

4-GRAPHの X^+ 変形について

津久井 康之

1. X^+ -変形と *edge-reduction*

$G = (V, E)$ を loop を持たない 4-regular graph とするとき。その edge colouring $c : E \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ が共通端点を持つ任意の異なる 2 辺 e, f に対して、 $c(e) \neq c(f)$ のとき、 (G, c) または G を 4-graph という。一般に n -graph が定義される。ここでは、4-graph として simple な 2 部 graph の場合だけについて考える。

Definition 1.1. $\Gamma_1 = (G_1, c_1), \Gamma_2 = (G_2, c_2)$ を 4-graph とする。グラフの同型写像 $h : G_1 \rightarrow G_2$ と置換 $t : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ が有って、 $\forall e \in E(G_1)$ に対して $tc_1(e) = c_2h(e)$ のとき、 Γ_1 と Γ_2 が同型 (isomorph) であるという ($\Gamma_1 \cong \Gamma_2$)。

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{h} & G_2 \\ c_1 \downarrow & & \downarrow c_2 \\ \{1, 2, 3, 4\} & \xrightarrow{t} & \{1, 2, 3, 4\} \end{array}$$

Definition 1.2. $G = (V, E)$ で、 (G, c) を 4-graph とする。 $X \subset \{1, 2, 3, 4\}$, に対して、 $E_X = \{e \in E | d(e) \in X\}$, $G_X = (V, E_X)$ とする。 $\#G$ で G の connected component 数を表わす。 $b_i(G, c) = \sum \{\#G_X | |X| = i\}$, ($0 \leq i \leq 4$,) と定める。 $b_0(G, c) = \#V$, $b_1(G, c) = \#E$, $b_2(G, c)$ は (G, c) の二色サイクルの総数となる。

Definition 1.3. $G = (V, E)$ を 4-graph ($V = V^+ \cup V^-$) とする。同色の異なる 2 辺 $d, f \in E$, $c(d) = c(f)$, $d = \langle u, v \rangle$, $f = \langle x, y \rangle$, $u, x \in V^+$, $v, y \in V^-$ について $u \neq x$ かつ $v \neq y$ であるとき、 $G' = (V, E')$, ただし $E' = E \cup \{d', f'\} - \{d, f\}$, $d' = \langle u, y \rangle$, $f' = \langle x, v \rangle$ とし、 $c'|_{E - \{d, f\}} = c$, $c'(d') = c'(f') = c(d)$ として c' を定め、 (G', c') を G から、 X^+ -変形で得られる 4-graph と呼ぶ。($(G', c') = X^+((G, c); d, f)$).

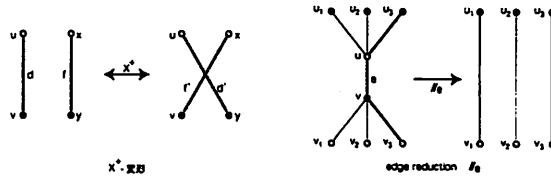


FIGURE 1. X^+ -変形と edge-reduction

Definition 1.4. $G = (V, E)$ が 4-graph で, $e = \langle u, v \rangle \in E$, $u_i \sim u$, $v \sim v_i$ ($i = 1, 2, 3$), $c(\langle u_i, u \rangle) = c(\langle v, v_i \rangle)$ ($i = 1, 2, 3$) とする。いま $u_i \not\sim v_j$ ($i, j = 1, 2, 3$) のとき、 $G' = G - \{u, v\} + \{u_i, v_i\}$ ($i = 1, 2, 3$) を、 G を辺 e で edge-reduction して得られる 4-graph と呼び、 $(G, c) // e$ または $G // e$ と記す。

Theorem 1. G_1, G_2 を頂点数が同じである連結な simple bipartite 3-graph とすると、 G_2 は G_1 から有限回の X^+ -変形によって得られる [1]。

3-graph については上の定理があるが、4-graph については次の反例がある。頂点数 8 の 4-graph はこの 2 つだけで、頂点数 10 の 4-graph もこの三つだけである。横向きの矢印は X^+ -変形可能を示し、下向き矢印は edge-reduction を表わしている (Figure 2)。“irr” はその 4-graph が edge-reduction 出来ないことを示す。 $b = 8$ は $b_2(G, c) = 8$ を表わす。

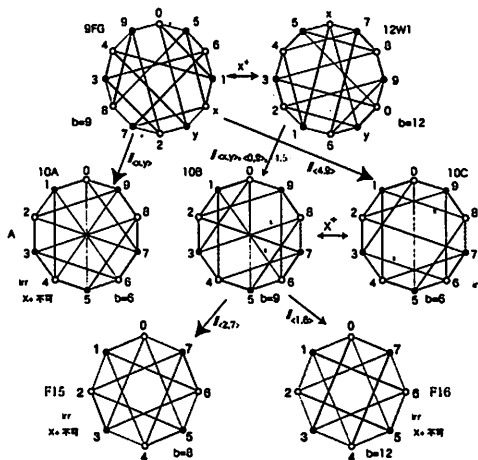


FIGURE 2. 4-graph の例

4-graph G の直径 $diam(G)$ が十分に高ければ ($diam(G) \geq 4$)、 X^+ -変形可能な 2 辺が存在し、また edge-reduction 不可能な edge も X^+ -変形することによって edge-reduction 可能とすることが出来る。

そこで十分に高い頂点数を持つ 4-graph はそのような性質を持つので、12 頂点の 4-graph について調べたところ、2 つの X^+ -変形できないものが存在することが確認された(8TT,12BB)。頂点数 12 は「十分に高い」とは云えない。

ここでは 12 頂点以下の simple bipartite 4-graph について X^+ -変形を中心に、分類(同型判定)結果を報告する。

4-graph の同型判定のために 3-graph の分類の結果を用いる [1, p.29]。次の図は 3-graph のうち、2 色の Hamilton-cycle を持つものである (G と H は 3-graph としては同型)。

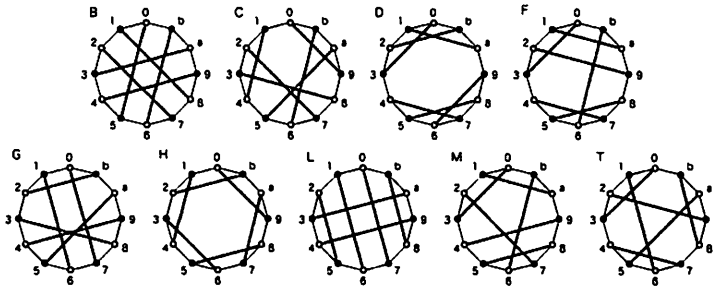


FIGURE 3. 2 色の Hamilton-cycle を持つ 3-graph

4-graph G の任意の 2 色で幾つかの cycle が出来るが、頂点数 12 では、それらの長さは $(4+4+4), (4+8), (6+6)$, または (12) のどれかになる。 (12) は Hamilton cycle を表わす。

Figure 4 の 4-graph の表の (6) 8CT の最初の 8 は $b_2(8CT) = 8$ を、“ b_2 invariant の $(12)^4$ は Hamilton cycle を 4 つ持つことを示す。それらの Hamilton cycle に対して第 3, 第 4 の色の辺が Figure 3 のどの Type の組合せになるかを示すのが“Type”の CM, CM, DG, DG である。4-graph の“name”はこのうちの一つから付けられている。(1) から (32) と (41) は 2 色 Hamilton cycle を持つので上の判定で分類できた。(41) 以外の (33) から (44) までのものは Hamilton cycle を持たないので別の判定が必要である。(36) の W_2 は $(6+6)$ を 2 つ持つこと、22 の最後の 2 はその 2 番目であることを示す。(33) 12W0 は $(6+6)$ の cycle を持たない。“e-r”の irr はその 4-graph が edge-irreducible(edge-reduction 不可能)を示す。“ X^+ -transformed into”の欄はその 4-graph が X^+ -変形で移る 4-graph のリストである。

NO.	name	Type	b_2 invariants	e-r	X^+ transformed to
(1)	8FF	FF FF FF FF	$(4+8)^2(12)^4$	irr	9DF 11FL
(2)	8FG	FG FG FM FM	$(4+8)^2(12)^4$		9CF 9CM 9FG
(3)	8GG	GG GG MM MM	$(4+8)^2(12)^4$		9FG
(4)	8MM	FF FG FG MM	$(4+8)^2(12)^4$		9DF 9FG 11FL
(5)	8CF	CF CF FT FT	$(4+8)(6+6)(12)^4$		9CF 9CM 11CL
(6)	8CM	CM CM DG DG	$(4+8)(6+6)(12)^4$		9DF 9FG 11BD 11DL
(7)	8DM	DM DM GH GH	$(6+6)^2(12)^4$	irr	9CC 9DF 11BH 11HL
(8)	8CC	CC CC CC CC	$(6+6)^2(12)^4$		9CF
(9)	8CD	CD CD CT CT	$(6+6)^2(12)^4$		9CC 9DF 9GT 9TT
(10)	8HT	HT HT HT HT	$(6+6)^2(12)^4$	irr	9CC
(11)	8TT	TT TT TT TT	$(6+6)^2(12)^4$		X^+ impossible
(12)	9FG	FG FM GM	$(4+8)^3(12)^3$		8CM 8FG 8GG 8MM 10CG 10FF 12W0 12W1
(13)	9CF	CF CF FF	$(4+8)^2(6+6)(12)^3$		8CC 8CF 8FG 10FF 12W1 12W21 12W31
(14)	9CM	CF CM FG	$(4+8)^2(6+6)(12)^3$		8CF 8FG 10CG 12W22
(15)	9DF	DF DG FM	$(4+8)^2(6+6)(12)^3$		8CD 8CM 8DM 8FF 8MM 10BD 12DL 12W1 12W32 12W33
(16)	9GT	GT GT MM	$(4+8)^2(6+6)(12)^3$		8CD 12BT 12W1
(17)	9CC	CC CH CH	$(6+6)^3(12)^3$		8CD 8DM 8HT 12W33 12W6
(18)	9TT	TT TT TT	$(6+6)^3(12)^3$		8CD 12W32
(19)	10FF	FF FL FL	$(4+4+4)(4+8)^2(12)^3$		9CF 9FG 11CL 11DL 11FL 13LL
(20)	10CG	BM CG CL	$(4+4+4)(4+8)(6+6)(12)^3$		9CM 9FG 11CL
(21)	10BD	BD BD DD	$(4+4+4)(6+6)^2(12)^3$	irr	9DF 11BD 11BH
(22)	10BH	BH BH HH	$(4+4+4)(6+6)^2(12)^3$	irr	11BD
(23)	11FL	FL FL	$(4+4+4)(4+8)^3(12)^2$	irr	8FF 8MM 10FF 12DL 12LL 12W0 12W1
(24)	11CL	CL CL	$(4+4+4)(4+8)^2(6+6)(12)^2$	irr	8CF 10CG 10FF
(25)	11DL	DL DL	$(4+4+4)(4+8)^2(6+6)(12)^2$	irr	8CM 10FF 12DL 12W31
(26)	11HL	HL HL	$(4+4+4)(4+8)^2(6+6)(12)^2$		8DM 12DL 12W1 12W31
(27)	11BD	BD BD	$(4+4+4)(6+6)^3(12)^2$	irr	8CM 10BD 10BH 12W33
(28)	11BH	BH BH	$(4+4+4)(6+6)^3(12)^2$	irr	8DM 10BD 12W32
(29)	12LL	LL LL	$(4+4+4)^2(4+8)^2(12)^2$	irr	11FL 13LL
(30)	12DL	DL DL	$(4+4+4)^2(4+8)(6+6)(12)^2$		9DF 11DL 11FL 11HL 13LL 15W31 15W32
(31)	12BB	BB BB	$(4+4+4)^2(6+6)^2(12)^2$	irr	X^+ impossible
(32)	12BT	BT BT	$(4+4+4)^2(6+6)^2(12)^2$		9GT
(33)	12W0		$(4+8)^6$	irr	9FG 11FL
(34)	12W1		$(4+8)^5(6+6)$		9CF 9DF 9FG 11FL 11HL 13LL
(35)	12W21		$(4+8)^4(6+6)^2$	irr	9CF 13LL
(36)	12W22		$(4+8)^4(6+6)^2$		9CM
(37)	12W31		$(4+8)^3(6+6)^3$		9CF 11DL 11HL
(38)	12W32		$(4+8)^3(6+6)^3$		9DF 9TT 11BH 15W32
(39)	12W33		$(4+8)^3(6+6)^3$		9CC 9DF 11BD 15W31
(40)	12W6		$(6+6)^6$	irr	9CC
(41)	13LL	LL	$(4+4+4)^2(4+8)^2(6+6)(12)$	irr	10FF 12DL 12LL 12W1 12W21 16W2
(42)	15W31		$(4+4+4)^3(6+6)^3$	irr	12DL 12W33
(43)	15W32		$(4+4+4)^3(6+6)^3$	irr	12DL 12W32
(44)	16W2		$(4+4+4)^4(6+6)^2$	irr	13LL

FIGURE 4. 12頂点の4-graph のリスト

このリストから、(11)8TT および (31)12BB を除く全ての12頂点の4-graphはお互いに X^+ -変形で移り変わることが分かる。

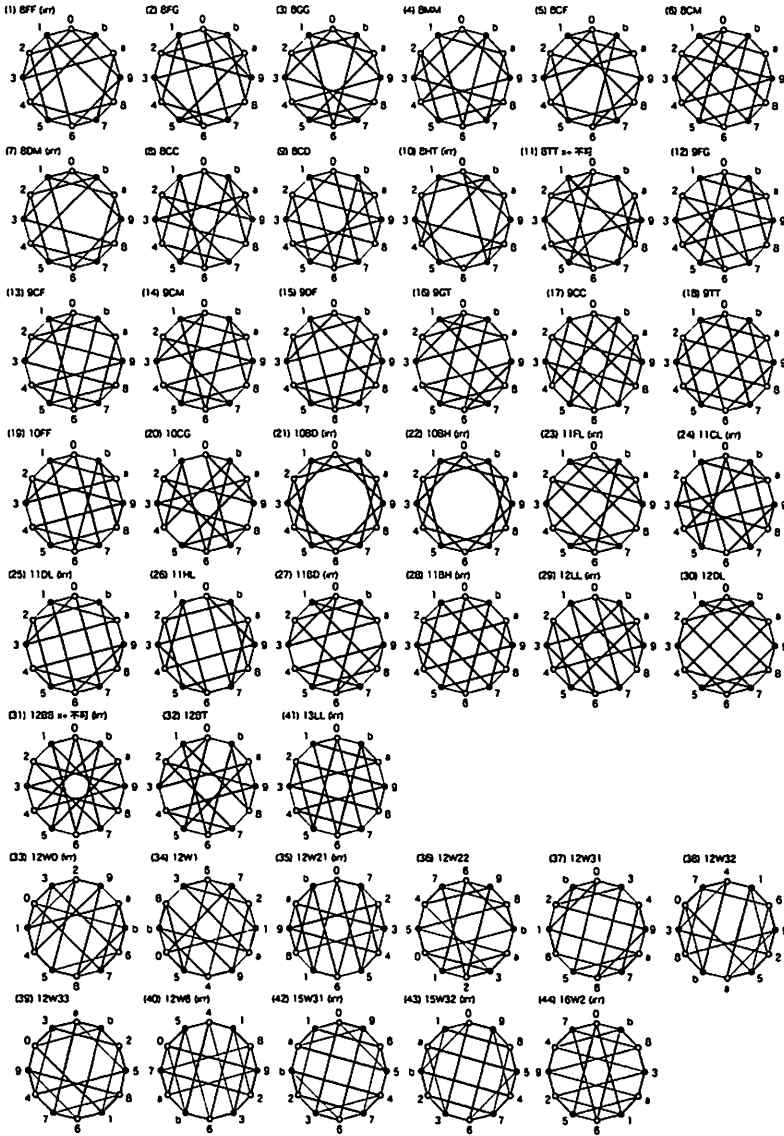


FIGURE 5. 12頂点の4-graph

[追記] この結果を計算機でチェックすること、それを14頂点まで拡大してやることをどなたかやってくれませんか。

REFERENCES

- [1] Tsukui Y., *Transformations of bipartite cubic graphs*, Kobe Jour. Math. 12, (1995), pp. 9-30.

Current address: 869-2 HigashiKoiso, Oiso, Kanagawa, 255-0004, JAPAN

E-mail address: yas@tsukui-gate.com