

BIPARTITE SELF COMPLEMENTARY GRAPH について

津久井 康之

1. BIPARTITE SELF COMPLEMENTARY GRAPH

$G = (V, E)$ が simple graph で $\#V = n$ とする。 G が n 頂点の完全グラフ K_n の部分グラフとしたとき、 $K_n - E$ を G の補グラフ (*complement*) と呼び G^c と記す。

Definition 1. $G \cong G^c$ であるとき、 G を self complementary graph と呼び、 sc-graph と略記する。 n にはいろいろ条件がつく [1]。

$G = (V^+ \cup V^-, E)$ を r -regular bipartite simple graph, $\#V^+ = \#V^- = 2r$, $(V^+ \cap V^- = \phi)$ とする。 G が $4r$ 頂点の完全 2 部グラフ $K_{2r, 2r}$ の部分グラフとしたとき、 $K_{2r, 2r} - E$ を G の正補グラフ (*+complement*) と呼び G^{+c} と記す。

Definition 2. $G \cong G^{+c}$ であるとき、 G を r -regular bipartite self complementary graph と呼び、 rbsc-graph と略記する。

Theorem 1. $1 \leq r \leq 3$ のとき、 任意の $4r$ 頂点の r -regular bipartite simple graph は rbsc-graph である。

Theorem 2 (河野の反例). 4bsc-graph でない 16 頂点の 4-regular bipartite simple graph が存在する。

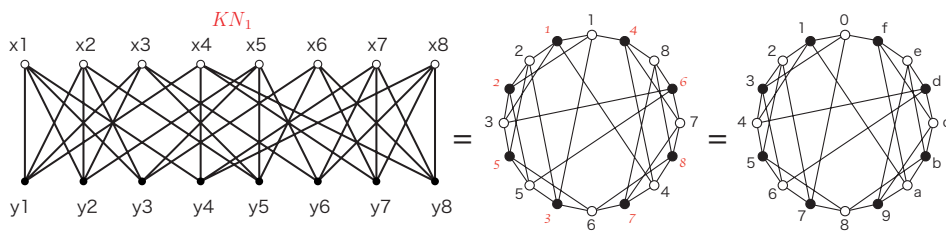


FIGURE 1. 河野の反例

この報告では、 4bsc-graph であるものと 4bsc-graph でない 4-regular bipartite graph の例をいくつか上げ、 同型でないと判定する invariants を紹介する。 以下特に断らない限りグラフはすべて $4r$ 頂点の simple bipartite とする。

また、用語・記号は「Bipartite regular graph の補グラフにつて」 [3] に従う。

2. 4bsc – graph

Definition 3. [X^+ -変形] $G = (V^+ \cup V^-, E)$ を simple bipartite graph とする。 $u_1, u_2 \in V^+, v_1, v_2 \in V^-, e_i = \langle u_i, v_i \rangle \in E (i = 1, 2)$ で、 $u_1 \not\sim v_2, u_2 \not\sim v_1$ のとき、

$$X^+(G; e_1, e_2) = G - \{e_1, e_2\} + \{\langle u_1, v_2 \rangle, \langle u_2, v_1 \rangle\}$$

を G から (e_1, e_2) の X^+ -変形 (X^+ -変換) で得られるグラフと云う。このとき、 (e_1, e_2) を X^+ -変形可能な対という。 X^+ -変形可能な対を持つグラフを X^+ -変形可能なグラフと呼ぶ。 G が X^+ -変形可能ならば G^{+c} も X^+ -変形可能である。

Example 1. Figure 2 の K_3, K_4, K_5, K_6 は河野の反例 KN_1 から 1 回の X^+ 変形で得られるもので、 K_7, K_8 は K_3 から 1 回の X^+ 変形で得られたものであり、すべて 4bsc-graph である。

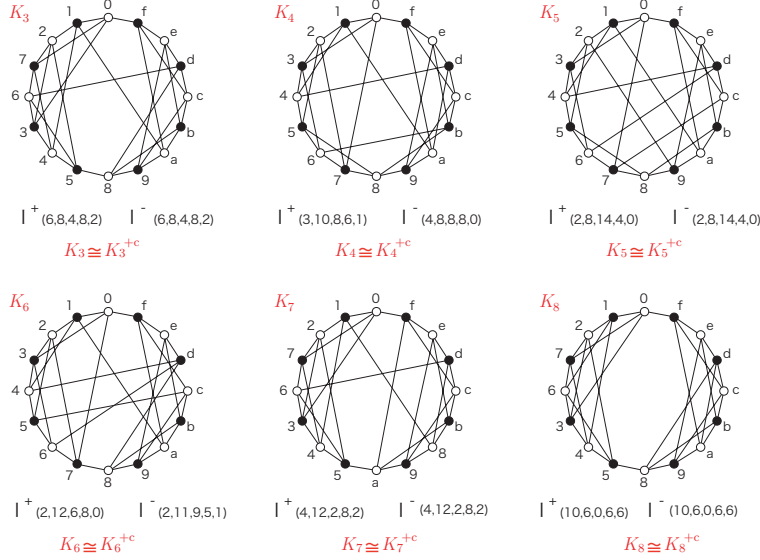


FIGURE 2. 河野の反例から誘導される 4bsc-graph

Definition 4. $G = (V^+ \cup V^-, E)$ を r -regular bipartite simple graph とし、 $V^+ = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, V^- = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ とする。

$x \in V^+$ に対して、 $x^p = \{y \in V^- : \langle x, y \rangle \in E\}$ を x の partner とよぶ。

$$I_k^+(G) = \#\{(i, j) : \#(x_i^p \cap x_j^p) = k, i < j\}, 0 \leq k \leq r.$$

$I^+(G) = (I_0, I_1, \dots, I_r)$ は graph の同型 invariant である。さらに、

$$I_{k,i}^+(G) = \#\{(i, j) : \#(x_i^p \cap x_j^p) = k, j \neq i\}, 0 \leq k \leq r, 1 \leq i \leq n.$$

$$I_k^+[c] = I_k^+(G^{+c}) = \#\{(i, j) : \#(x_i^p \cap x_j^p) = k, j < i\}, 0 \leq k \leq r.$$

$I^+[c] = I^+(G^{+c}) = (I_0, I_1, \dots, I_r), I_{k,i}^+[c] = I_{k,i}^+(G^{+c})$ と記す。

$y \in V^-$ に対して $y^p = \{x \in V^+ : \langle x, y \rangle \in E\}$ を y の partner とよび、

$I_k^-(G), I^-(G), I_{k,i}^-(G), I_k^-[c], I^-[c], I_{k,i}^-[c]$ も同様に定義される。

$\#(x_i^p \cap x_j^p \cap x_k^p)$ を元として、 $I_k^{3+}(G), I^{3+}(G), I_{k,i}^{3+}$ も定義される。同様に、 $I^{m\pm}$ は $m \leq r$ まで定義される。

Figure 2 の各グラフの下に示されているのは上の定義の I^+ と I^- である。

Example 2. Figure 3は比較的対称性の高いと思われるグラフで、名称は[2]による。この4つのグラフも *4bsd-graph*である。 $Q_0(16, 3+9)$ と $Q_0(16, 3+7)$ はこの invariant だけでは同型でないとは判断できない(Example 5 参照)。

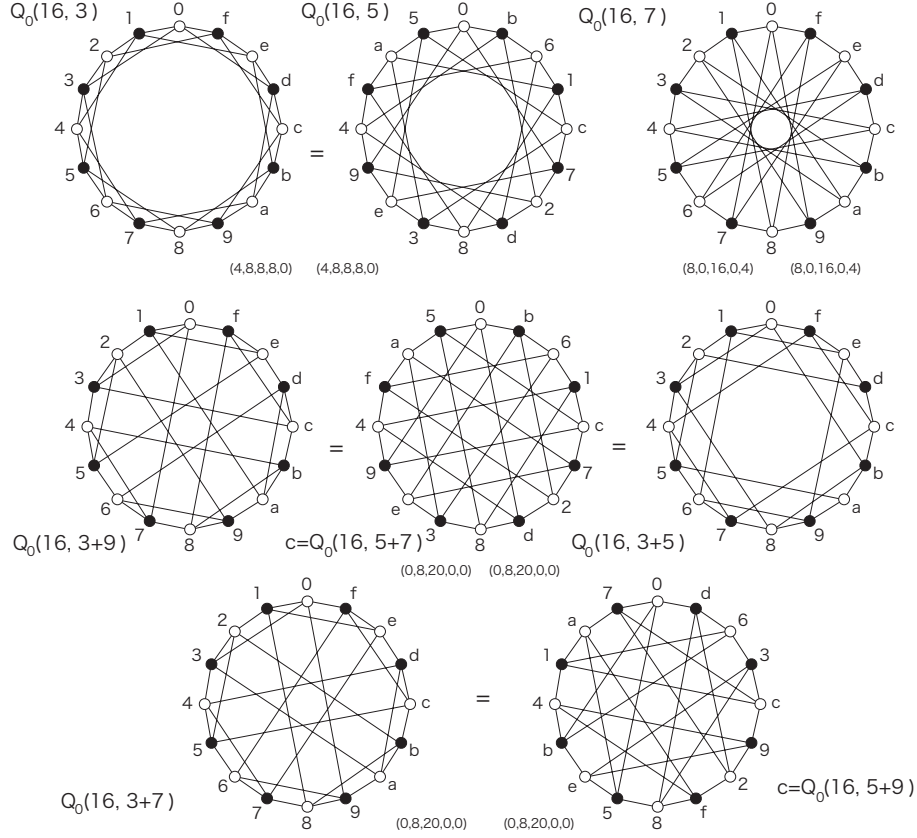


FIGURE 3. 対称性の高い *4bsd-graphs*

3. *4bsd-graph* でない graph

Definition 5. $e \in E$ に対して、 e を含む長さ 4 の cycle の個数を $c_4(e)$ と書き、長さ 4 の cycle $C = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ に対して $t(C) = (c_4(e_1) + c_4(e_2) + c_4(e_3) + c_4(e_4))$ を C の *type* と呼び、 $\#t(C) = c_4(e_1) + c_4(e_2) + c_4(e_3) + c_4(e_4)$ とする。また、 $t_k(G) = \#\{e \in E : c_4(e) = k\}, 0 \leq k \leq (r-1)^2$ とし、 $T(G) = (t_0, t_1, \dots, t_{(r-1)^2})$ も同型の invariant である。

$f : G \rightarrow H$ がグラフの同型写像なら、 $c_4(f(e)) = c_4(e), t(f(C)) = t(C)$ である。

Example 3 (河野の反例). KN_1 については、 $I^+(KN_1) = I^-(KN_1) = I^+[c] = I^-[c] = (3, 10, 8, 6, 1)$ となるが、 $I^{3+}(KN_1) = (33, 15, 7, 1, 0)$ 、 $I^{3-}[c] = I^{3-}[c] = (32, 18, 4, 2, 0)$ により、 KN_1 が *4bsd-graph* でないことが分かる(Figure 4)。また、 $T(KN_1) \neq T(KN_1^{+c})$ でもある。

$$\begin{array}{lll}
x_1^p = \{y_1, y_2, y_3, y_4\} & x_1^p[c] = \{y_5, y_6, y_7, y_8\} & y_1^p = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} & y_1^p[c] = \{x_5, x_6, x_7, x_8\} \\
x_2^p = \{y_1, y_2, y_3, y_5\} & x_2^p[c] = \{y_4, y_6, y_7, y_8\} & y_2^p = \{x_1, x_2, x_3, x_5\} & y_2^p[c] = \{x_4, x_6, x_7, x_8\} \\
x_3^p = \{y_1, y_2, y_5, y_6\} & x_3^p[c] = \{y_3, y_4, y_7, y_8\} & y_3^p = \{x_1, x_2, x_5, x_6\} & y_3^p[c] = \{x_3, x_4, x_7, x_8\} \\
x_4^p = \{y_1, y_4, y_7, y_8\} & x_4^p[c] = \{y_2, y_3, y_5, y_6\} & y_4^p = \{x_1, x_4, x_7, x_8\} & y_4^p[c] = \{x_2, x_3, x_5, x_6\} \\
x_5^p = \{y_2, y_3, y_5, y_6\} & x_5^p[c] = \{y_1, y_4, y_7, y_8\} & y_5^p = \{x_2, x_3, x_5, x_6\} & y_5^p[c] = \{x_1, x_4, x_7, x_8\} \\
x_6^p = \{y_3, y_5, y_7, y_8\} & x_6^p[c] = \{y_1, y_2, y_4, y_6\} & y_6^p = \{x_3, x_5, x_7, x_8\} & y_6^p[c] = \{x_1, x_2, x_4, x_6\} \\
x_7^p = \{y_4, y_6, y_7, y_8\} & x_7^p[c] = \{y_1, y_2, y_3, y_5\} & y_7^p = \{x_4, x_6, x_7, x_8\} & y_7^p[c] = \{x_1, x_2, x_3, x_5\} \\
x_8^p = \{y_4, y_6, y_7, y_8\} & x_8^p[c] = \{y_1, y_2, y_3, y_5\} & y_8^p = \{x_4, x_6, x_7, x_8\} & y_8^p[c] = \{x_1, x_2, x_3, x_5\}
\end{array}$$

$$x_7^p = x_8^p, x_7^p[c] = x_8^p[c]$$

$$y_7^p = y_8^p, y_7^p[c] = y_8^p[c]$$

| | | | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i \ j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 3 | 3 | 1 | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 2 | 1 | 1 | 0 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| 5 | 2 | 3 | 3 | 0 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 7 | 1 | 0 | 1 | 3 | 1 | 2 | 4 | 4 |
| 8 | 1 | 0 | 1 | 3 | 1 | 2 | 4 | 4 |

#(x_i^p \cap x_j^p)
(3,10,8,6,1)
: I^+

| | | | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| i \ j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 3 | 3 | 1 | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 2 | 3 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 2 | 1 | 1 | 0 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| 5 | 2 | 3 | 3 | 0 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 7 | 1 | 0 | 1 | 3 | 1 | 2 | 4 | 4 |
| 8 | 1 | 0 | 1 | 3 | 1 | 2 | 4 | 4 |

#(y_i^p \cap y_j^p)
(3,10,8,6,1)
: I^-

| | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|
| x_i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 0 | 3 | 3 | 1 | 0 |
| 2 | 2 | 1 | 1 | 3 | 0 |
| 3 | 0 | 4 | 1 | 2 | 0 |
| 4 | 1 | 2 | 2 | 2 | 0 |
| 5 | 1 | 2 | 2 | 2 | 0 |
| 6 | 0 | 2 | 5 | 0 | 0 |
| 7 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 |
| 8 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 |

I_i^+

| | | | | | |
|-----|---|---|---|---|---|
| y_i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 0 | 3 | 3 | 1 | 0 |
| 2 | 2 | 1 | 1 | 3 | 0 |
| 3 | 0 | 4 | 1 | 2 | 0 |
| 4 | 1 | 2 | 2 | 2 | 0 |
| 5 | 1 | 2 | 2 | 2 | 0 |
| 6 | 0 | 2 | 5 | 0 | 0 |
| 7 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 |
| 8 | 1 | 3 | 1 | 1 | 1 |

I_i^-

| x | x_i^p \cap x_j^p | #(x_i^p \cap x_j^p \cap x_k^p) |
|-------|------------------|--------------------------------|
| (i,j) | k: 3 4 5 6 7 8 | k: 3 4 5 6 7 8 |
| (1,2) | {y1,y2,y3} | 2 1 2 1 0 0 |
| (1,3) | {y1,y2} | 1 1 0 0 0 0 |
| (1,4) | {y1,y4} | 0 0 1 1 1 1 |
| (1,5) | {y2,y3} | 1 0 0 0 0 0 |
| (1,6) | {y3} | 0 0 0 0 0 0 |
| (1,7) | {y4} | 1 0 0 0 0 0 |
| (2,3) | {y1,y2,y5} | 1 2 1 0 0 0 |
| (2,4) | {y1} | 0 0 0 0 0 0 |
| (2,5) | {y2,y3,y5} | 2 0 0 0 0 0 |
| (2,6) | {y3,y5} | 0 0 0 0 0 0 |
| (2,7) | \emptyset | 0 0 0 0 0 0 |
| (3,4) | {y1} | 0 0 0 0 0 0 |
| (3,5) | {y2,y5,y6} | 1 1 1 0 0 0 |
| (3,6) | {y5} | 0 0 0 0 0 0 |
| (3,7) | {y6} | 1 0 0 0 0 0 |
| (4,5) | \emptyset | 0 0 0 0 0 0 |
| (4,6) | {y7,y8} | 2 2 0 0 0 0 |
| (4,7) | {y4,y7,y8} | 3 0 0 0 0 0 |
| (5,6) | {y3,y5} | 0 0 0 0 0 0 |
| (5,7) | {y6} | 1 0 0 0 0 0 |
| (6,7) | {y7,y8} | 2 0 0 0 0 0 |

I^{3+}: (33,15,7,1,0)

| x^c | x_i^p \cap x_j^p[c] | #(x_i^p[c] \cap x_j^p[c] \cap x_k^p[c]) |
|-------|---------------------|---|
| (i,j) | k: 3 4 5 6 7 8 | k: 3 4 5 6 7 8 |
| (1,2) | {y6,y7,y8} | 2 1 2 1 0 0 |
| (1,3) | {y7,y8} | 0 2 0 0 0 0 |
| (1,4) | {y5,y6} | 0 1 1 1 1 1 |
| (1,5) | {y7,y8} | 0 0 0 0 0 0 |
| (1,6) | {y6} | 0 0 0 0 0 0 |
| (1,7) | {y5} | 1 0 0 0 0 0 |
| (2,3) | {y4,y7,y8} | 0 3 1 0 0 0 |
| (2,4) | {y6} | 0 1 0 0 0 0 |
| (2,5) | {y4,y7,y8} | 1 0 0 0 0 0 |
| (2,6) | {y4,y6} | 0 0 0 0 0 0 |
| (2,7) | \emptyset | 0 0 0 0 0 0 |
| (3,4) | {y3} | 0 0 1 1 1 1 |
| (3,5) | {y4,y7,y8} | 1 0 0 0 0 0 |
| (3,6) | {y4} | 0 0 0 0 0 0 |
| (3,7) | {y3} | 1 0 0 0 0 0 |
| (4,5) | \emptyset | 0 0 0 0 0 0 |
| (4,6) | {y2,y6} | 1 1 0 0 0 0 |
| (4,7) | {y2,y3,y5} | 3 0 0 0 0 0 |
| (5,6) | {y1,y4} | 1 1 0 0 0 0 |
| (5,7) | {y1} | 1 0 0 0 0 0 |
| (6,7) | {y1,y2} | 2 0 0 0 0 0 |

I^{3+}[c]: (32,18,4,2,0)

| Y^c | y_i^p[c] \cap y_j^p[c] | #(y_i^p[c] \cap y_j^p[c] \cap y_k^p[c]) |
|-------|------------------------|---|
| (i,j) | k: 3 4 5 6 7 8 | k: 3 4 5 6 7 8 |
| (1,2) | {x6,x7,x8} | 2 1 2 1 0 0 |
| (1,3) | {x7,x8} | 0 2 0 0 0 0 |
| (1,4) | {x5,x6} | 0 1 1 1 1 1 |
| (1,5) | {x7,x8} | 0 0 0 0 0 0 |
| (1,6) | {x6} | 0 0 0 0 0 0 |
| (1,7) | {x5} | 1 0 0 0 0 0 |
| (2,3) | {x4,x7,x8} | 0 3 1 0 0 0 |
| (2,4) | {x6} | 0 1 0 0 0 0 |
| (2,5) | {x4,x7,x8} | 1 0 0 0 0 0 |
| (2,6) | {x4,x6} | 0 0 0 0 0 0 |
| (2,7) | \emptyset | 0 0 0 0 0 0 |
| (3,4) | {x3} | 0 0 1 1 1 1 |
| (3,5) | {x4,x7,x8} | 1 0 0 0 0 0 |
| (3,6) | {x4} | 0 0 0 0 0 0 |
| (3,7) | {x3} | 1 0 0 0 0 0 |
| (4,5) | \emptyset | 0 0 0 0 0 0 |
| (4,6) | {x2,x6} | 1 1 0 0 0 0 |
| (4,7) | {x2,x3,x5} | 3 0 0 0 0 0 |
| (5,6) | {x1,x4} | 1 1 0 0 0 0 |
| (5,7) | {x1} | 1 0 0 0 0 0 |
| (6,7) | {x1,x2} | 2 0 0 0 0 0 |

I^3[c]: (32,18,4,2,0)

FIGURE 4. KN_1 の invariant の計算

Example 4. KN_2 も KN_1 から 1 回の X^+ -変形で得られる。ここでは、 $T(KN_2) \neq T(KN_2^{+c})$ によって、 $KN_2 \not\cong KN_2^{+c}$ を示している (Figure 5)。

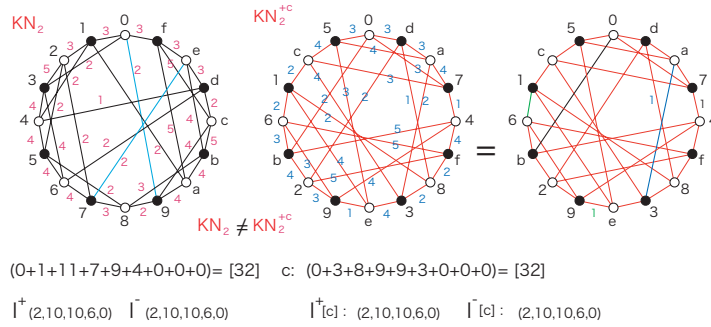


FIGURE 5. $KN_2 \not\cong KN_2^{+c}$

4. $Q_0(16, 3 + 9) \not\cong Q_0(16, 3 + 7)$ の判定

Example 5. $Q_0(16, 3 + 9)$ と $Q_0(16, 3 + 7)$ は、 $I^\pm(Q_0(16, 3 + 9)) = I^\pm(Q_0(16, 3 + 7))$, $T(Q_0(16, 3 + 9)) = T(Q_0(16, 3 + 7))$ であり、これらの invariant では非同型の判定は出来ない。Figure 6 (上)で各辺 e に与えられた数は $c_4(e)$ である。いま、 $g : Q_0(16, 3 + 9) \rightarrow Q_0(16, 3 + 7)$ という同型写像が存在したとする。グラフの対称性と $c_4(e)$ の値から、 $g(0)=0, g(f)=1, g(\langle 0, f \rangle) = \langle 0, 1 \rangle$ と仮定してよい。Figure 6 (下) で、 $\langle 0, f \rangle$ と $\langle 0, 1 \rangle$ を通る長さ 4 の cycles を示しているが、 $\#t$ の値は、 $(9, 9, 10)$ (in $Q_0(16, 3 + 9)$) と $(10, 10, 10)$ (in $Q_0(16, 3 + 7)$) なので g は同型写像ではないから、 $Q_0(16, 3 + 9)$ と $Q_0(16, 3 + 7)$ は同型ではない。

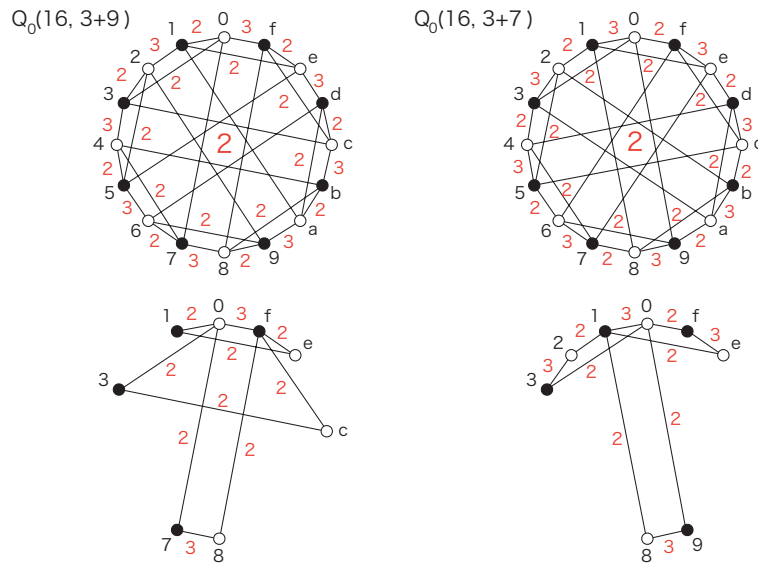


FIGURE 6. $Q_0(16, 3 + 9) \not\cong Q_0(16, 3 + 7)$

K_8 は $K_{4,4}^1 \cup K_{4,4}^2$ から 1 回の X^+ -変形で得られ、 K_3 は $K_{4,4}^1 \cup K_{4,4}^2$ から 2 回の X^+ -変形で得られる。グラフ G が $K_{4,4}^1 \cup K_{4,4}^2$ から最小 n 回の X^+ -変形で得られるとき、 G の level は n であると言い、 $\ell(G) = n$ と書く。 $\ell(KN_1) = 3$ 。

予想 1. 16頂点の 4-regular bipartite graph G について、 $\ell(G) = 2$ ならば、 G は 4bsc-graph であろう。

REFERENCES

- [1] Rosemberg I.G., *Regular and strongly regular self complementary graphs*, Ann. Dis. Math. **12**, (1982), pp. 223-238.
- [2] Tsukui Y., *4-regular graph のある族について*, Hakone Seminar **21**, (2005), pp. 55-58.
- [3] Tsukui Y., *Bipartite regular graph の補グラフについて*, Hakone Seminar **28**, (2012), pp. 179-182.

Current address: 869-2 HigashiKoiso, Oiso, Kanagawa, 255-0004, JAPAN

E-mail address: yas@tsukui-gate.com