

BIPARTITE REGULAR GRAPH の 補グラフについて

津久井 康之

1. 二部正則グラフの補グラフ

$G = (V, E)$ を simple bipartite graph とし, $V = V^+ \cup V^-, V^+ \cap V^- = \phi$, $\#V^+ = \#V^- = n$ とする.

Proposition 1. $G_i = (V_i, E_i)$ を上のようなグラフ, $K_{n,n}^i$ を完全2部グラフとし, $G_i \subset K_{n,n}^i$ とする ($i = 1, 2$).

グラフの同型写像 $f : G_1 \rightarrow G_2$ が $f(V_1^+) = V_2^+, f(V_1^-) = V_2^-$ であれば, f は $K_{n,n}^1$ から $K_{n,n}^2$ への同型写像に拡張できる.

Definition 1. $V = V^+ \cup V^-, V^+ \cap V^- = \phi, \#V^+ = \#V^- = n$ である simple bipartite graph $G = (V, E)$ に対して,

$G^{+c} = (V^+ \cup V^-, \{ \langle u, v \rangle : u \in V^+, v \in V^-, \langle u, v \rangle \notin E \})$ を G の正-補グラフ (+complement) という.

予想 1. $V = V^+ \cup V^-, V^+ \cap V^- = \phi, \#V^+ = \#V^- = 2r$ である simple bipartite r -regular graph $G = (V, E)$ に対して, $G \cong G^{+c}$.

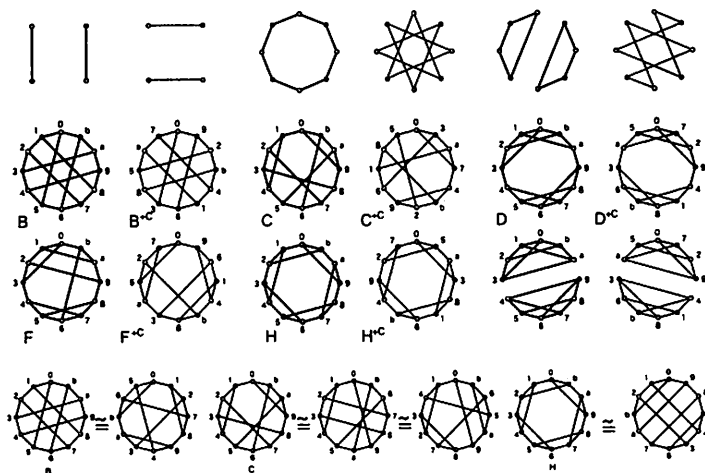


FIGURE 1. $r \leq 3$ の場合

2. 予想に対する状況証拠

Proposition 2. 予想は $G = K_{r,r}^1 \cup K_{r,r}^2$ のとき正しい ($1 \leq r$)。

次の proposition は前頁の Figure 3 から分かる。図の下方は、simple bipartite 3-regular graph がこれだけであることを示している。

Proposition 3. 予想は $1 \leq r \leq 3$ で正しい。

Example 1. Figure 2 は $r = 4$ のとき、予想 1 が成り立つ 2 つの例、16A と 16B を示す。右端の図は各々のグラフとその正補グラフが同型であることを確かめたものである。

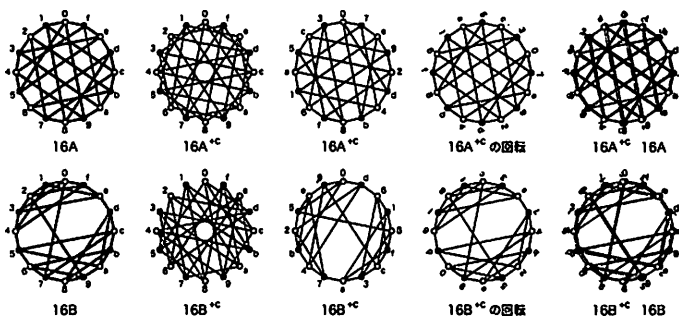


FIGURE 2. $r=4$ の例

Example 2. Figure 3 は $r = 5$ のとき、予想 1 が成り立つ例、20A を示す。

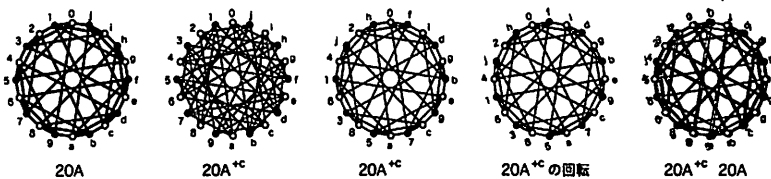


FIGURE 3. $r=5$ の例

3. 予想に対するアプローチ

いかにも、 r に関する induction に乗りそうだし、それ以外に考えつかない。しかし、 r と $r+1$ を結びつけるものは今のところ見えていない。 G と G^{*c} の同型写像が捕まえられれば一番良いが見当もつかない。もう一つは Proposition 2 の $G = K_{r,r}^1 \cup K_{r,r}^2$ をスタートとする考え方である。

Definition 2. [X^+ -変形] $G = (V^+ \cup V^-, E)$ を simple 2部グラフとする。 $u_1, u_2 \in X^+, v_1, v_2 \in X^-, e_i = \langle u_i, v_i \rangle \in E (i = 1, 2)$ で、 $u_1 \not\sim v_2, u_2 \not\sim v_1$ のとき、

$$X^+(G; e_1, e_2) = G - \{e_1, e_2\} + \{\langle u_1, v_2 \rangle, \langle u_2, v_1 \rangle\}$$

を G から (e_1, e_2) の X^+ -変形 (X^+ -変換) で得られるグラフと云う。このとき、 (e_1, e_2) を X^+ -変形可能な対という。 X^+ -変形可能な対を持つグラフを X^+ -変形可能なグラフと呼ぶ。 G が X^+ -変形可能ならば、 G^{+c} も X^+ -変形可能である。

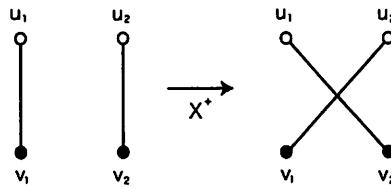


FIGURE 4. X^+ -変形

以下、特に断らない限り、 $G = (V^+ \cup V^-, E)$ を simple bipartite r -regular graph で、 $\#V^+ = \#V^- = 2r$ とする。

Definition 3. $\epsilon = +$ ($\epsilon = -$) のとき、 $-\epsilon = -(-\epsilon = +)$ と記す。 $X = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subset V^\epsilon$ に対して、

$X^p = \{u_i \in V^{-\epsilon} : \exists v_{j_i} \in V^\epsilon, \langle u_i, v_{j_i} \rangle \in E\}$ を X の partner と呼ぶ。
 $\mathcal{M}(G, k) = \min\{\#X^p : X \subset V^\epsilon, \#X = k\}$, $\mathcal{M}(G) \equiv \mathcal{M}(G, r)$ と記す。
 定義から、 $r \leq \mathcal{M}(G) \leq 2r$ である。

任意の $u \in V^\epsilon$ に対して、 $X = V^{-\epsilon} - \{u\}^p$ とすると、 $\#X = r, X^p \not\ni u$ だから。

Proposition 4. $G = (V^+ \cup V^-, E)$ を上の Definition のグラフとすると、
 $r \leq \mathcal{M}(G) \leq 2r - 1$.

この proposition から次は容易に導かれる。

Proposition 5. G は X^+ -変形可能である。

Proposition 6. $\mathcal{M}(G) = r$ ならば、 $G \cong K_{r,r}^1 \cup K_{r,r}^2$ である。

この事から次が導かれる。

Proposition 7. $G = X^+(K_{r,r}^1 \cup K_{r,r}^2)$ ならば $G \cong G^{+c}$ である。

4. KOUNO の反例

2013年も明けて、この原稿の準備中に河野正晴氏(北見工大)からメールが届いた。予想1の反例を見つけたというものである。筆者は反例などは見つからないと思っていたので(河野氏も2012年12月まではこれに同意していた)、その反例を「反例ではない」方に懸けてそのグラフ K について、 $K \cong K^{+c}$ を直接示そうと3日間がんばってみたが成功しなかった。仕方なく河野氏のメールを読んだ。間違いなく「反例」になっていた。なお、Figure 5で、4は x_4 を、4*は y_4 を表わす。

めでたくこの問題は解決し、ここに報告する事が出来ることになった。さて、それでは今までの「例」は何を語っているのであろうか。グラフの世界では、3-regular graph では成立するが $4 \leq r$ の r -regular graph では成り立たない性質はたくさんある。そこで、同じ r で、 $G \cong G^{+c}$ となるものと $G \not\cong G^{+c}$ となるものの「2つの世界を分けるもの」は何かという「小さな問題」が残ったという事でこの報告を終えることとする。

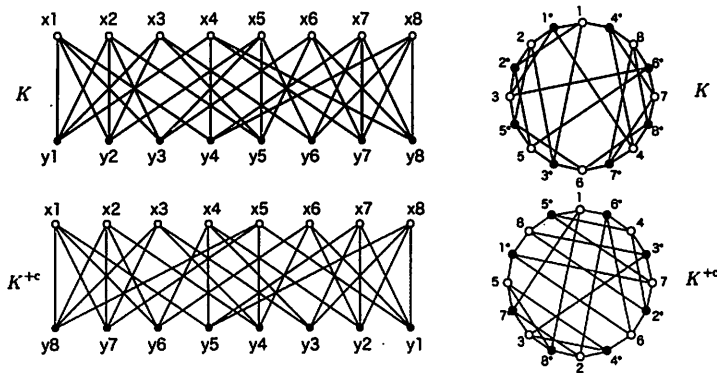


FIGURE 5. 河野の反例

REFERENCES

- [1] Tsukui Y., *Transformations of bipartite cubic graphs*, Kobe Jour. Math. 12, (1995), pp. 9-30.

Current address: 869-2 HigashiKoiso, Oiso, Kanagawa, 255-0004, JAPAN

E-mail address: yas@tsukui-gate.com