A LIST OF DUAL CROSS GRAPHS

津久井　康之

r-regular simple bipartite graph の self complementary の判定に"dual cross graph" の概念が有効であることを見てきたが、ここではその具体的な「リスト」$(br \leq 4)$ を提示したい。

1. DUAL CROSS GRAPH 再考

dual cross graph は、[3] で定義したが、ここで更に詳細に扱うには少し不便なので、再定義する。内容は本質的に変わってはいない。

Graph $G^r = (V^+ \cup V^-, E)$ が r-regular bipartite simple graph with 4r vetices で $\#V^+ = \#V^- = 2r$ とする。この性質を持つグラフの類を Γ^r と記す。G^r を $4r$ 頂点の完全２部グラフ $K_{2r,2r}$ の部分グラフと見たとき、$K_{2r,2r} - E$ を G^r の(正)補グラフ(+complement)と呼び $G^{r^{+c}}$ と記す。$G^r \cong G^{r^{+c}}$ であるとき、G^r を r-regular bipartite self complementary graph と呼び、rbsc-graph と略記する。

Definition 1. G を上の graph とする。$X \subset V^+, Y \subset V^-$ のとき、
$(XY) = XY = (XY; G) = \{\langle x, y\rangle \in E(G) |\, x \in X, y \in Y\}$、
$(XY)^c = (XY; G^{+c}) = \{\langle x, y\rangle \notin E(G) |\, x \in X, y \in Y\}$ とし、
$\#X = \#Y = r$ のとき、(X, Y) を、proper pair と呼ぶ。

Definition 2 (*dual cross graph*)**.** (A, B) を G の proper pair とする。
$C = V^+ - A,\ D = V^- - B$ とし、$X(G; A, B) = AD \cup CB = X(G; C, D)$,
$V(G; A, B) = AB \cup CD = V(G; C, D)$ とする. $X(G; A, B)$ の元を $(G; A, B)$ の *cross edge*, $V(G; A, B)$ の元を *vertical edge* と呼ぶ。
$V^c(G : A, B) = (AB)^c \cup (CD)^c, X^c(G; A, B) = (AD)^c \cup (CB)^c$ と記す。
$X(G^{+c}; A, D) = (AB)^c \cup (CD)^c = X(G^{+c}; C, B) = V^c(G : A, B)$,
$V(G^{+c}; A, D) = (AD)^c \cup (CB)^c = V(G^{+c}; C, B) = X^c(G; A, B)$.
$[X(G; A, B) \cup V^c(G : A, B)]$ を $X(G; A, B) \cup V^c(G : A, B)$ から誘導されるグラフとし、$D(G; A, B)$ と表す。$D(G; A, B)$ に、$X(G; A, B)$ の元に r(赤)、$X(G^{+c}; A, D)$ の元に b(青)とした２色辺彩色グラフをGの *dual cross graph* と呼び、$d(G; A, B)$ と書く。

$d(G; A, B)$ に対して、赤と青の色を交換したものを $\overline{d(G; A, B)}$ と記す。
proper pair (A, D) に対して、$D(G; A, D) = [X(G; A, D) \cup V^c(G; A, D)]$ か

ら、$d(G;A,D)$ も定義され、$D(G;A,D) = D(G^{+c};A,B)$, $\overline{d(G;A,D)} = d(G^{+c};A,B)$. $\overline{d(G;A,B)} = d(G^{+c};A,D)$.

Definition 3 (*bridge number*)**.** $G \in \varGamma^r$ の proper pair (A,B) に対して、$br(G:A,B) = \#(AD) = \#(CB)$ を $(G:A,B)$ の *bridge number* と呼び、$br(G) = \min\{br(G;A,B) |\, (A,B)$ は G の proper pair$\}$ と定める。

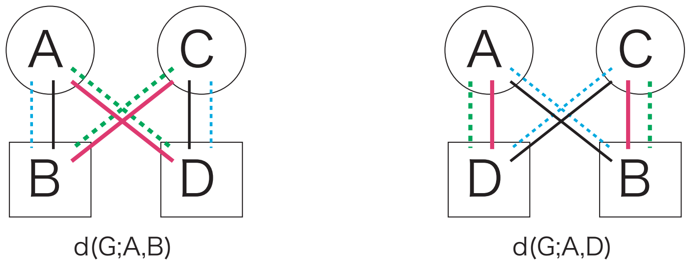


Figure 1. d(G;A,B) and d(G;A,D)

次はdefinition 2 から直ちに得られる。

Proposition 1. $D(G;A,B) \cup D(G^{+c};A,D) = K_{2r,2r}$

definition 3 とFigure 1 から次が導かれる。

Proposition 2. 任意の$G \in \varGamma^r$ に対して、$br(G) \leq \frac{r^2}{2}$.

$\overset{c}{\cong}$ を辺彩色を保存するグラフの同型の記号とすると、Definition 2 とTheorem 3[3] から次の定理を得る。

Theorem 1. $d(G;A,B) \overset{c}{\cong} \overline{d(G;A,B)}$ または $d(G;A,D) \overset{c}{\cong} \overline{d(G;A,D)}$ ならば G は *self complementary* である。

2. DUAL CROSS GRAPH の リスト

ページA-1 以降に dual cross graph をリストする。現在作業を進めているところなので、$d_{b,n}$ の代わりに $pd_{b,n}$ と表記している。b は bridge number を表わし、n はその bridge numver の第 n 番目を示す。また、図の下の (b,v) の b は bridge number ,v は頂点数を表す。(b,v)∗ の∗は $d(G;A,B) \overset{c}{\ncong} \overline{d(G;A,B)}$ を示す。

$\mathcal{D}^r = \{d(G;A,B)\,|G \in \varGamma^r,\ (A,B)$ は G の proper pair$\}$ とすると、$\mathcal{D}^r \subset \mathcal{D}^{r+1}$ であるが、r=4 すなわち 4-regular graph の表として頂点数は最大 16 としている。

ページ A-1 の $pd_{3,7}$ と $pd_{3,13}$ をそれぞれ dual cross graph として持つ $\varGamma^3$ の3-regular graph は同型である(Fig.3)[3]。しかし、$\varGamma^4$ の元としての

4-regular graph は同型でなく、また$d(G^4;A,B)\cong pd_{3,7}$なるG^4はself complementaryでない。

このように、dual cross graph 間の関係は、Γ^rのrによって異なる。

リストについての注意。

1. (ページA-1 U01) $1\leq br\leq 3$のすべてのdual cross graphを示す(disconnectedなものも含む)。

2. (ページA-2 $\sim$ A-4 (U02 $\sim$ U04)) $d(G;A,B)\overset{c}{\cong}\overline{d(G;A,B)}$でcut vertexを含むものは除外し、connectedなものに限ってのリスト。
A-4 のU04(300)は、proper pair を変えることによってbridge numberの下がるものである。

3. (ページA-5 U05(100)) $d(G;A,B)\overset{c}{\cong}\overline{d(G;A,B)}$でcut vertexを含むもののリスト。U04(300)とU05(100)はdual cross graphの変形を行うときに便利なのでリストしている。

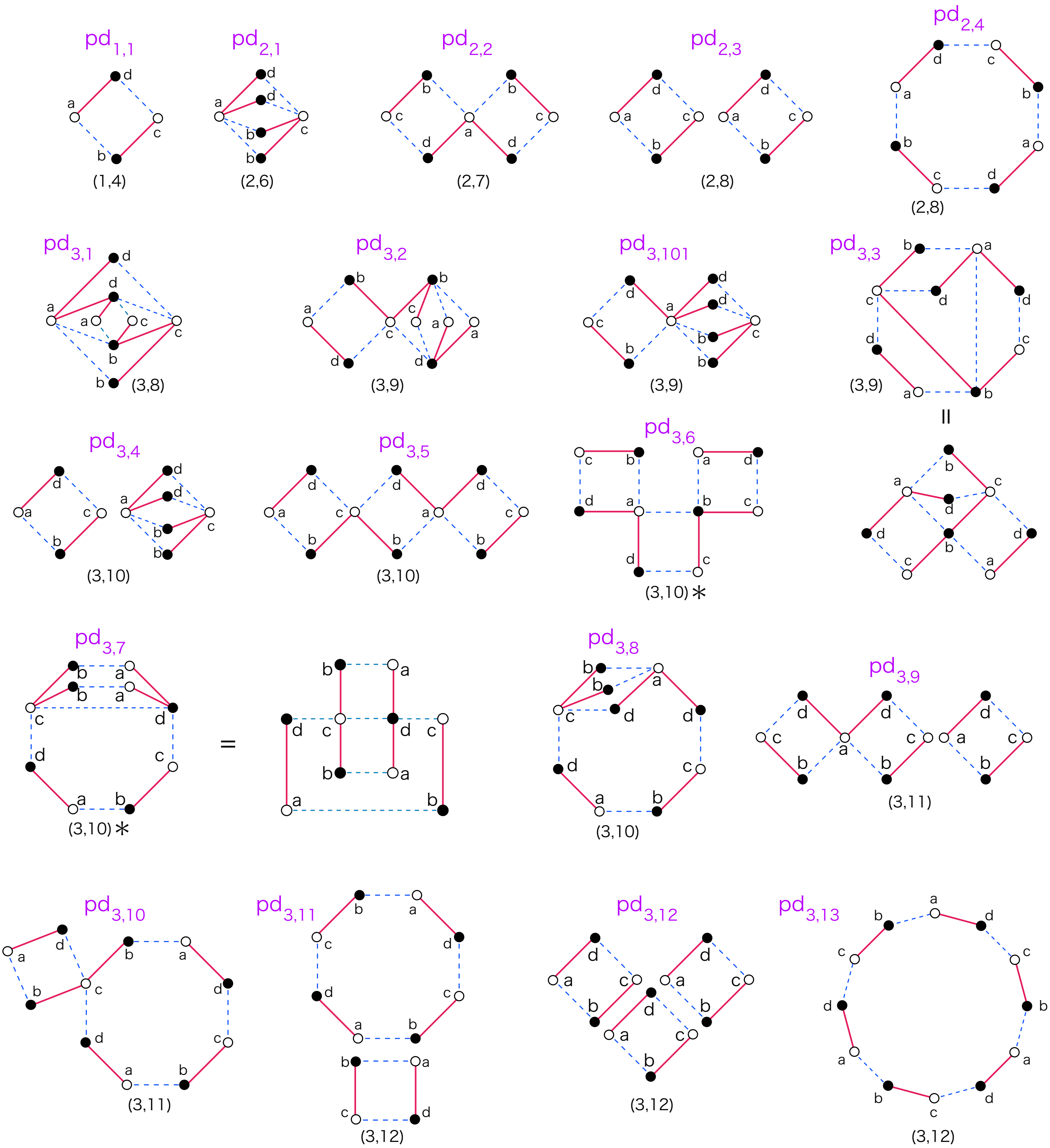
4. (ページA-6 U06($pd_{4,52}$)) $pd_{4,52}$を例として、proper pairを変えることによってdual cross grph,が変化する場合を示している。

References

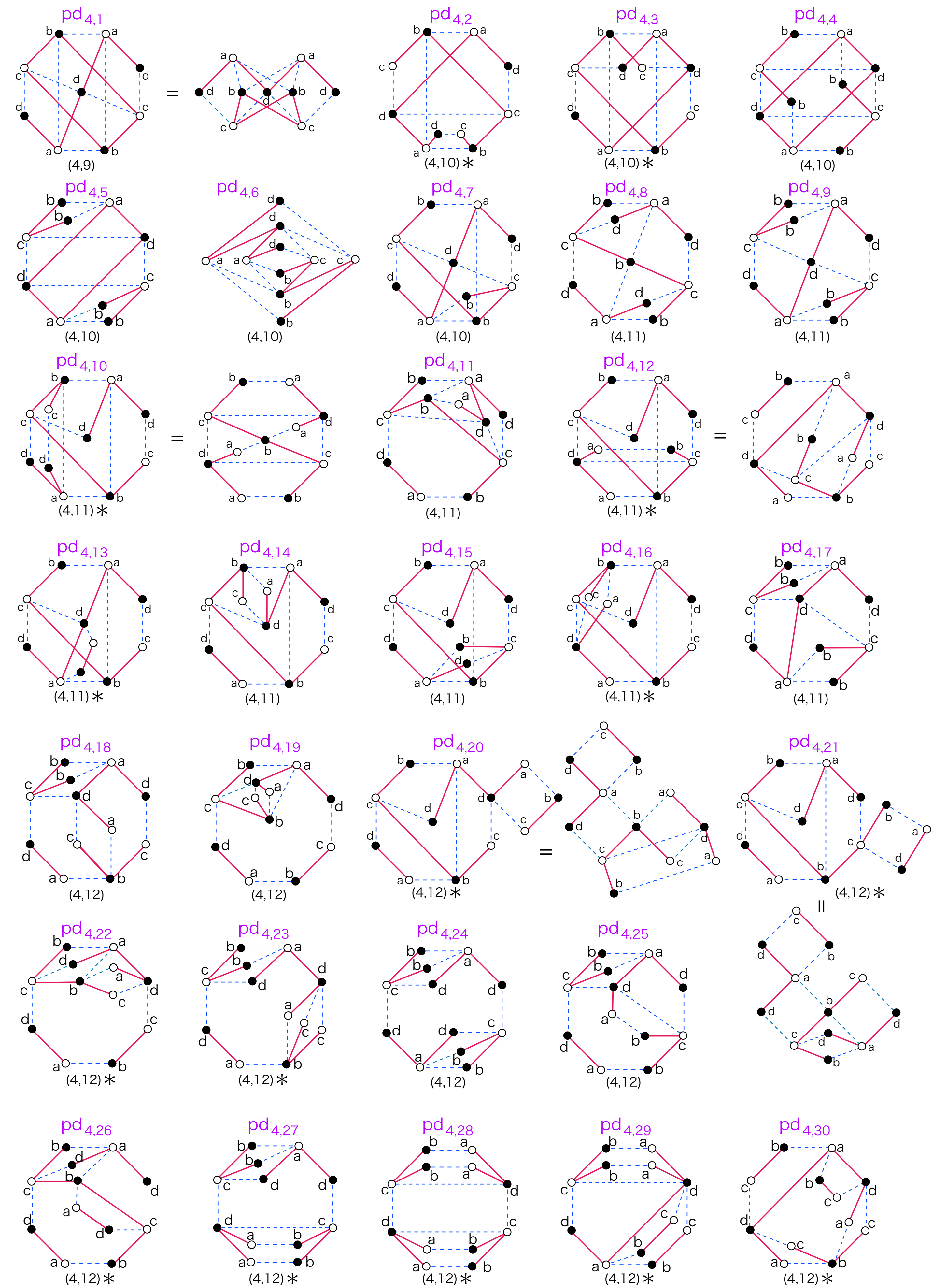
[1] Tsukui Y., Bipartite regular grph の補グラフについて, Hakone Seminar **28**, (2012), pp. 179–182.
[2] Tsukui Y., Bipartite self complementary graph について, Hakone Seminar **29**, (2013), pp. 75-79.
[3] Tsukui Y., Dual cross graph について, Hakone Seminar **30**, (2014), pp. 131-134.
[4] Tsukui Y., Corrections to "Dual cross graph について", Hakone Seminar **31**, (2015), p. 65.

Current address: 869-2 HigashiKoiso,Oiso,Kanagawa,255-0004,JAPAN
E-mail address: `yas@tsukui-gate.com`

pd U01-(br 3)

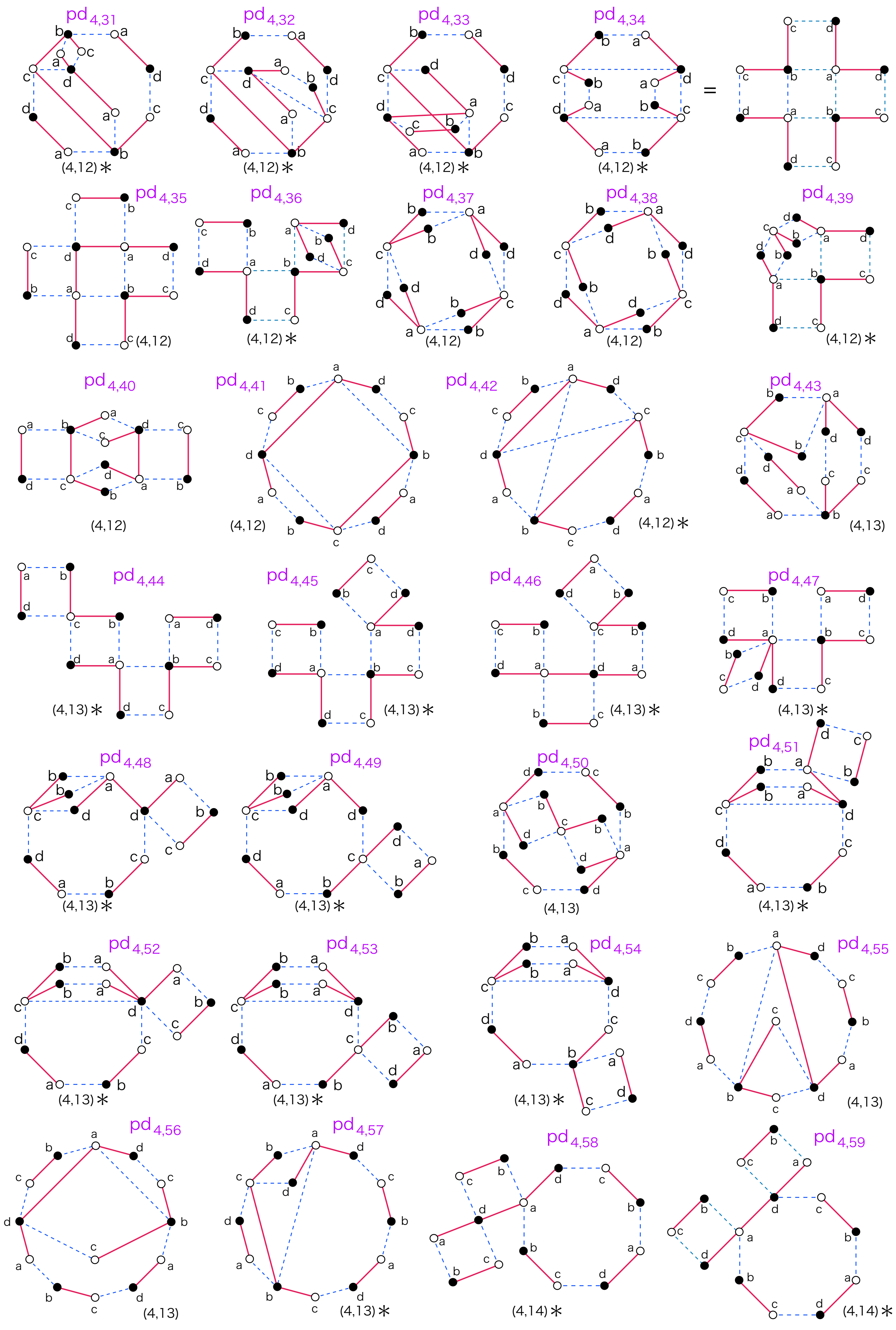

pd$_{1,1}$
(1,4)
pd$_{2,1}$
(2,6)
pd$_{2,2}$
(2,7)
pd$_{2,3}$
(2,8)
pd$_{2,4}$
(2,8)
pd$_{3,1}$
(3,8)
pd$_{3,2}$
(3,9)
pd$_{3,101}$
(3,9)
pd$_{3,3}$
(3,9)
pd$_{3,4}$
(3,10)
pd$_{3,5}$
(3,10)
pd$_{3,6}$
(3,10)＊
pd$_{3,7}$
(3,10)＊
=
pd$_{3,8}$
(3,10)
pd$_{3,9}$
(3,11)
pd$_{3,10}$
(3,11)
pd$_{3,11}$
(3,12)
pd$_{3,12}$
(3,12)
pd$_{3,13}$
(3,12)

pd U02 (br 4-1)



$pd_{4,1}$ (4,9)
$pd_{4,2}$ (4,10)*
$pd_{4,3}$ (4,10)*
$pd_{4,4}$ (4,10)
$pd_{4,5}$ (4,10)
$pd_{4,6}$ (4,10)
$pd_{4,7}$ (4,10)
$pd_{4,8}$ (4,11)
$pd_{4,9}$ (4,11)
$pd_{4,10}$ (4,11)*
$pd_{4,11}$ (4,11)
$pd_{4,12}$ (4,11)*
$pd_{4,13}$ (4,11)*
$pd_{4,14}$ (4,11)
$pd_{4,15}$ (4,11)
$pd_{4,16}$ (4,11)*
$pd_{4,17}$ (4,11)
$pd_{4,18}$ (4,12)
$pd_{4,19}$ (4,12)
$pd_{4,20}$ (4,12)*
$pd_{4,21}$ (4,12)*
$pd_{4,22}$ (4,12)*
$pd_{4,23}$ (4,12)*
$pd_{4,24}$ (4,12)
$pd_{4,25}$ (4,12)
$pd_{4,26}$ (4,12)*
$pd_{4,27}$ (4,12)*
$pd_{4,28}$ (4,12)*
$pd_{4,29}$ (4,12)*
$pd_{4,30}$ (4,12)*

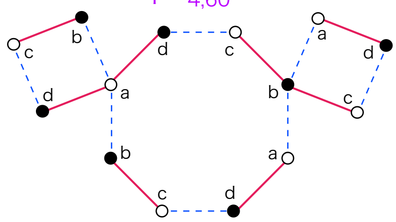
pd U03 (br4-2)



pd 4,31
(4,12)＊
pd 4,32
(4,12)＊
pd 4,33
(4,12)＊
pd 4,34
(4,12)＊
=
pd 4,35
(4,12)
pd 4,36
(4,12)＊
pd 4,37
(4,12)
pd 4,38
(4,12)
pd 4,39
(4,12)＊
pd 4,40
(4,12)
pd 4,41
(4,12)
pd 4,42
(4,12)＊
pd 4,43
(4,13)
pd 4,44
(4,13)＊
pd 4,45
(4,13)＊
pd 4,46
(4,13)＊
pd 4,47
(4,13)＊
pd 4,48
(4,13)＊
pd 4,49
(4,13)＊
pd 4,50
(4,13)
pd 4,51
(4,13)＊
pd 4,52
(4,13)＊
pd 4,53
(4,13)＊
pd 4,54
(4,13)＊
pd 4,55
(4,13)
pd 4,56
(4,13)
pd 4,57
(4,13)＊
pd 4,58
(4,14)＊
pd 4,59
(4,14)＊

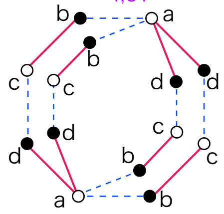
pd U04 (br4-3)

pd$_{4,60}$



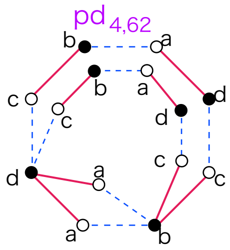
(4,14)∗

pd$_{4,61}$



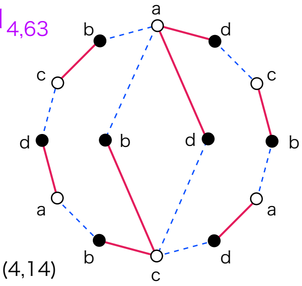
(4,14)

pd$_{4,62}$



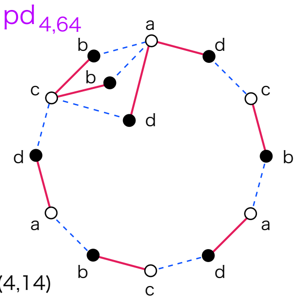
(4,14)

pd$_{4,63}$



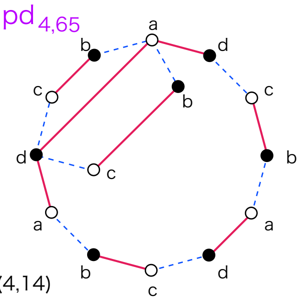
(4,14)

pd$_{4,64}$



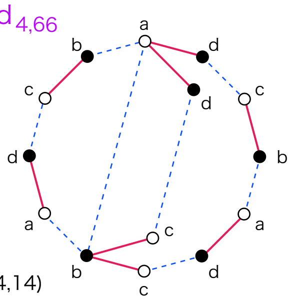
(4,14)

pd$_{4,65}$



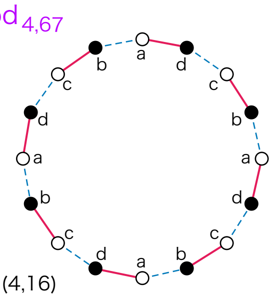
(4,14)

pd$_{4,66}$



(4,14)

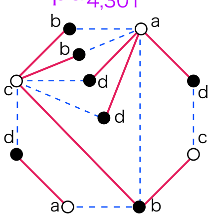
pd$_{4,67}$



(4,16)

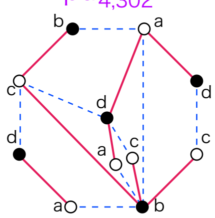
pd U04 (300)

pd$_{4,301}$



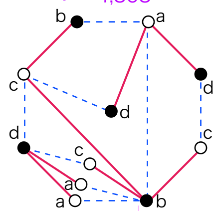
(4,11)

pd$_{4,302}$



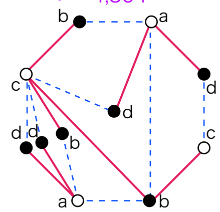
(4,11)

pd$_{4,303}$



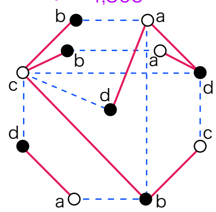
(4,11)∗

pd$_{4,304}$



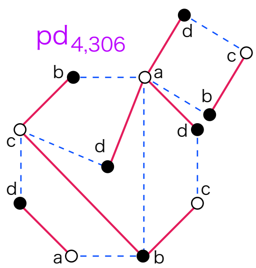
(4,11)∗

pd$_{4,305}$



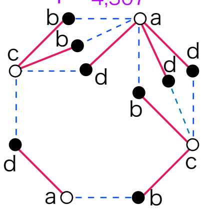
(4,11)∗

pd$_{4,306}$



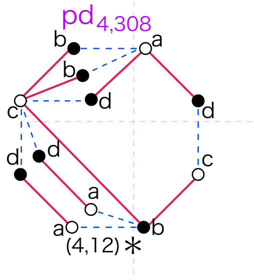
(4,12)∗

pd$_{4,307}$



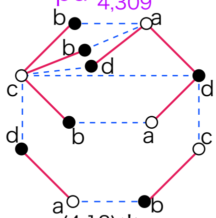
(4,12)

pd$_{4,308}$



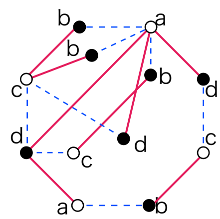
(4,12)∗

pd$_{4,309}$

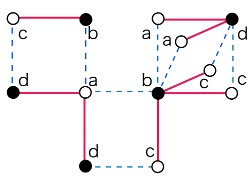


(4,12)∗

=

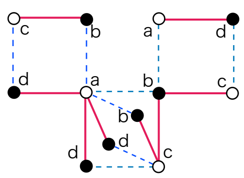


pd$_{4,310}$



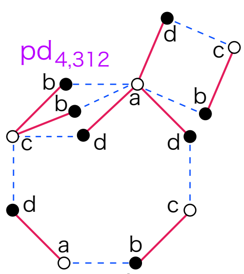
(4,12)∗

pd$_{4,311}$



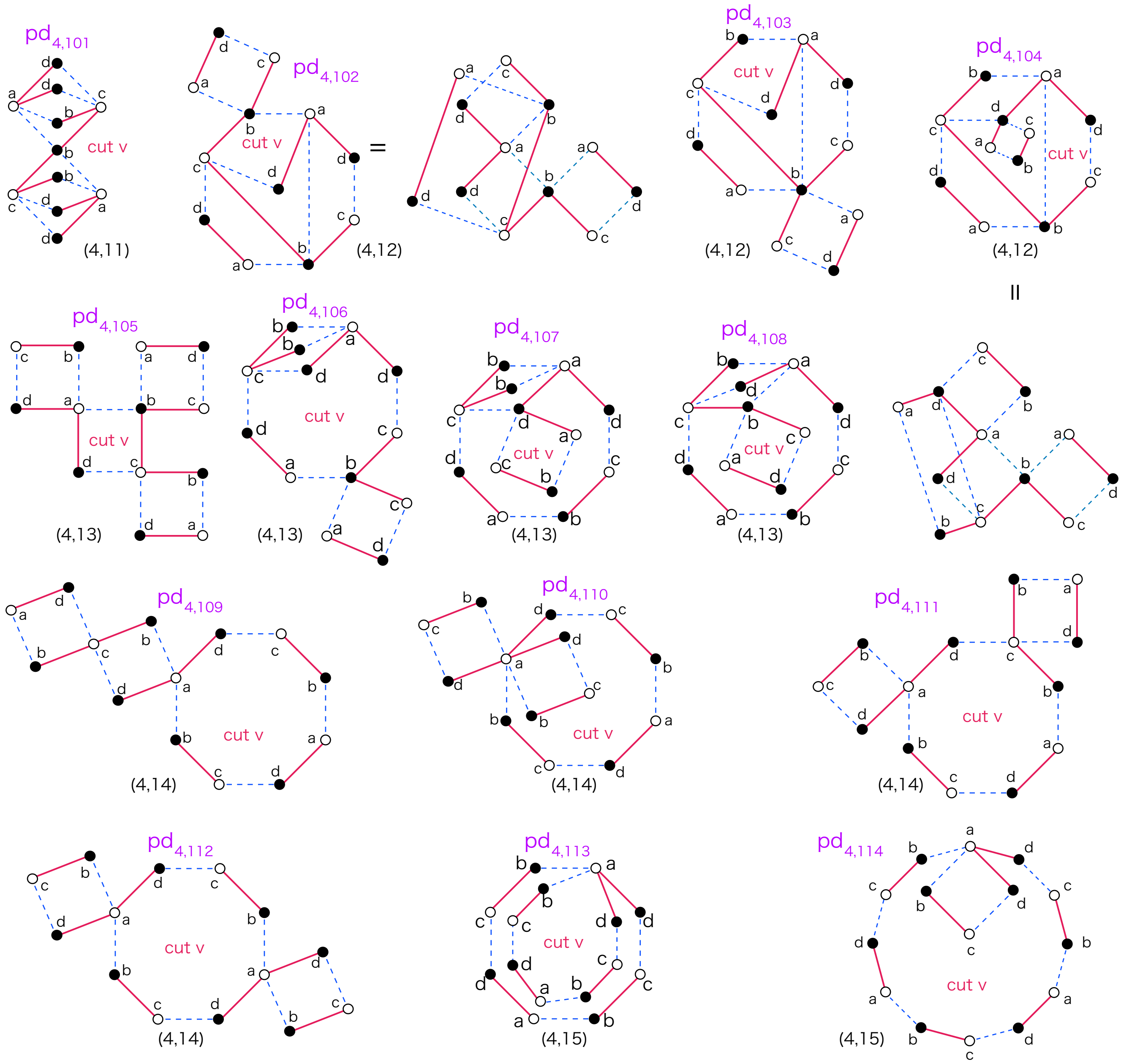
(4,12)∗

pd$_{4,312}$



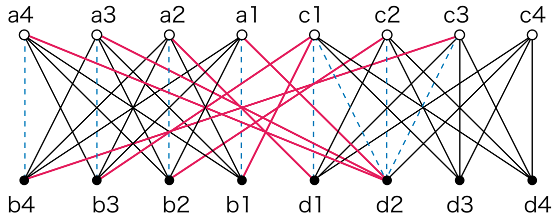
(4,13)∗

dc U05 (100)

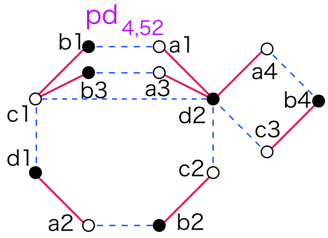


$pd_{4,101}$
cut v
(4,11)
$pd_{4,102}$
cut v
(4,12)
=
$pd_{4,103}$
cut v
(4,12)
$pd_{4,104}$
cut v
(4,12)
||
$pd_{4,105}$
cut v
(4,13)
$pd_{4,106}$
cut v
(4,13)
$pd_{4,107}$
cut v
(4,13)
$pd_{4,108}$
cut v
(4,13)
$pd_{4,109}$
cut v
(4,14)
$pd_{4,110}$
cut v
(4,14)
$pd_{4,111}$
cut v
(4,14)
$pd_{4,112}$
cut v
(4,14)
$pd_{4,113}$
cut v
(4,15)
$pd_{4,114}$
cut v
(4,15)

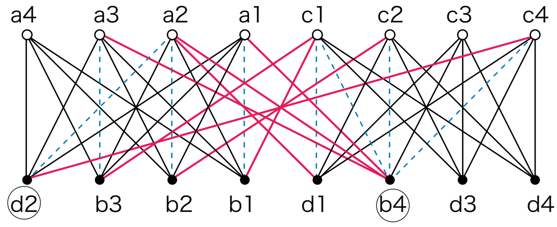
$pd_{4,52}$

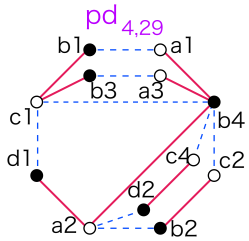


$Q_{4,52}$

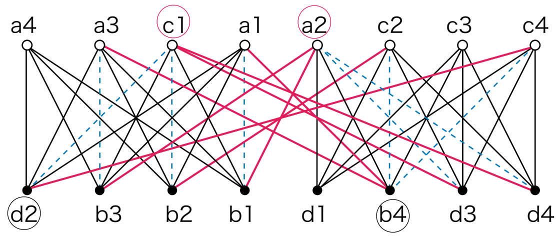


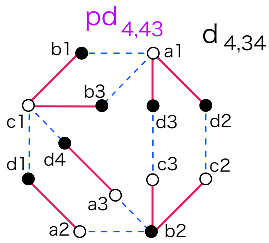
(4,13)＊



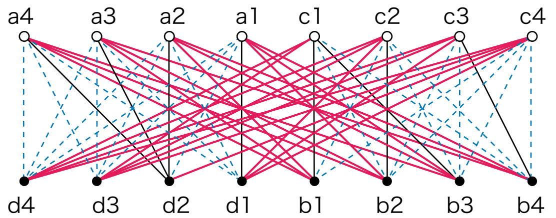


(4,12)＊

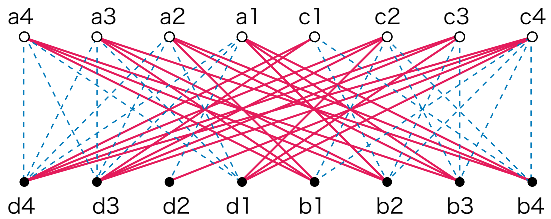




(4,13)



(Q4.52;A,D)



$pd_{4,52}$(Q4.52;A,D) (12,16)