであることが、ここでも確認できる。

trefoil knotのexteriorを表すDS-diagramは様々ある。それらのうち、(4, 5)型, (2, 3)型などいくつかの違った型(j, j+1)のknot exteriorについても調べてみたが、いずれも同じ結果が得られた。すなわちsurgery係数 $\chi$ の値が等しければ(knot exteriorの型に依らず)

同じ基本群を持つ閉多様体が得られるようだ。おそらく基本群が同型であるどころか、同じ閉多様体そのものが得られるのであろう。等しい理由はわからないが、knot の Dehn surgery にあたっては、型  $(j, j+1)$  の違いには気を使わなくてもよいようだ。

[命題]  $3_1$ -knot 上の surgery 係数  $\chi = \pm \frac{1}{n}$  の Dehn surgery で得られる homology sphere

$M(3_1, \chi = \pm \frac{1}{n})$  の基本群は次の群表示を持つ：

$$\pi_1(M(3_1, \chi = -\frac{1}{n})) = \langle u, t \mid t^{1+6n} u^3 = 1, t^{1+5n} u t^{1+5n} u^4 = 1 \rangle$$

$$\pi_1(M(3_1, \chi = +\frac{1}{n})) = \langle u, t \mid t^{-1+6n} u^3 = 1, t^{-1+5n} u t^{-1+5n} u^4 = 1 \rangle$$

(完)