HAKONE SEMINAR 25 (2009) 129-147.

4-graph の S-同値

津久井 康之（専修大学）

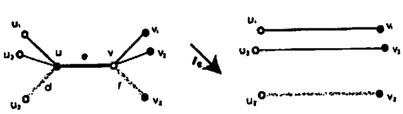
§ Introduction

loopを持たない連結 4-regular graph $G=(V,E)$ に $c:E\to N_4=\{1,2,3,4\}$ を、$e\sim e'$(共通端点を持つ) ならば $c(e)\neq c(e')$ となる map(proper edge-colouring) とするとき、(G,c) または略して G を 4-graph という(すべての 4-regular graph が 4-graph となるわけではない)。集合 X に対し $\#X$ は X の濃度、$\#_cX$ は X の連結成分数、G がグラフのとき $|G|=\#V(G)$ はG の位数をそれぞれ表わす。

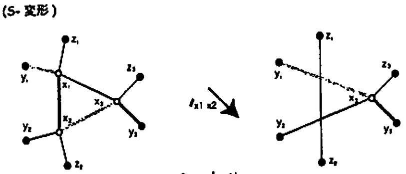
グラフ論的興味から、simple graph だけを対象とする。

Definition 1. $(S-$変形$,\ edge-reduction,\ \Delta-reduction)$

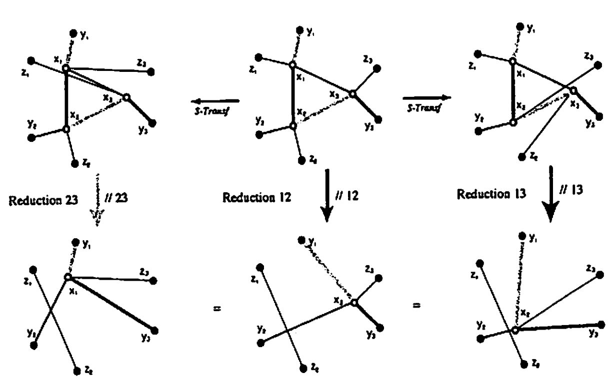
S-Transformation (S- 変形)



edge-reduction



Δ-reduction



この$S-$変形がsimple graph の範囲でできないときは$S-$変形不可能と呼ぶ。G_2 が G_1 から有限回の $S-$変形で得られるとき、G_1 と G_2 はS-同値であるという。

この研究の一部は専修大学研究助成(2003,2004)による。

reduct する辺が長さ3のサイクル上にあるときこの *reduction* を $\Delta-reduction$ という。図のように $S-$ 変換を行えば、Δ のどの辺で *reduct* しても結果は変わらない。

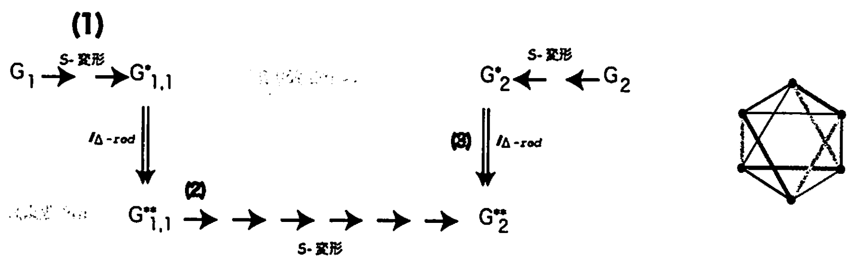
§ 定理と証明方針

Theorem.

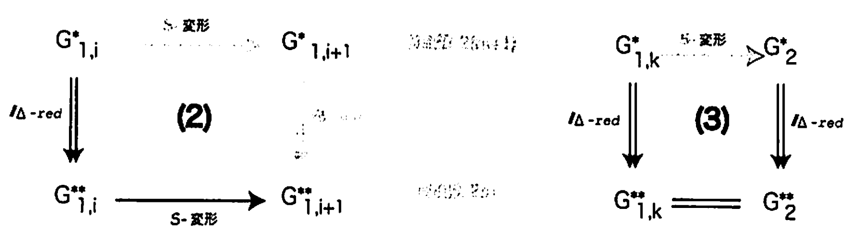
連結な $4-graph\ G_1, G_2$ について、$|G_1| = |G_2|$ ならば、G_1 と G_2 は $S-$同値である。

証明方法の概略。

証明はグラフの位数の帰納法による。対象のグラフの最小位数(頂点数)は6で、$K_6 - \{3辺\}$ である。



証明の方針



G_1, G_2 を同じ位数の連結 $4-graph$ とする。

(1) G_1, G_2 に $S-$ 変形を行い、$\Delta-reduction$ 可能な $G^*_{1,1}, G^*_2$ を得る。$G^*_{1,1}, G^*_2$ を $\Delta-reduction$ して得られる $G^{**}_{1,1}, G^{**}_2$ は帰納法の仮定から $S-$ 同値であり、G^{**}_2 は $G^{**}_{1,1}$ から有限回の $S-$ 変形で得られる。

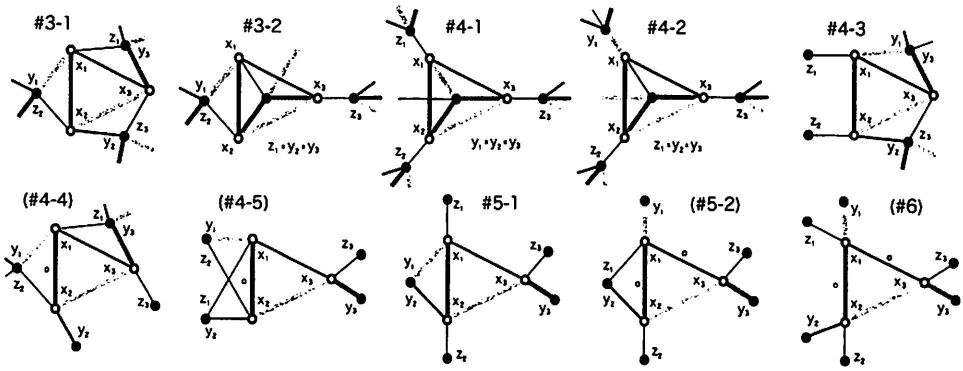
(2) $G^{**}_{1,i+1}$ が $G^{**}_{1,i}$ から1回の $S-$ 変形で得られるとき $G^*_{1,i}$ から有限回の $S-$ 変形で $G^*_{1,i+1}$ を構成し、これの $\Delta-reduction$ が $G^{**}_{1,i+1}$ となるようにする。

(3) さいごに、図のような $G^{**}_{1,k} = G^{**}_2$ と $G^*_{1,k}$ を得るので, $G^*_{1,k}$ から G^*_2 への有限回の $S-$ 変形を構成する。

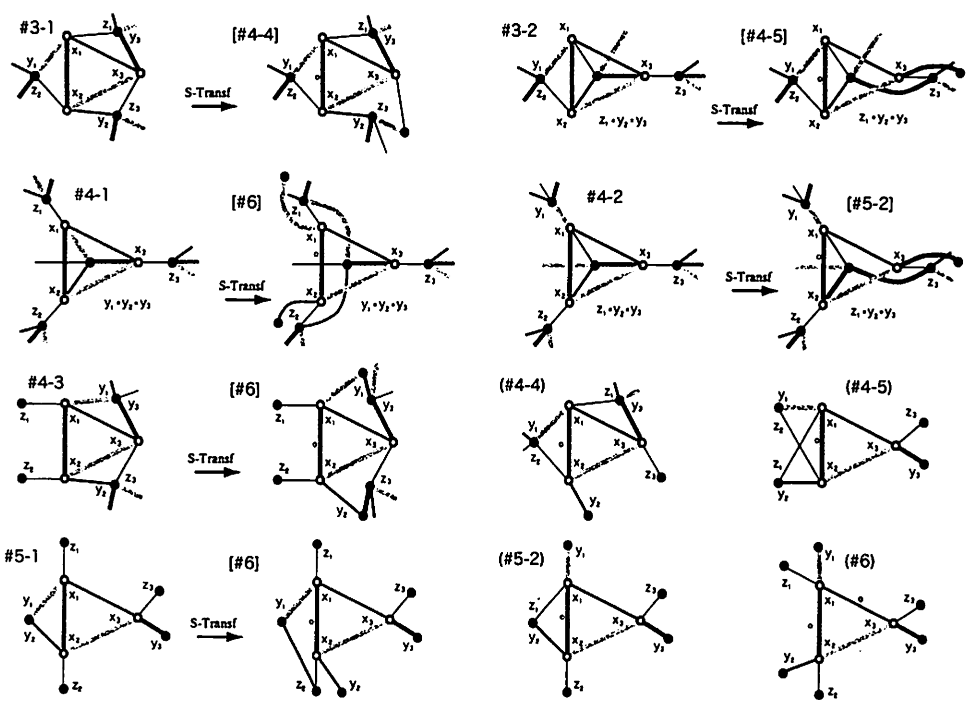
§ 証　明

(1) 任意の $4-graph$ について $S-$変形によって長さ3のサイクル Δ を作ることができる [1,Lemma 4.1]。ただし、Δ が存在してもそれが $\Delta-reduction$ 可能とは限らない。$4-graph$ 内で長さ3のサイクル Δ の近傍を分類すると次のようである[$Nbds\ of\ \Delta$]。

次に$edge-reduction$出来ないΔに対して§−変形をすれば$\Delta-reduction$可能にできることを示す[$MakeRed\,\Delta$]。

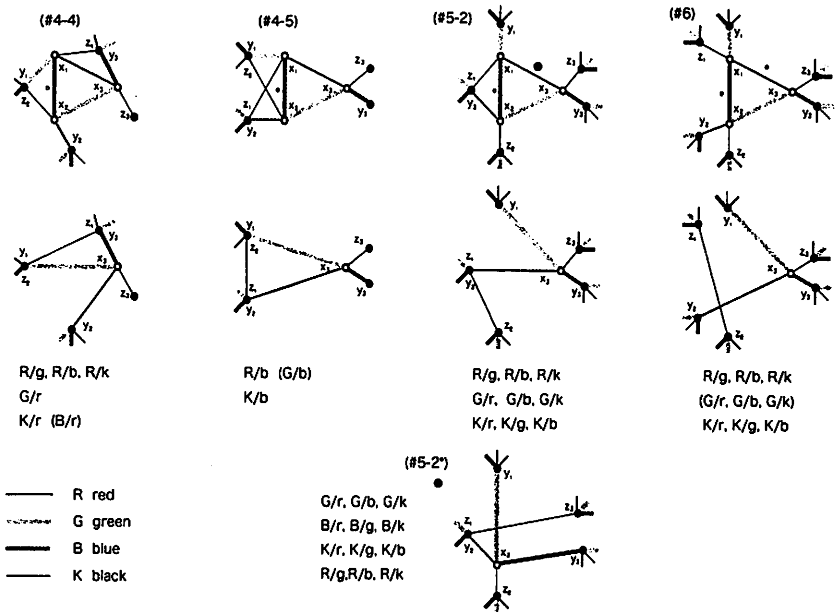


Nbds of Δ



MakeRed of Δ

また、$\Delta-reduction$出来る5つの場合$(\#4-4, \#4-5, \#5-2, \#5-2*, \#6)$について$\Delta-reduction$の様子を示す。



5-cases of Δ-reduction

(2) $G^{**}_{1,i}$ から $G^{**}_{1,i+1}$ への$S-$変形が $reduce$ する Δ の近傍でなければ $G^{*}_{1,i}$ から $G^{*}_{1,i+1}$ への$S-$変形はそのままでよいから、$\Delta-reduction$ の5つの場合ごとに考えればよい $[LeftS(-$変形$)]$。「$LiftS\#44B/g$」は、$Case(\#4{-}4)$で $blue$ の辺に沿って、$green$ の辺の $S-$変形の $Lift$ を意味する。

(3) $G^{*}_{1,k}$ の Δ_1 を $reduction$ して得られる $G^{**}_{1,k}$ の頂点を x, G^{*}_{2} の Δ_2 を $reduction$ して得られる G^{**}_{2} の頂点を y とする。 $G^{**}_{1,k}=G^{**}_{2}$ 内で x と y を結ぶ $path$ を P とする。
この $path$ P に沿ってΔ_1 を Δ_2 まで $S-$変形で移すことが出来ればよい。
このためには、Δ_1 に隣接する任意の頂点に新しい Δ を、$S-$変形で作れればよいから、
$\Delta-reduction$ の各場合について確かめればよい。

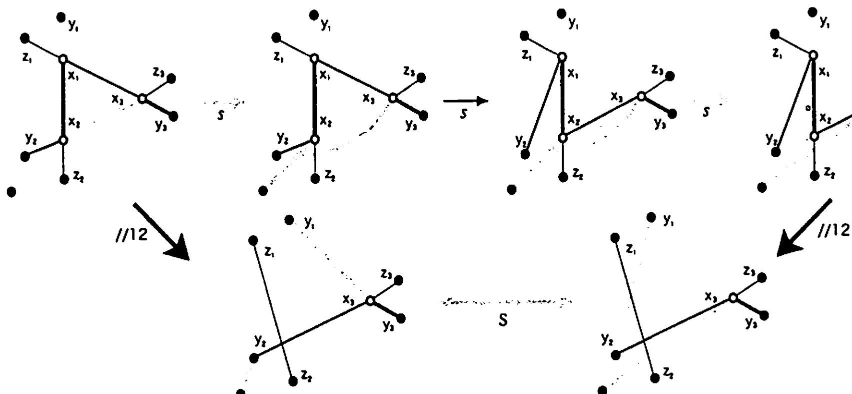
「$Move\Delta\#52B{-}g$」は、$(case\#5{-}2)$ で、$blue$ の辺の $reduction$ で $green$ の辺で隣接する頂点への Δ の移動を表している。

以上二つの場合についての証明を示す図はこの本文のあとにつける。最後の図は頂点数8のすべての 4-graph の間の関係を示すものである。

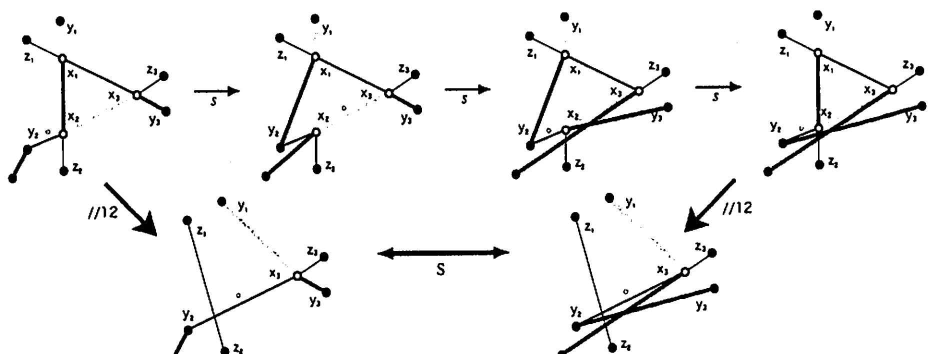
REFERENCES

1. Tsukui Y., *Transformations of ede-coloured cubic graphs*, Discrete Math. **184** (1998), 183-194.
2. Tsukui Y., *4-regular Graph* のある族について, Hakone Seminar **21** (2005), 55-58.
3. Tsukui Y., *3-graph* と *4-graph* について, Hakone Seminar **24** (2008), 59-66.

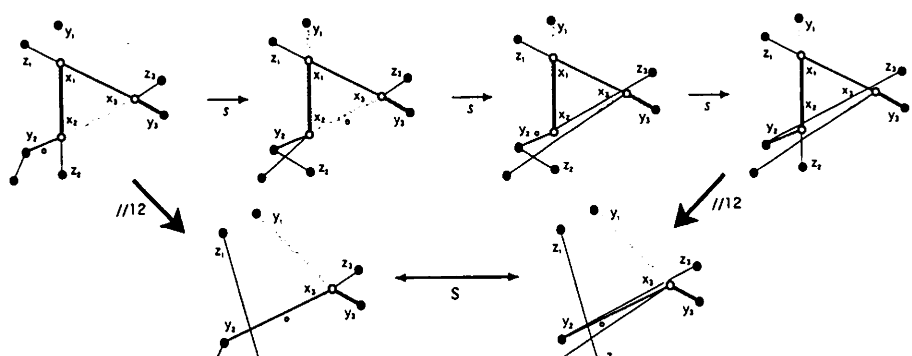
DEPARTMENT OF NETWORK AND INFORMATION, SENSHU UNIVERSITY, 2-1-1 HIGASHI-MITA, TAMAKU, KAWASAKI, 214-8580 JAPAN.
E-mail address: tsukui@isc.senshu-u.ac.jp



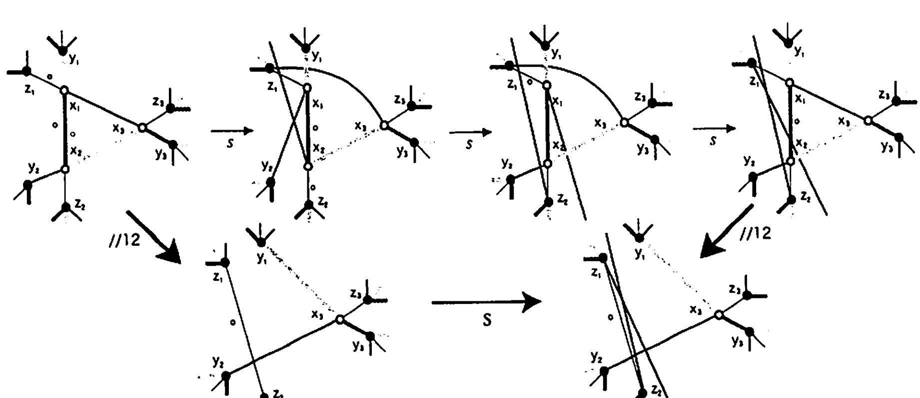
(01) LiftS#6 R/g



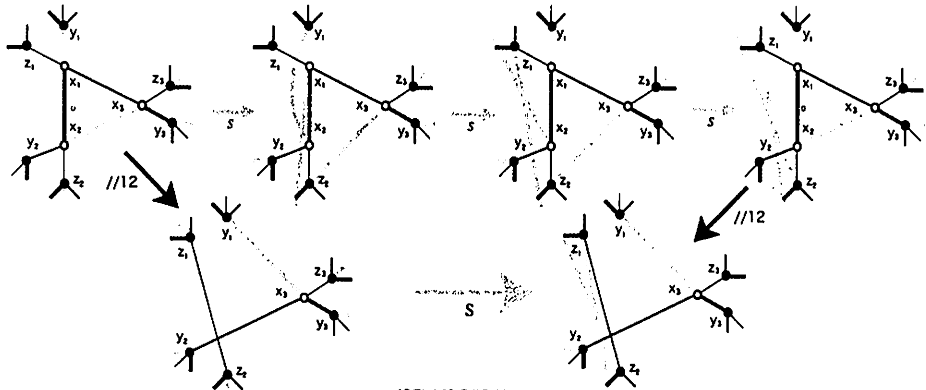
(02) LiftS#6 R/b



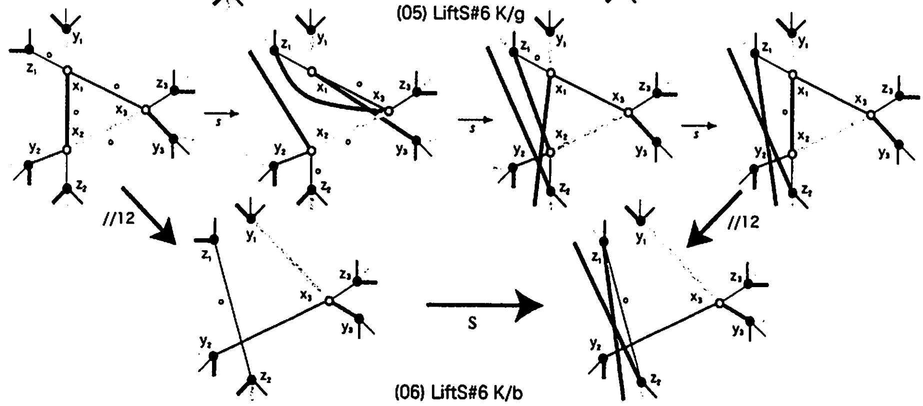
(03) LiftS#6 R/k



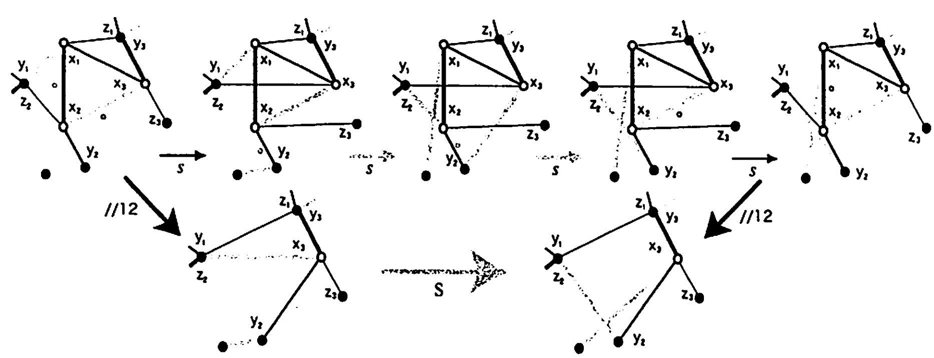
(04) LiftS#6 K/r



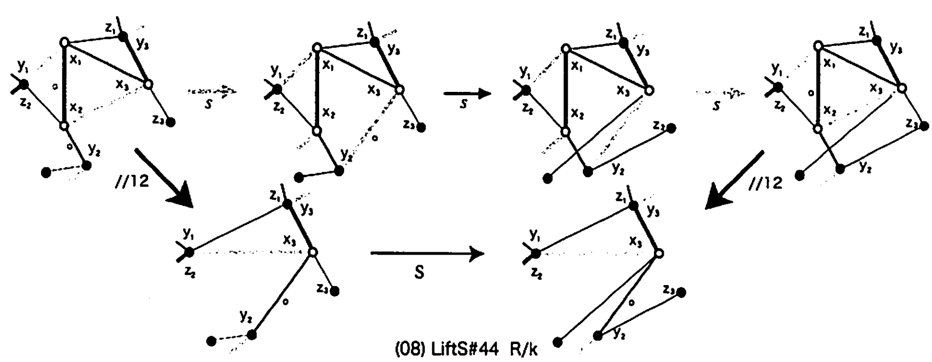
(05) LiftS#6 K/g



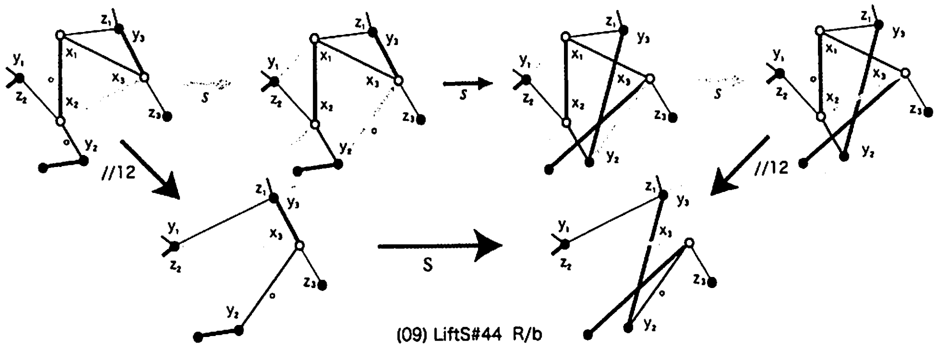
(06) LiftS#6 K/b



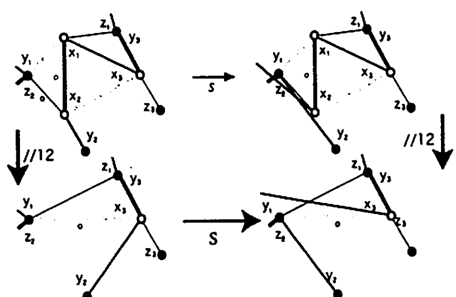
(07) LiftS#44 R/g



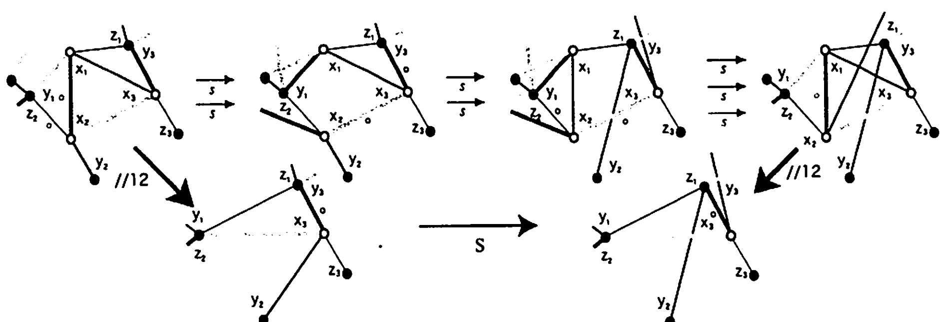
(08) LiftS#44 R/k



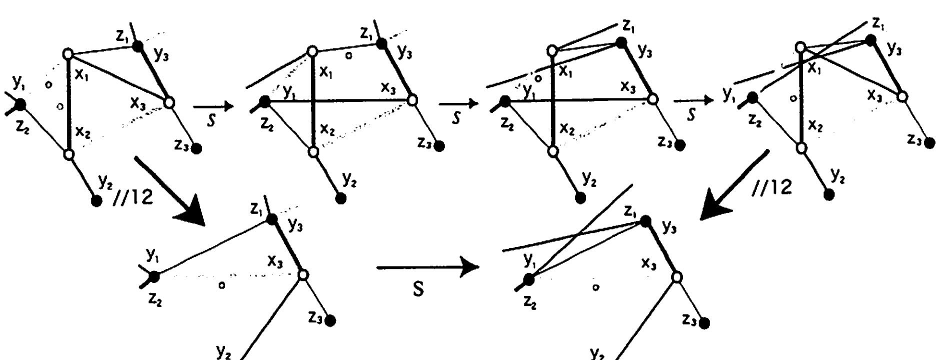
(09) LiftS#44 R/b



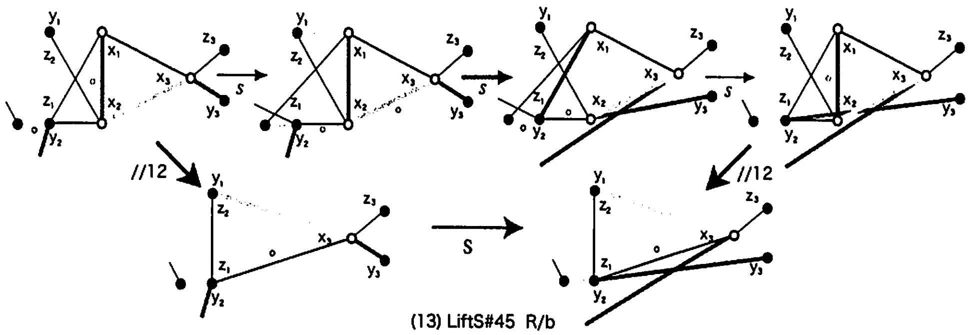
(10) LiftS#44 G/r



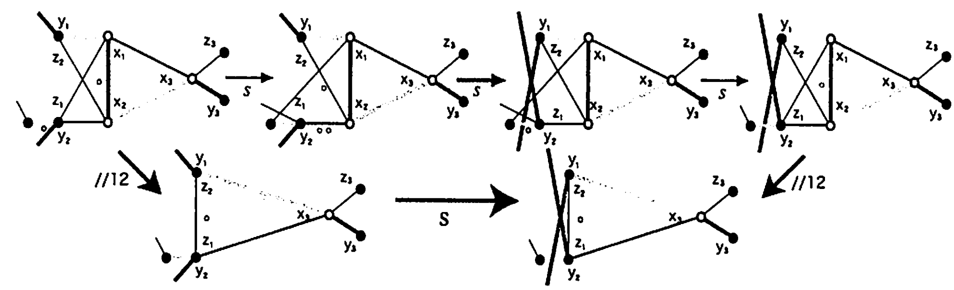
(11) LiftS#44 B/r



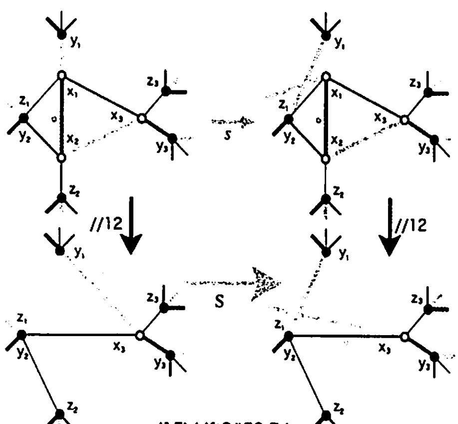
(12) LiftS#44 K/r



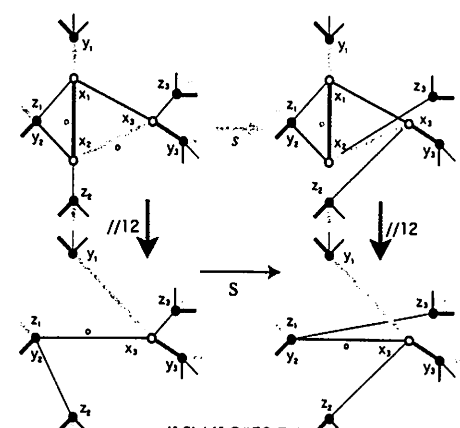
(13) LiftS#45 R/b



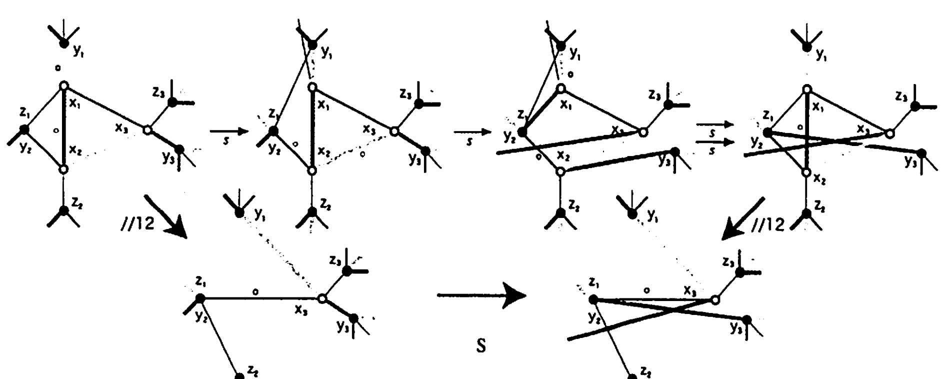
(14) LiftS#45 K/b



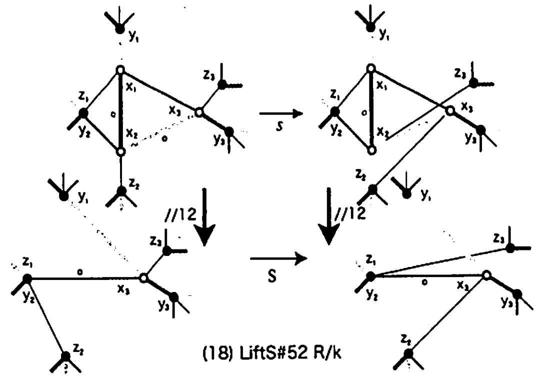
(15) LiftS#52 R/g



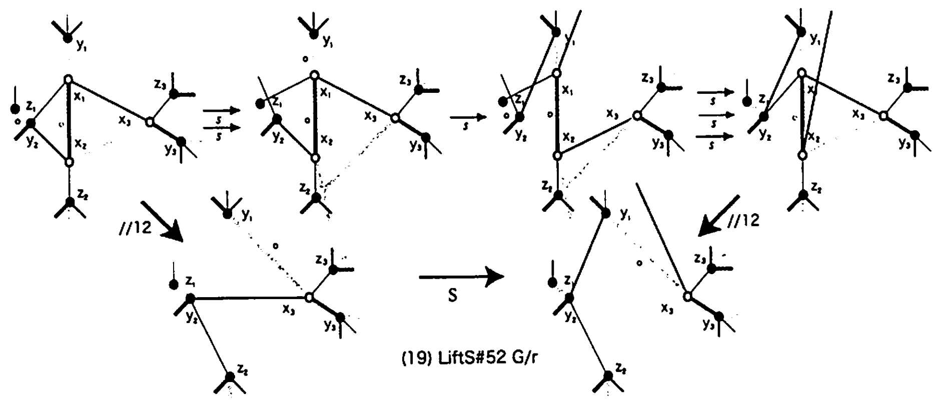
(16) LiftS#52 R/k



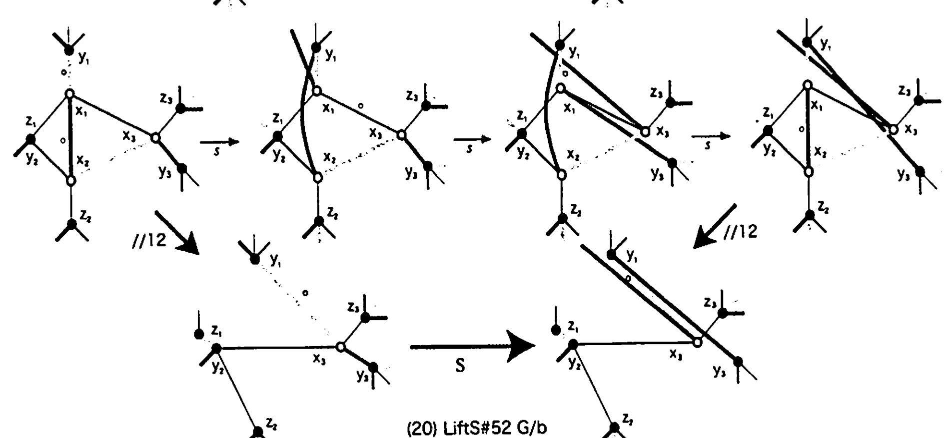
(17) LiftS#52 R/b



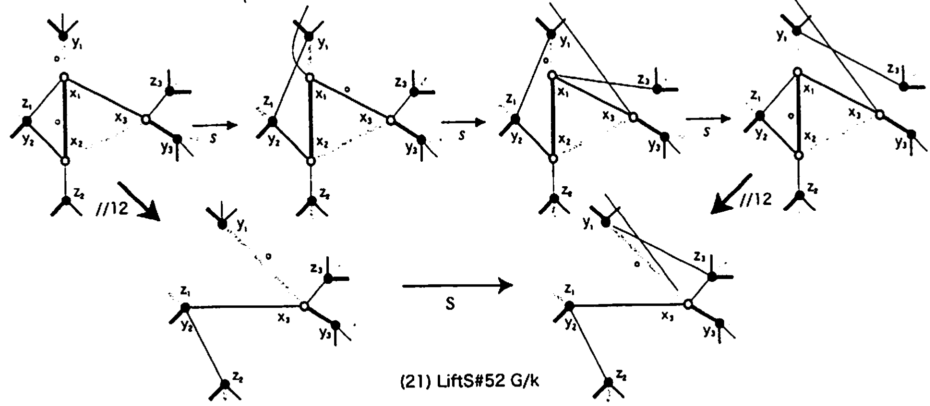
(18) LiftS#52 R/k



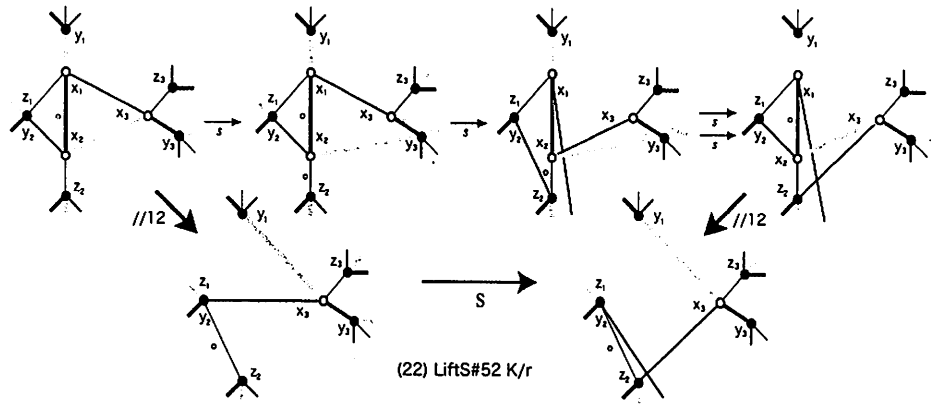
(19) LiftS#52 G/r



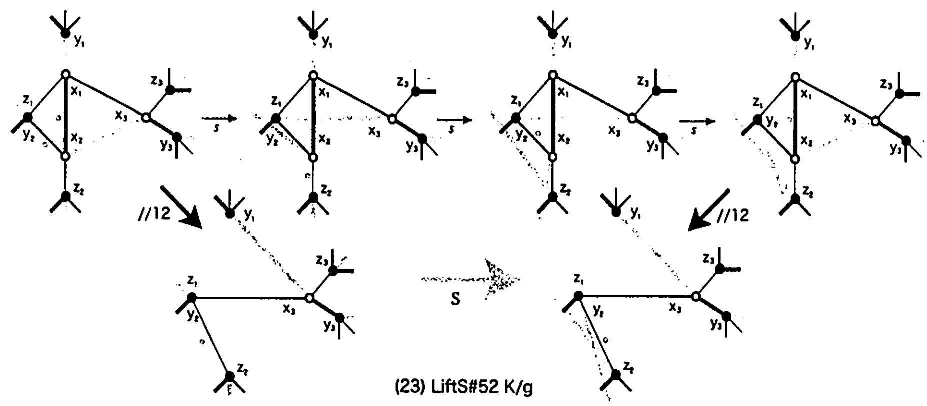
(20) LiftS#52 G/b



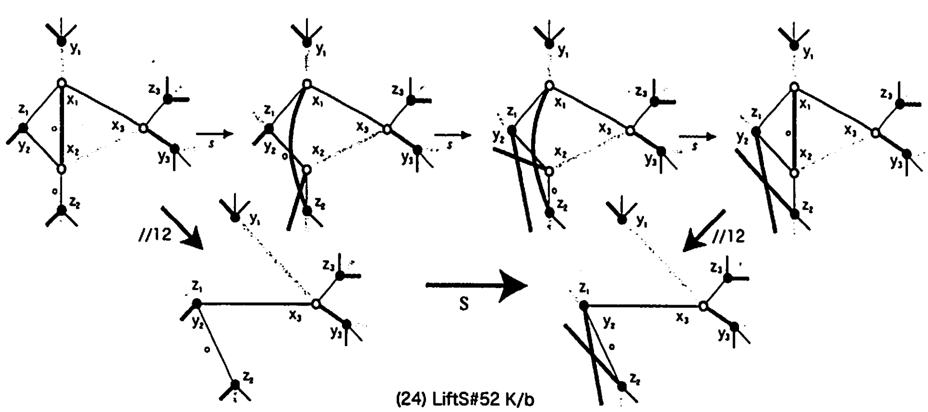
(21) LiftS#52 G/k



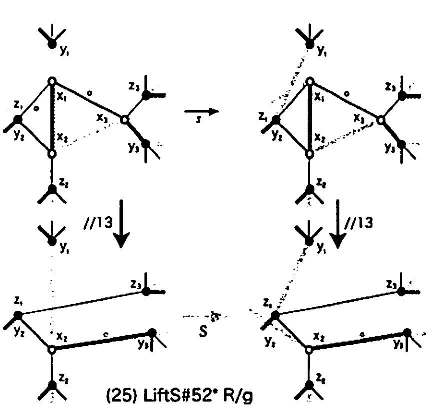
(22) LiftS#52 K/r



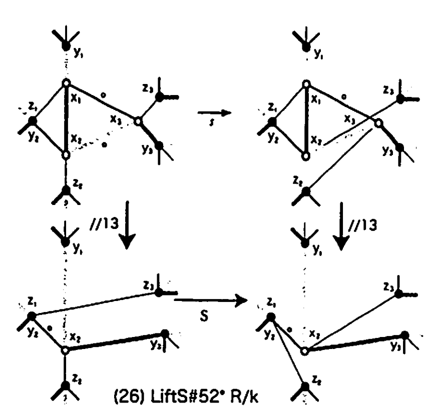
(23) LiftS#52 K/g



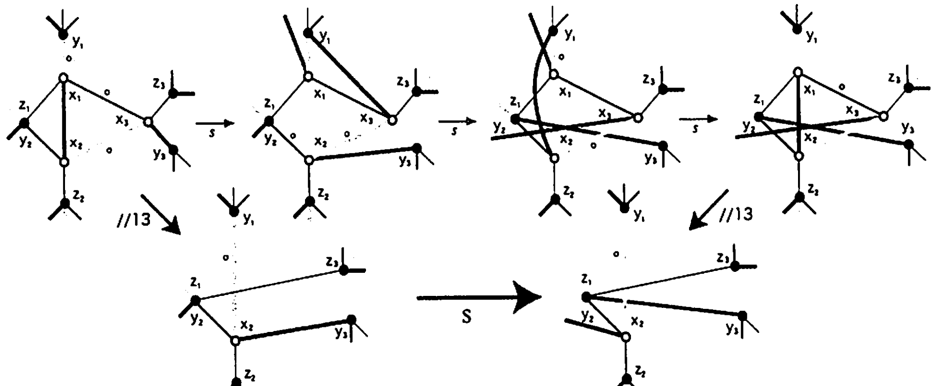
(24) LiftS#52 K/b



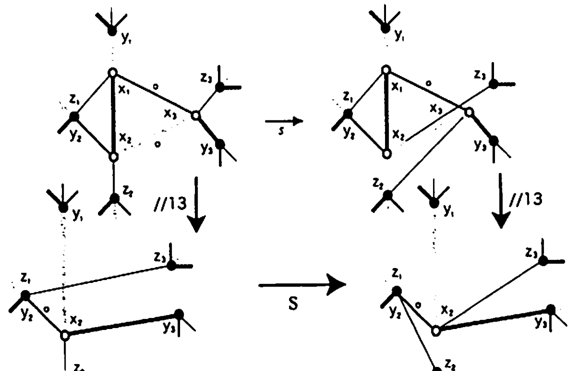
(25) LiftS#52* R/g



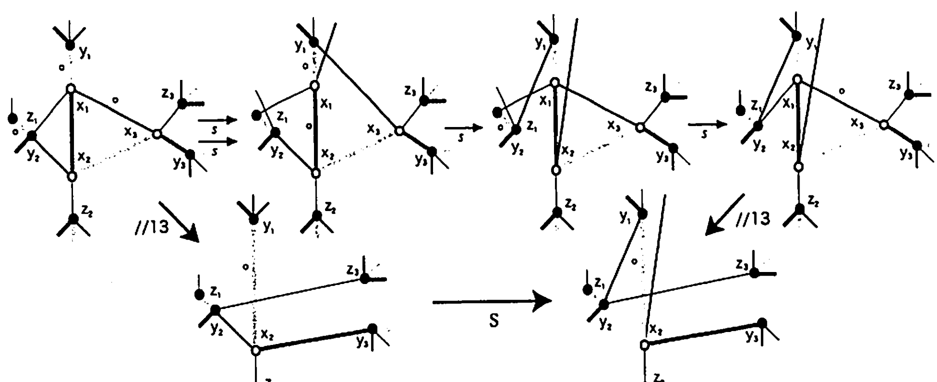
(26) LiftS#52* R/k



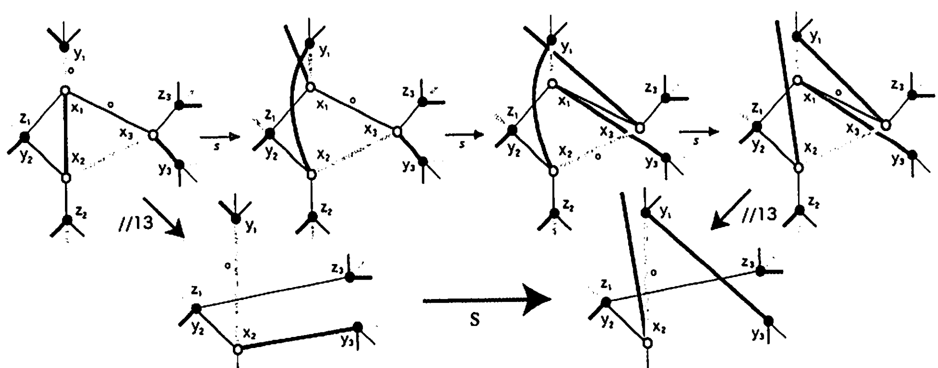
(27) LiftS#52* R/b



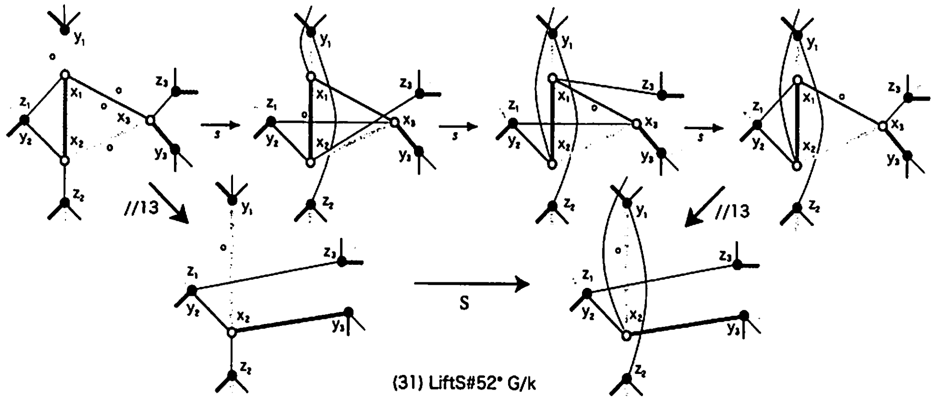
(28) LiftS#52* R/k



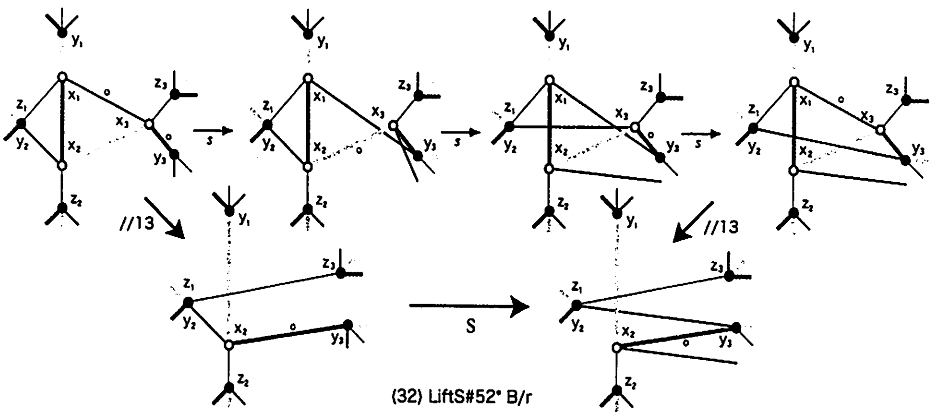
(29) LiftS#52* G/r



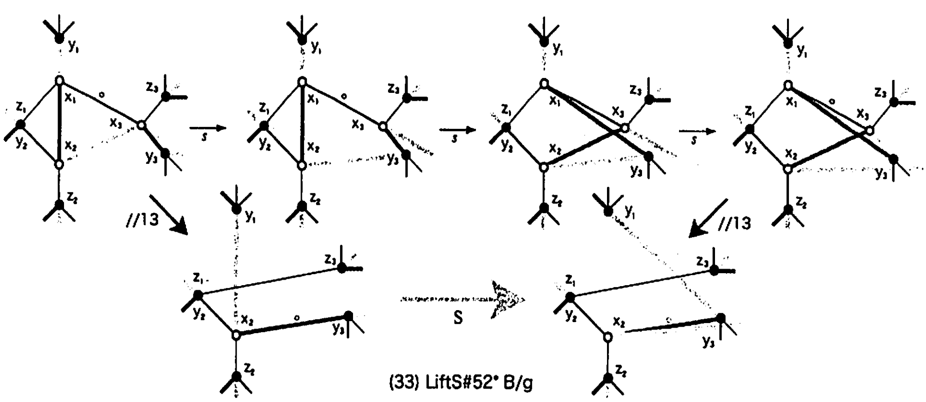
(30) LiftS#52* G/b



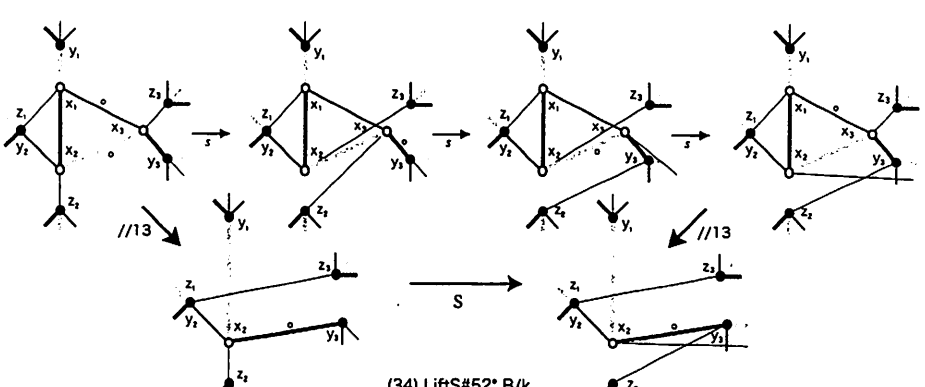
(31) LiftS#52* G/k



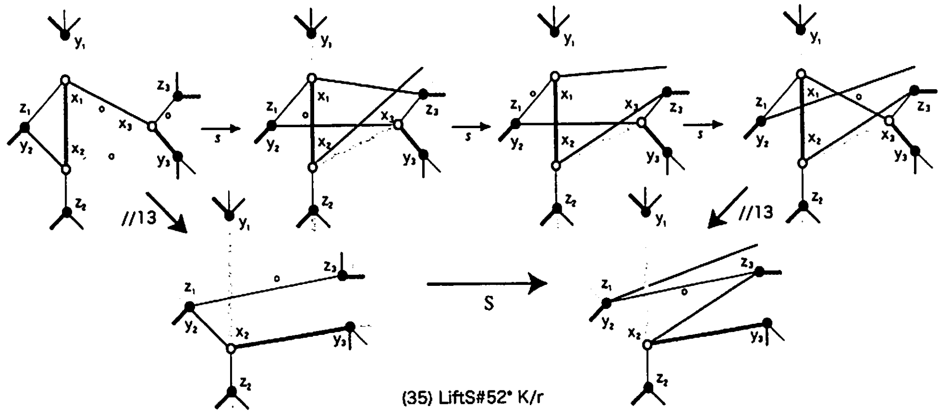
(32) LiftS#52* B/r



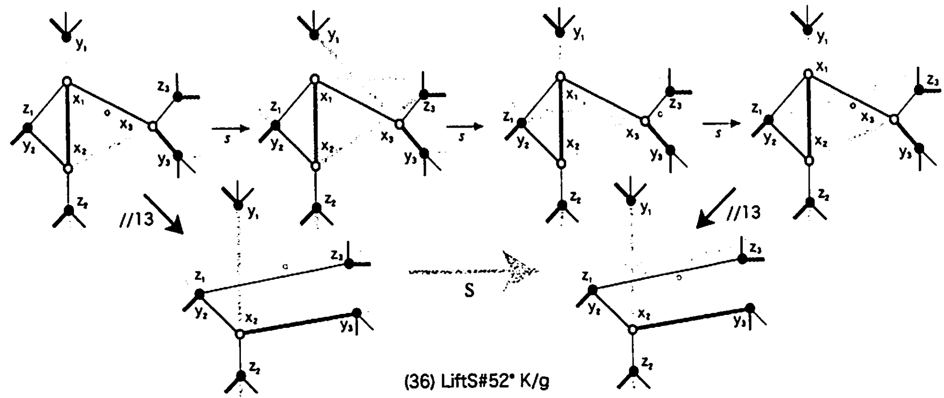
(33) LiftS#52* B/g



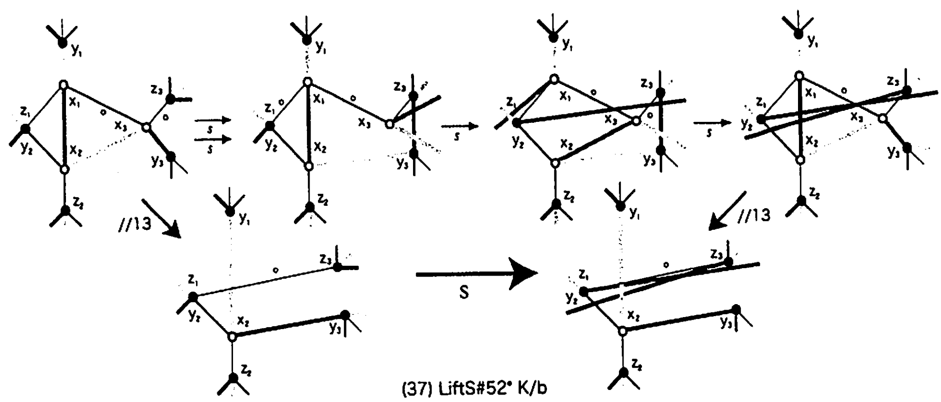
(34) LiftS#52* B/k



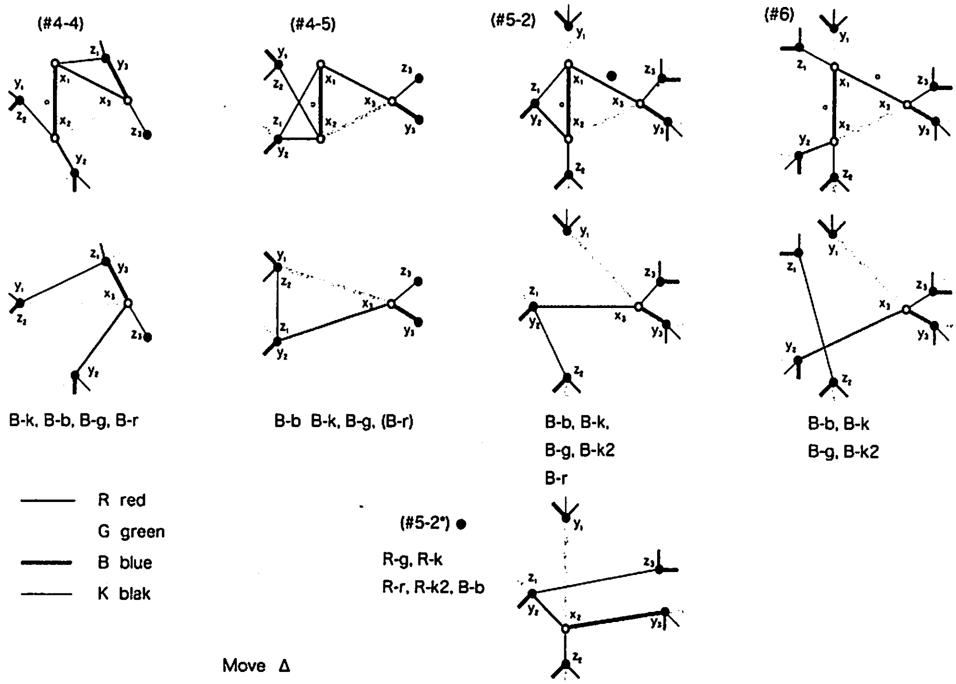
(35) LiftS#52° K/r



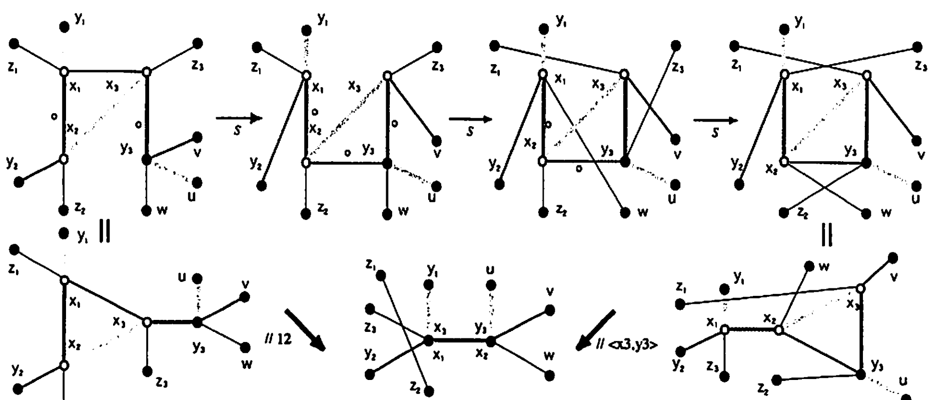
(36) LiftS#52° K/g



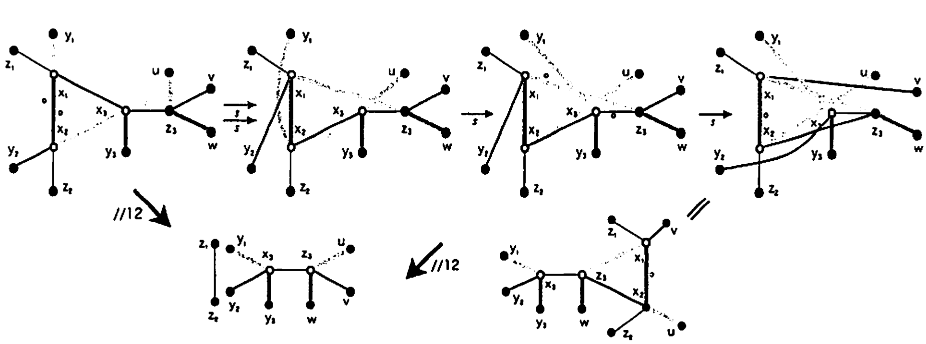
(37) LiftS#52° K/b



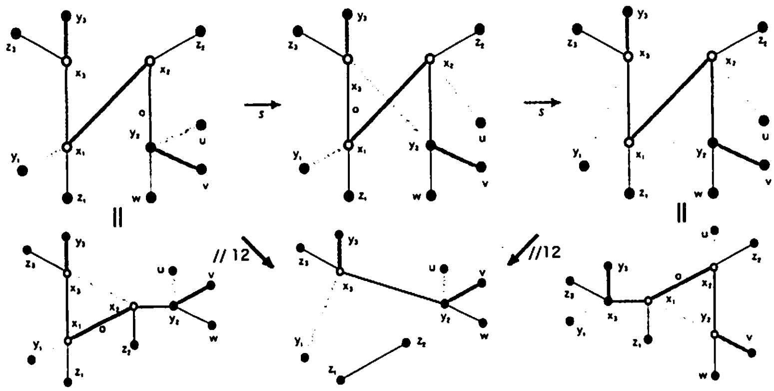
Move Δ



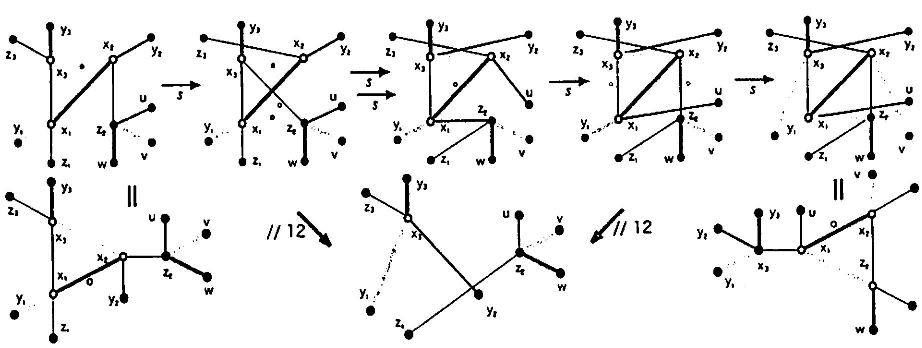
(01) Move Δ#6 B-b



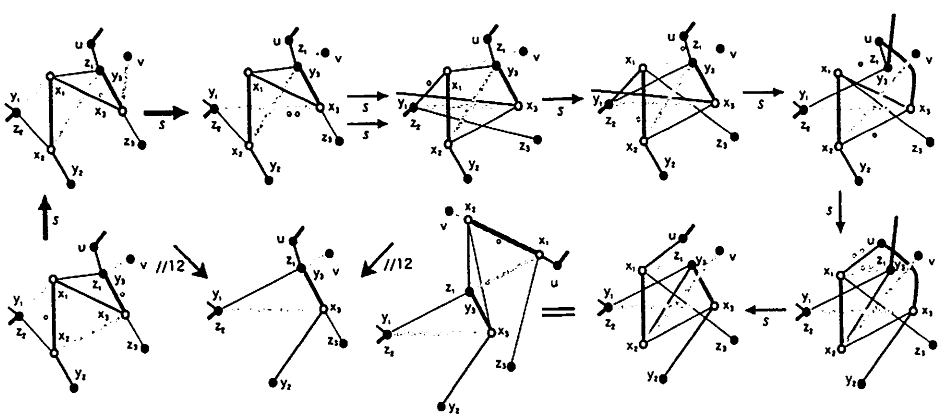
(02) Move Δ #6 B-k



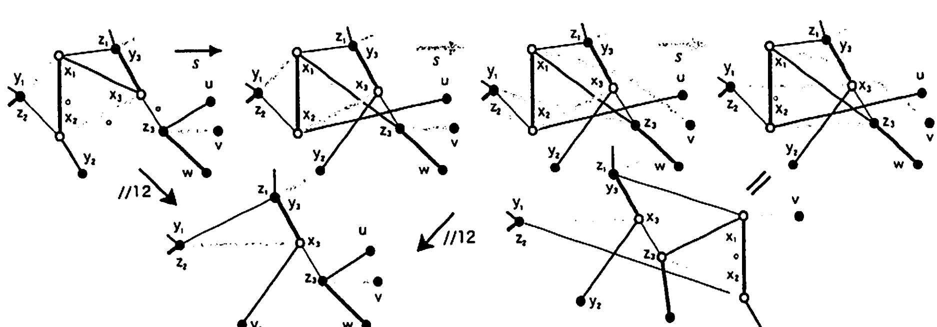
(03) Move Δ #6 B-r



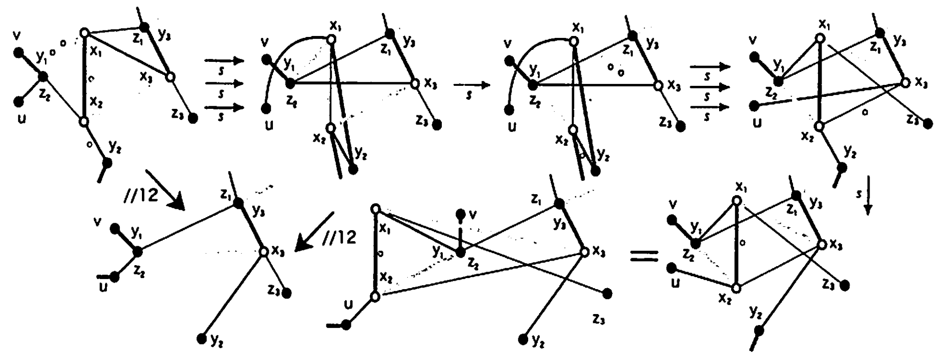
(04) Move Δ #6 B-k2



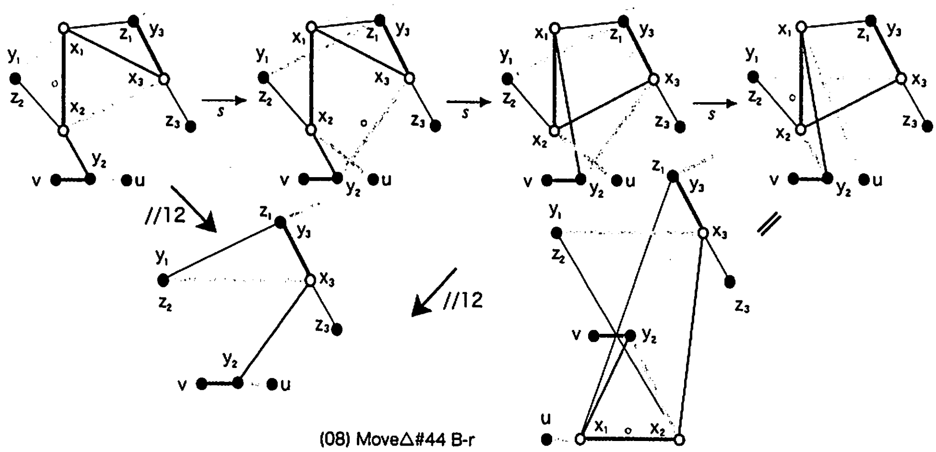
(05) MoveΔ#44 B-b



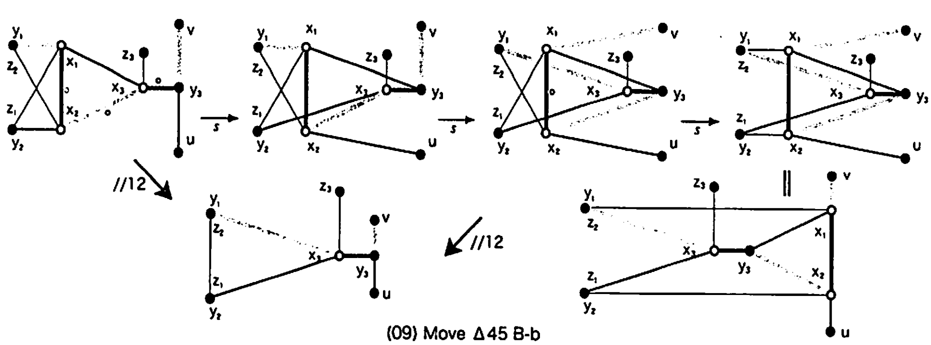
(06) MoveΔ#44 B-k1



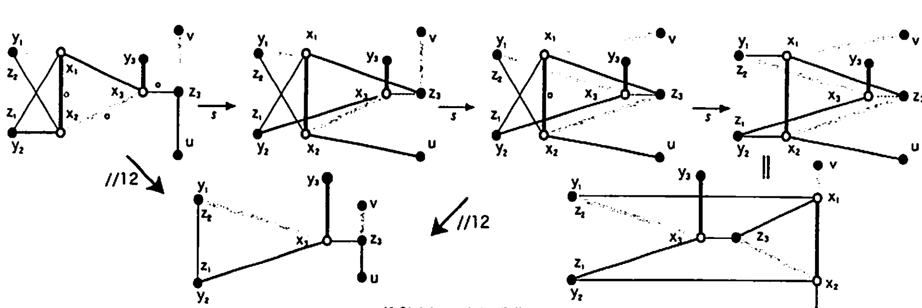
(07) MoveΔ#44 B-g



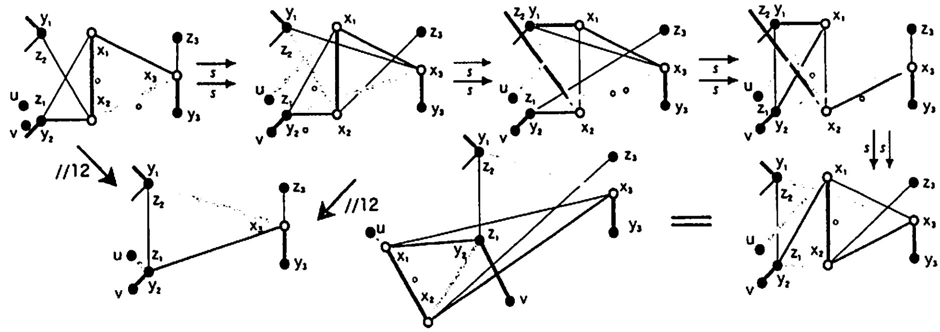
(08) MoveΔ#44 B-r



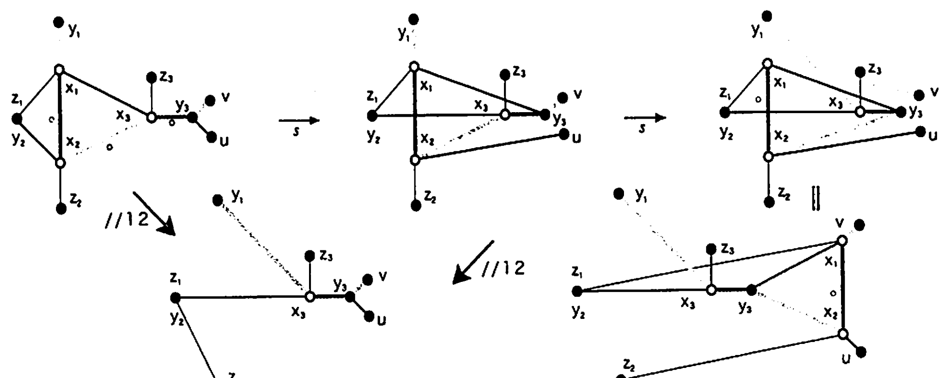
(09) Move Δ45 B-b



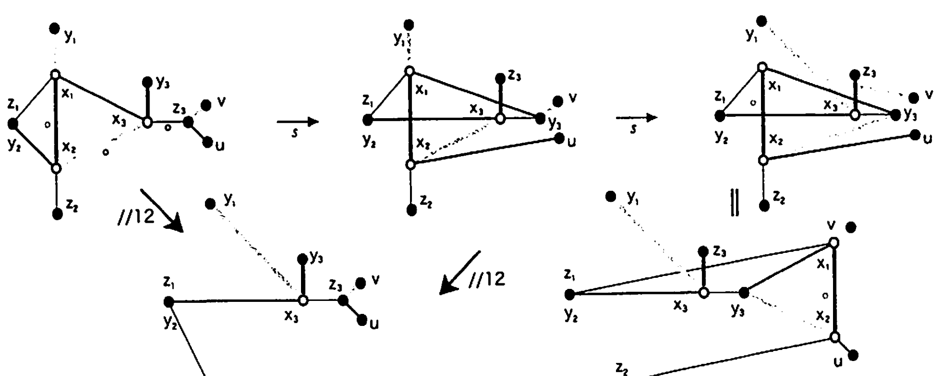
(10) MoveΔ#45 B-k



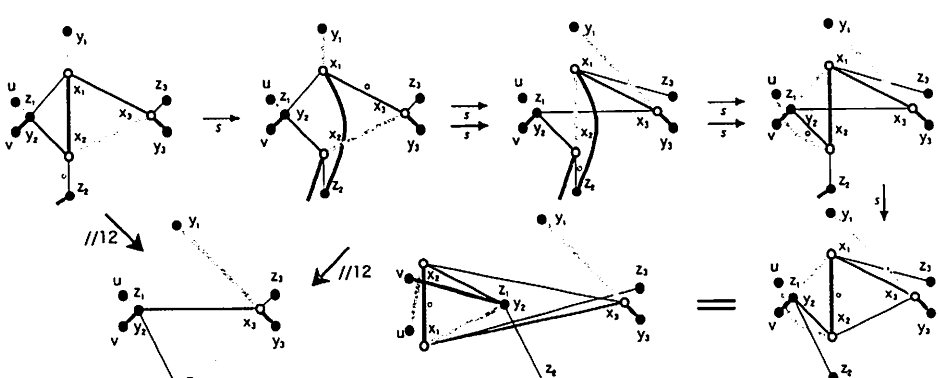
(11) Move Δ45 B-r



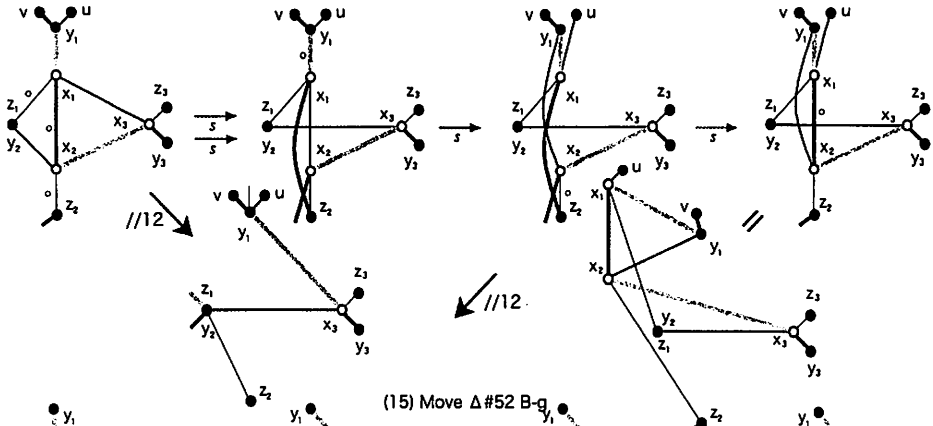
(12) Move Δ#52 B-b



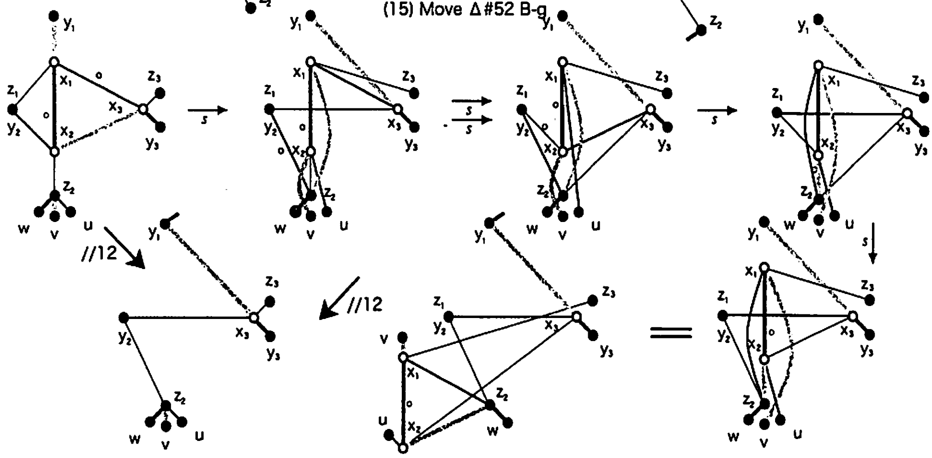
(13) Move Δ#52 B-k



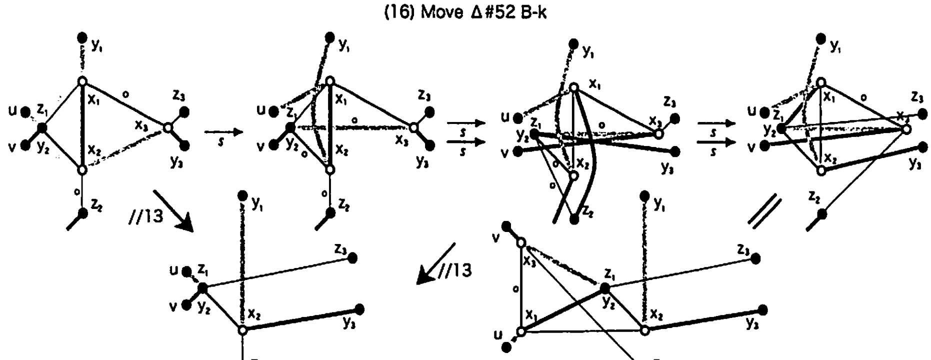
(14) Move Δ#52 B-r



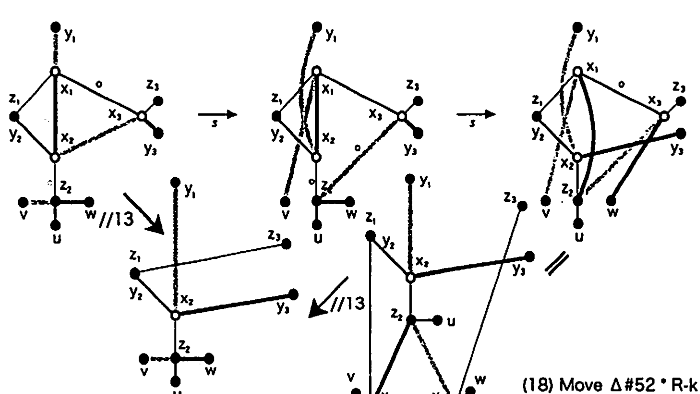
(15) Move Δ#52 B-g



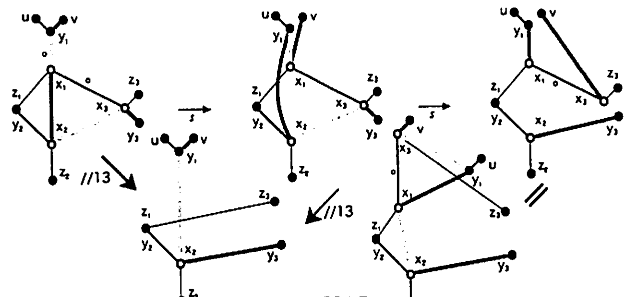
(16) Move Δ#52 B-k



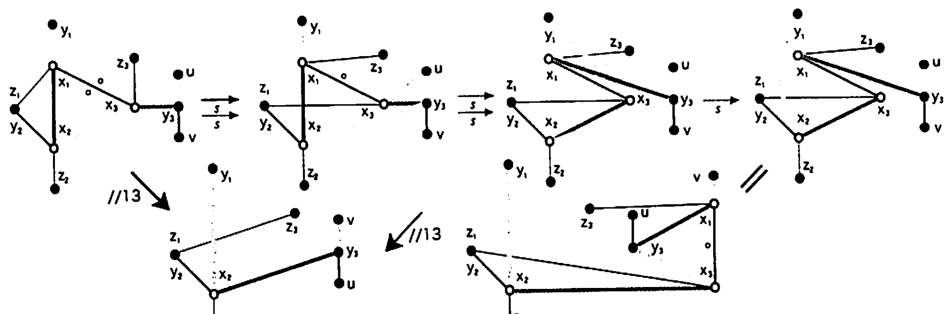
(17) Move Δ#52 * R-r



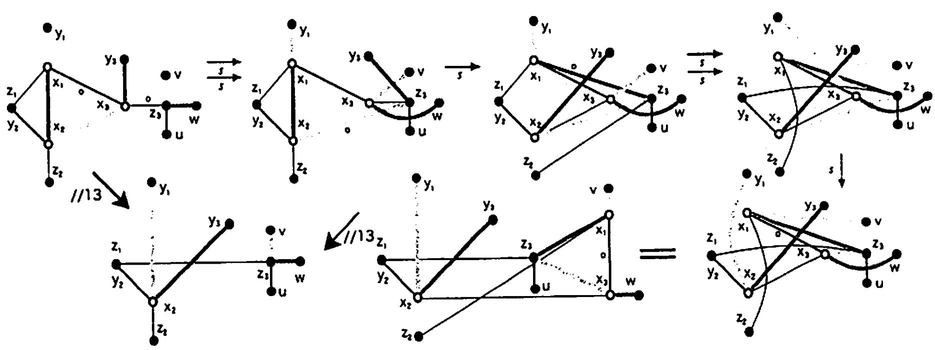
(18) Move Δ#52 * R-k



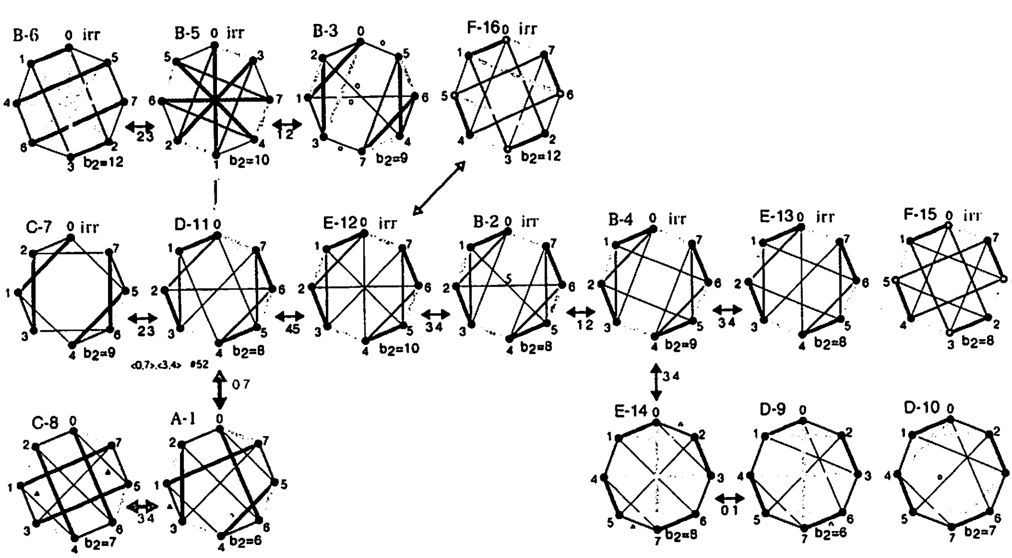
(19) Move Δ#52・R-g



(20) Move Δ#52・R-b



(21) Move Δ#52・R-k2



＊4-graph　(8頂点) S-同値