DUAL CROSS GRAPH について

津久井　康之

1. DUAL CROSS GRAPH

Graph $G^r = (V^+ \cup V^-, E)$ が bipartite r-regular simple graph with 4r vetices で $\#V^+ = \#V^- = 2r$ とする。この性質を持つグラフの類を Γ^r と記す。G^r を $4r$頂点の完全２部グラフ $K_{2r,2r}$ の部分グラフと見たとき、$K_{2r,2r} - E$ を G^r の(正)補グラフ($+complement$)と呼び $G^{r^{+c}}$ と記す。$G^r \cong G^{r^{+c}}$ であるとき、G^r を r-regular bipartite self complementary graph と呼び、rbsc-graph と略記する。

[1] では、$r \leq 3$ のとき、任意の G^r は rbsc-graph であることを見て、r=4 では反例(河野の反例)の存在を確認した。[2] では rbsc-graph であるかどうかについてのいくつかの invariant を提示している。

この報告では、dual cross graph(dual cross core とも呼ぶ) を定義し、これを用いて「同型」と「rbsc-graph 問題」についての考察を進めることとする。また、用語・記号は[1] [2] に従う。

Definition 1. G を 上の graph とする。$X \in V^+,\ Y \in V^-$ のとき、
$(XY) = XY = (XY; G) = \{\langle x, y\rangle \in E(G) | x \in X, y \in Y\}$、
$(XY)^c = (XY; G^{+c}) = \{\langle x, y\rangle \notin E(G) | x \in X, y \in Y\}$ とし、
$\#X = \#Y = r$ のとき、(X, Y) を、proper pair と呼ぶ。
$\mathcal{M}p(G) = \max\limits_{X,Y}\{\#(XY) : (X, Y)$ は G の proper pair$\}$ と定める。
proper pair (A, B) が$\#(AB) = \mathcal{M}p(G)$のとき、maximal pair といい、$\#(AB) = r^2 - \mathcal{M}p(G)$のとき、minimal pair という。

Definition 2 (*dual cross graph*)**.** (A, B) を G の proper pair とする。
$A' = V^+ - A, B' = V^- - B$ とし、$E_c = E_c(G) = AB' \cup A'B, E_s = E_s(G) = AB \cup A'B'$ とする。E_c の元を G の *cross edge*, E_s の元を *straight edge* と呼ぶ。$E_c^c = E_c(G^{+c}) = (AB)^c \cup (A'B')^c, E_s^c = E_s(G^{+c}) = (AB')^c \cup (A'B)^c$ とする。E_c^c の元を G^{+c} の *cross edge*, E_s^c の元を G^{+c} の *straight edge* と呼ぶ。ここでは、(A, B') を G^{+c} の proper pair と考えている。

$E_c \cup E_c^c$ から誘導されるグラフを (A, B)に関するGの *dual cross graph* と定義する: $dc(G) = dc(G; A, B)$。 ここでは、$dc(G)$ を、E_c の元を「赤」、E_c^c の元を「青」とする２色辺彩色グラフとして定義する。

$dc(G)$ に対して、赤と青の色を交換したものを $\overline{dc(G)}$ と記す。

Figure 1 は河野の反例とその dual cross graph および正補グラフを示す。ここでは河野の反例[1][2]を描き変えて、$br = \ell = 3$ の図を示している。

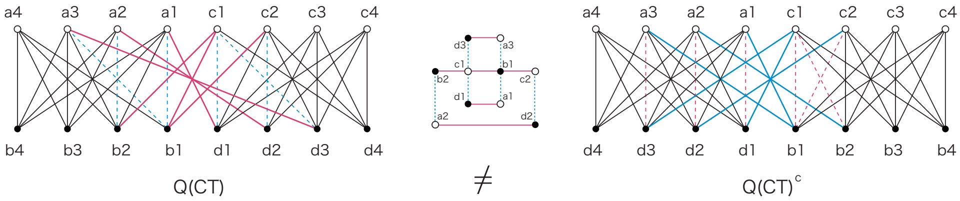

FIGURE 1. 河野の反例

Proposition 1. $dc(G^r; A, B) \cong dc(G^r; A', B')$

Proposition 2. $\overline{dc(G^r; A, B)} \cong dc(G^{r^{+c}}; A, B')$.

Definition 3 (bridge と level)**.** Gのmaximal pair (A, B)に対して$\#(AB')$をGの bridge number と言い、$br(G)$ と記す。

G^r が $K^1_{r,r} \cup K^2_{r,r}$ から最小 n 回の X^+-変換で得られるとき、n を G^r の level と呼び、$\ell(G^r)$ と書く。

Proposition 3. (1) $br(G^r) \leq \ell(G^r)$ (2) $\dfrac{r^2}{2} \leq \mathcal{M}p(G^r)$.

2. 河野の反例が 4BSC-GRAPH でないことの別証

Q(CT)において、頂点 v_k の *partnar* $v^p_k = \{v_k\}^p = (v^p_k; G)$ [1]、および $v^{pc}_k = (v^p_k; G^{+c})$ についてみると、$b^p_3 = b^p_4 = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $c^p_3 = c^p_4 = \{d_1, d_2, d_3, d_4\}$ 従って、$b^{pc}_3 = b^{pc}_4 = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}, c^{pc}_3 = c^{pc}_4 = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ であり、他にはこのような頂点は無い。$f : Q(CT) \to Q(CT)^{+c}$ を同型写像とすると、$f(\{b_3, b_4, c_3, c_4\}) = \{b_3, b_4, c_3, c_4\}$ である。$\#(\{b_3, b_4\}\{c_3, c_4\}; Q(CT)) = 0$、$\#(\{b_3, b_4\}\{c_3, c_4\}; Q(CT)^{+c}) = 4$ なので f は同型写像にはなれない。

この議論はFigure 1の$dc(Q(CT))$をdual cross graphとして持つbipartite r-regular simple graph with 4r vertices $(4 < r)$ についても同様なので；

Theorem 1. 任意の r に対して、$r$bsc-graph でない bipartite r-regular simple graph with 4r vertices が存在する $(3 < r)$。

予想 1. あるグラフ G^r について $\overline{dc(G^r)} \ncong dc(G^{r^{+c}})$ ならば、この $dc(G^r)$ を dual cross grah として持つ Rbsc-graph でないグラフ G^R が存在する $r \leq R$。

3. DUAL CROSS GRAPH とグラフの同型

$dc(G^r)$ から G^r は再構成可能なので次の定理を得る。

Theorem 2.

$$(G^r_1; A_1, B_1) \cong (G^r_2; A_2, B_2) \Longleftrightarrow dc(G^r_1; A_1, B_1) \cong dc(G^r_2; A_2, B_2).$$

これから直ちに；

Theorem 3. $(G^r;A,B)\cong(G^{r^{+c}};A,B')\Longleftrightarrow\overline{dc(G^r;A,B)}\cong dc(G^r;A,B)$.

この定理は一見、rbsc-graph についての「必要十分条件」のように見えるが、(A,B) に依存している。(A,B) を maximal paire に限っても次のような例がある。

Example 1. graph CT (figure 2) は $\overline{dc(CT;A,B)}\ncong dc(CT;A,B)$ であるが、3bsc-graph である。さらに CT を描き変えた C_6 (figure 3) は $\overline{dc(C_6)}\cong dc(C_6)$ で $CT\cong C_6$ である。

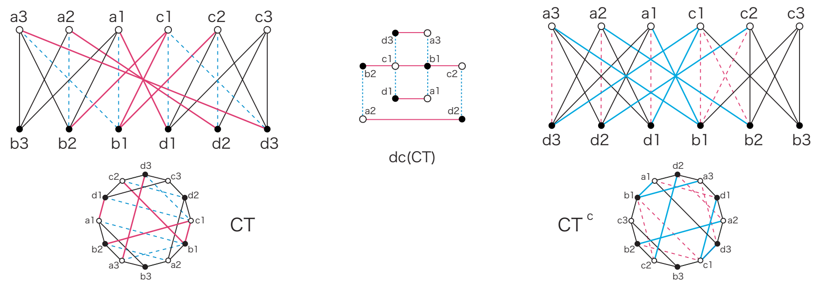

Figure 2. CT, dc(GT) および CT^{+c}

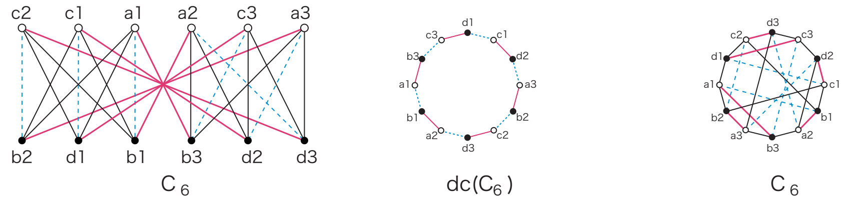

Figure 3. C_6 と $dc(\mathrm{C}_6)$

4. $\mathit{\Gamma}^r$ と X^+-変換

Definition 4. ［X^+-変換］ $G=(V^+\cup V^-,E)\in\mathit{\Gamma}^r$ とする。$u_1,u_2\in V^+,\ v_1,v_2\in V^-,e_i=\langle u_i,v_i\rangle\in E(i=1,2)$で、$u_1\not\sim v_2,u_2\not\sim v_1$,のとき、

$$G/(e_1,e_2)=X^+(G;e_1,e_2)=G-\{e_1,e_2\}+\{\langle u_1,v_2\rangle,\langle u_2,v_1\rangle\}$$

を G から (e_1,e_2) のX^+-変換(X^+-変形)で得られるグラフと云う。

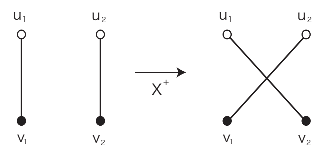

Figure 4. X^+-変換

このとき、(e_1,e_2) をX^+-変換可能な対という。X^+-変換可能な対を持つグラフをX^+-変換可能なグラフと呼ぶ。GがX^+-変換可能ならば、G^{+c}もX^+-変換可能である。

$r \leq 3$については、$\mathit{\Gamma}^r$の任意の２元は有限回のX^+-変換で移り合うことが確かめられている。

Theorem 4. $\mathit{\Gamma}^r$の任意の２元は有限回のX^+-変換で移り合う$(4 \leq r)$。

(Proof) $\Gamma^r \ni G^r$k dual cross graph $dc(G^r)$内の赤と青の辺が交互に連なるsimple cycleを「２色サイクル」と呼ぶ。長さは$4k$である$(1 \leq k)$。G^rのmaximal pair (A,B)に対するdc(G^r)では#(A,B')=br(G^r)である。$dc(G^r)$に、Figure 5の左上のような、長さ４の２色サイクルがあれば、そこでX$^+$-変換をして得られるグラフ$\mathrm{G}^{r'} = G^r/(\langle c_1, b_1\rangle, \langle a_1, d_1\rangle)$について、$dc(G^{r'})$ではその長さ４の２色サイクルは消え$br(G^{r'}) = br(G^r) - 1$を得る。dc(G^r)の２色サイクルの最小の長さが4k(2$\leq$ k)ならば、Figure 5の右上の様に、$c_1 \not\sim b_3, c_3 \not\sim b_1$の二辺 $\langle c_1, b_1\rangle, \langle c_3, b_3\rangle$があるから、ここでX$^+$-変換を行うと、$\mathrm{G}^{r'} = G^r/(\langle c_1, b_1\rangle, \langle c_3, b_3\rangle)$について$dc(G^{r'})$は右下の図になる。$br(G^{r'}) = br(G^r)$であるが、より短い２色サイクルを得る。この$X^+$-変換を繰り返せば、有限回で$K^1_{r,r} \cup K^2_{r,r}$に到達するから、定理は証明される。

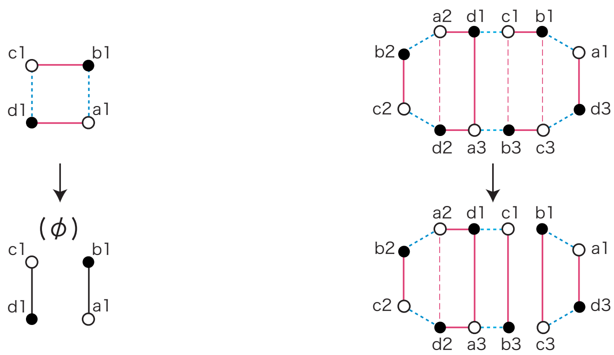

FIGURE 5. dc(G^r) と X$^+$(G^r)

References

[1] Tsukui Y., *Bipartite regular graph*の補グラフについて, Hakone Seminar **28**, (2012), pp. 179-182.

[2] Tsukui Y., *Bipartite self complementary graph*について, Hakone Seminar **29**, (2013), pp. 75-79.

Current address: 869-2 HigashiKoiso,Oiso,Kanagawa,255-0004,JAPAN
E-mail address: `yas@tsukui-gate.com`