HAKONE SEMINAR 24(2008)59-66.

3-graph と 4-graph について

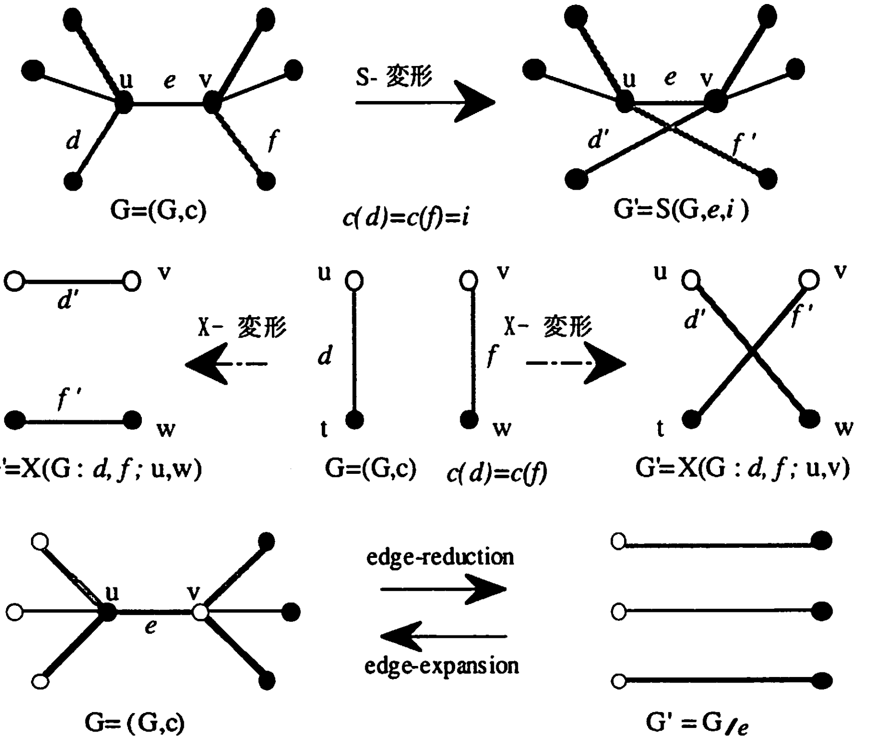
津久井　康之(専修大学)

§ Introduction

loopを持たない連結 r-regular graph $G=(V,E)$ に $c : E \to Nr = \{1,2,\ldots,r\}$ を、$e \sim e'$(共通端点を持つ) ならば $c(e) \neq c(e')$ となる map(proper edge-colouring) とするとき、(G,c) または略して G を r-graph という(すべての r-regular graph が r-graph となるわけではない)。集合 X に対し $\#X$ はX の濃度、$\#_c X$ は X の連結成分数、G がグラフのとき $|G| = \#V(G)$ はG の位数をそれぞれ表わす。

グラフ論的興味から、simple graph だけを対象とする。

Definition 1. $(S-, X-, H-$ 変形と$edge-reduction)$



$\exists H(H/\!\!/e = G_1, H/\!\!/e = G_2)$ のとき、G_2 は G_1 から $H-$ 変形で得られるという。G_2がG_1から有限回の $*-$変形で得られるとき、G_1とG_2は$*-$同値であるという$(* = S, X, H)$。

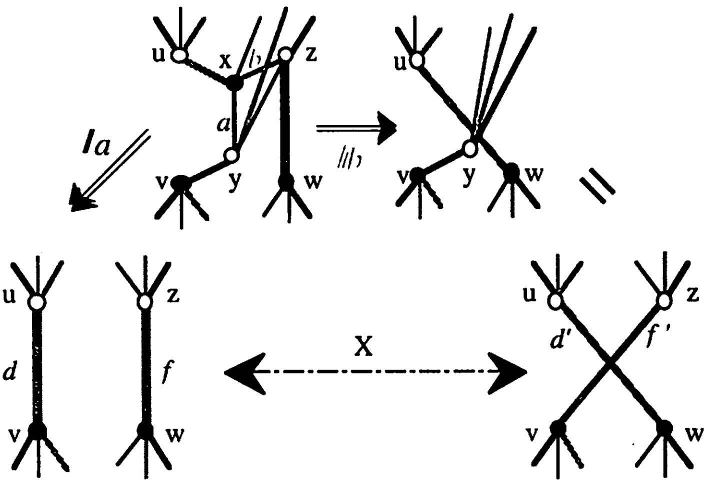
これらの変形は、違った形で、辺彩色されないr-regular graphに対しても定義される[1]。

Key words and phrases. regular graph, 3-graph, 4-graph, edge-colouring.

§ 3-graph と 4-graph

Theorem 1 [2].
$3-graph$ に対して、$S-$ 変形は $X-$ 変形であり、$X-$ 変形は $H-$ 変形である。

Theorem 2 [2].
$3-graph\ G_1, G_2$ に対して $|G_1| = |G_2|$ ならば、G_1 と G_2 は $S-$ 同値である。



X-変形は H-変形で得られる (r =3, 4)

次のことは上の図から明らかである。

Theorem 3.
$4-graph$ に対しても $S-$変形は $X-$変形であり、$X-$変形は $H-$変形である。

Remark 1. Simple r-graph ($4 < r$) については、「$X-$ 変形は $H-$ 変形」は、成り立たないであろう。

Conjecture. $4-graph$ に対しても、*Theorem 2* が成立つであろう。

§ Invariants

Definition 2. $G = (G, c)$ を連結 $r-graph$ とするとき $M \subset Nr = \{1, 2, \ldots, r\}$ に対して、$G_M = (V, c^{-1}(M))$, $G_{\overline{M}} = (V, c^{-1}(Nr - M))$ と G の部分グラフを定める。このとき、$b'_k = \sum_{\#M=k} \#_c G_M$, は $G = (G, c)$ の不変量であり、$b'_0 = \#V(G)$, $b'_1 = \#E(G)$, $b'_r = \#_c G = 1$, b'_2 は G の二色サイクルの総数となる。($b'_k (k > 2)$ の定義は将来変更することになるかもしれない。)

Definition 3. グラフ $G = (G, c)$ の辺 $e = < u, v > \in E = E(G)$ に対して、$d''(e) = d_{(G-e)}(u, v)$, $d'(e) = d_{G_{\overline{c(e)}}}(u, v)$ とする。$d_{(G-e)}$ はグラフ $G - e$ の距離、$d_{G_{\overline{c(e)}}}$ はグラフ $G_{\overline{c(e)}}$ の距離である。d' は辺彩色グラフに対して定義され、d'' は一般のグラフに対して定義される。$G - e, G_{\overline{c(e)}}$ が連結でないときは $d', d'' = \infty$。

d', d'' の長さ $\#E(G)$ の非減少列はグラフの(それぞれの同型の)不変量となる。
$d'(e)(d''(e)) = k_i$ なる辺が丁度 ϵ_i 個($\neq 0$)あるとき、表現 $k_1^{\epsilon_1} k_2^{\epsilon_2} \ldots k_l^{\epsilon_l}$ ($\Sigma \epsilon_i = \#E$) も不変量である。

§ Examples

** 3-graph と cubic graph の S-変形の GRAPH (8 頂点).*

S-,X-,H-変形は可逆でそれぞれの定義される範囲で同値関係となり、グラフを頂点とし、1回の各S-,X-,H-変形で移るとき二つのグラフが隣接すると定めるとsimple GRAPH が定義される。

8 頂点では、3-graph は 7個、cubic grpa では 5個ある。(p.4)

*** 3-graph と cubic graph (10 頂点).*

10 頂点の 3-graph は 21 個、cubic graph は19 個。3-graph でないものは、bridge を持つものと Petersen graph のみ。(p.5)

これらの GRAPH がつぎの二つ。

**** 3-graph の S-変形の GRAPH (10 頂点).* (p.6)

***** cubic graph の S-変形の GRAPH (10 頂点).* (p.7)

** 4-graph (8 頂点).*

少し見にくいが、b'_2(b'と表示) = 12 以外のものはすべて外周が二色サイクルである。799 − 804 は河野氏(北見工大)の同型でないグラフの表の番号。 (p.8)

この6個のグラフに対する非同型判定は、$A799$ と $C801$ 以外は d''−invariants で出来るが、この二つについてはこれだけでは判定出来ない。

これら16個のグラフはすべて互いにS − 同値であることが確かめられている。なお、ここで使っている各グラフの名前・番号は作業のための便宜的なもので、特別な意味はない。

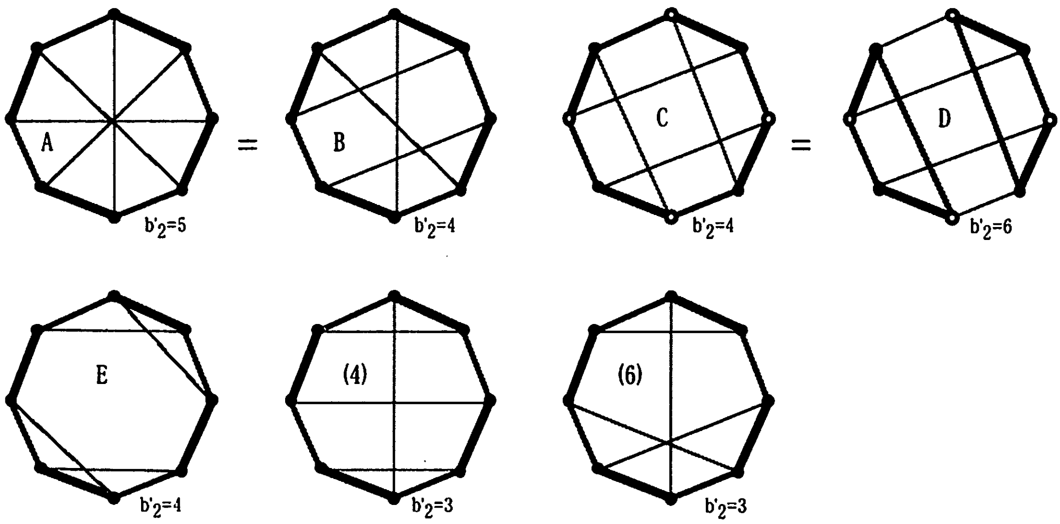
References

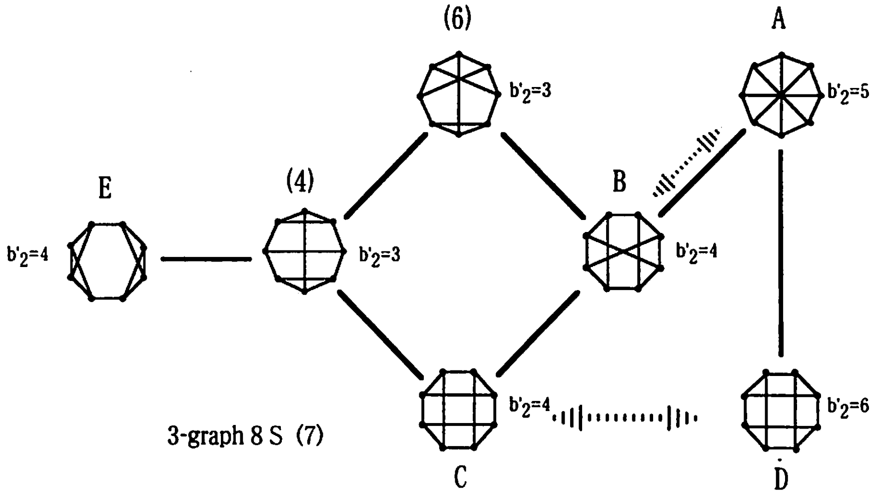
1. Tsukui Y., *Transformations of cubic graphs*, J. Franclin Inst. **333(B)** (1996), 565-575.
2. Tsukui Y., *Transformations of ede-coloured cubic graphs*, Discrete Math. **184** (1998), 183-194.

Department of Network and Information, Senshu University, 2-1-1 Higashi-Mita, Tamaku, Kawasaki, 214-8580 JAPAN.

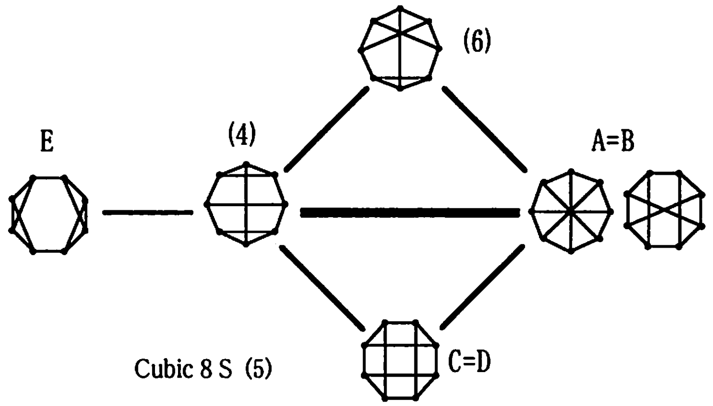
E-mail address: tsukui@isc.senshu-u.ac.jp

＊ 3-graph と cubic graph の S-変形の GRAPH (8頂点)



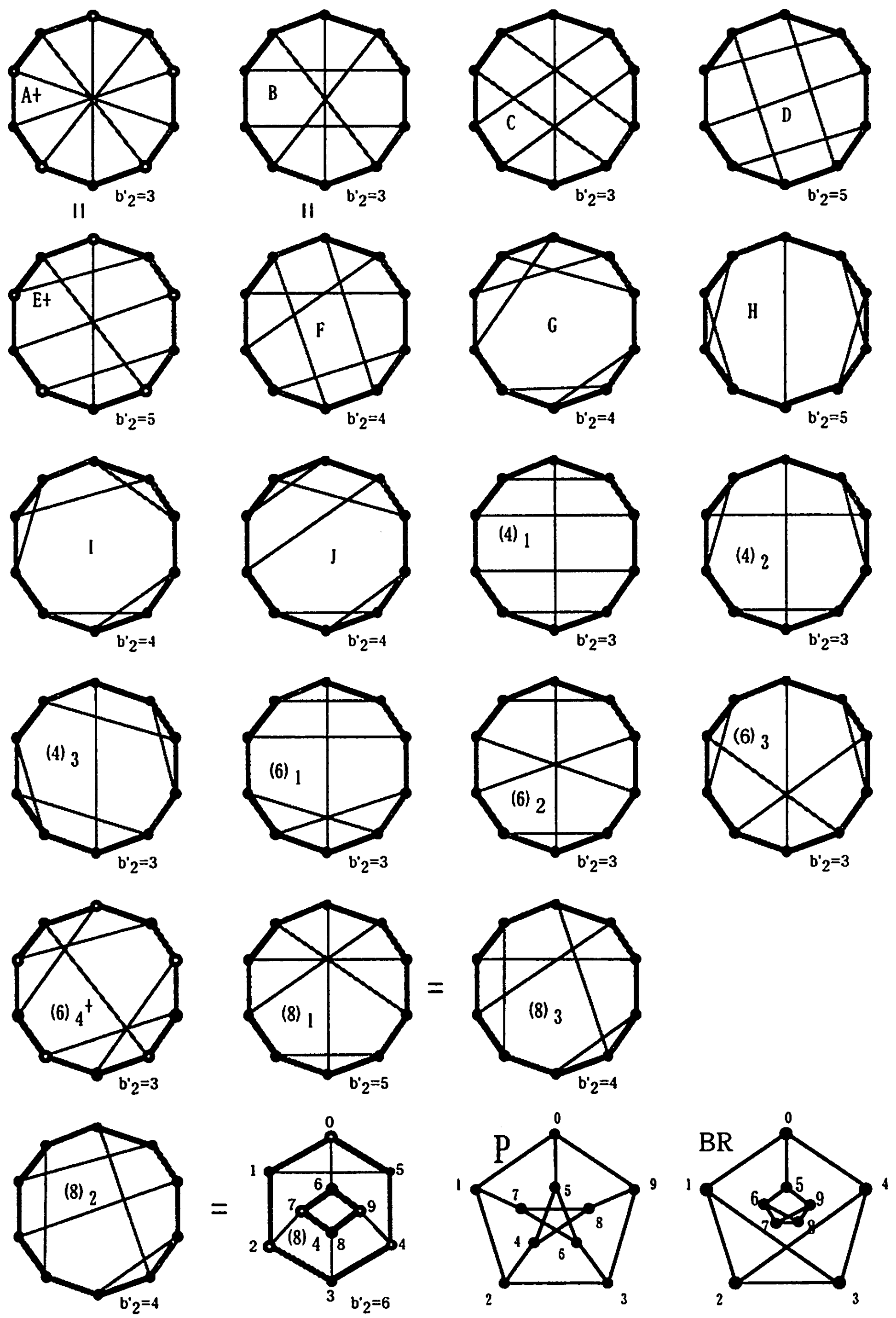


3-graph 8 S (7)

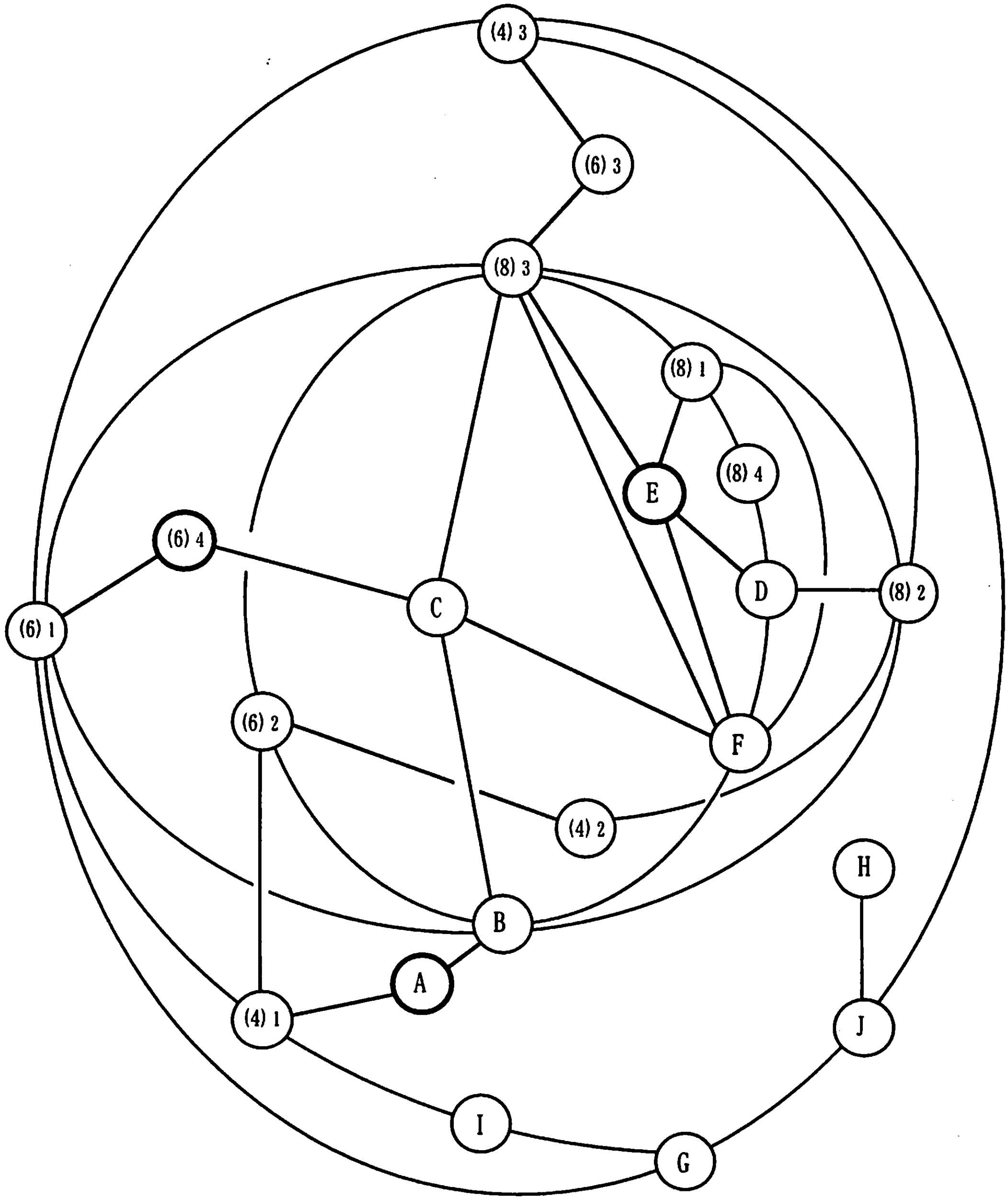


Cubic 8 S (5)

** 3-graph と cubic graph (10頂点)

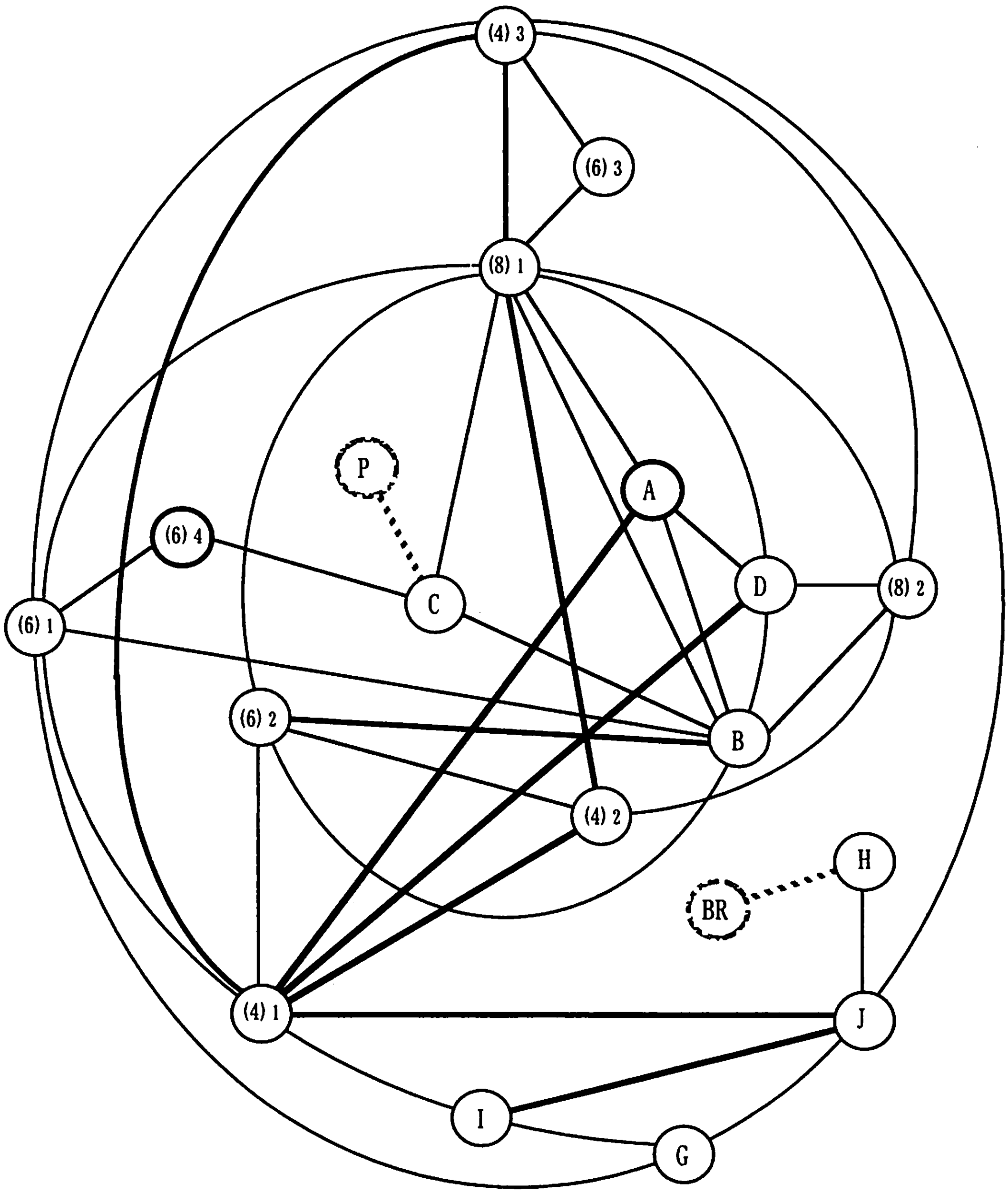


*** 3-graph の S-変形の GRAPH (10頂点)



3-graph 10 (S)　(21)

**** cubic graph の S-変形の GRAPH (10頂点)

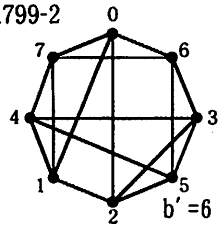


Cubic 10* (S)　　(19)

＊ 4-graph (8頂点)

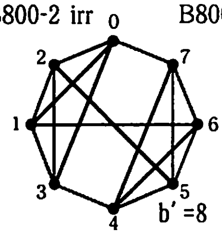
(irr は edge-irreducible を表す)

A799-2

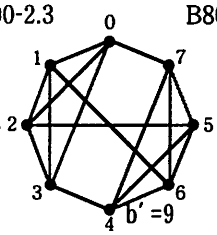


A799: 2^{16}

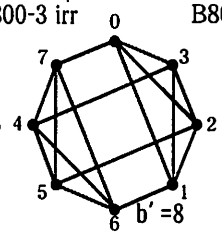
B800-2 irr



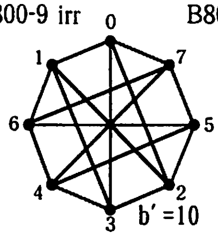
B800-2.3



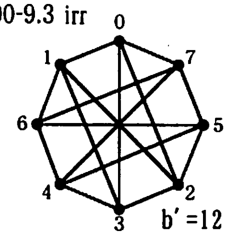
B800-3 irr



B800-9 irr

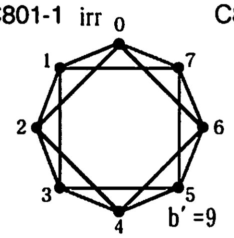


B800-9.3 irr

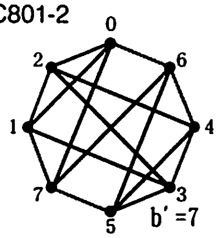


B800: $2^{12}3^{4}$

C801-1 irr

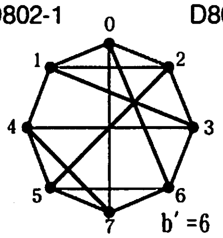


C801-2

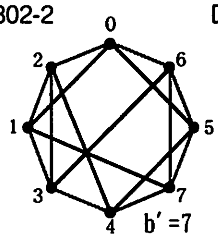


C801: 2^{16}

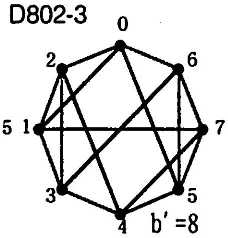
D802-1



D802-2

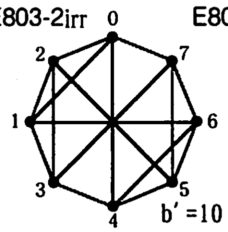


D802-3

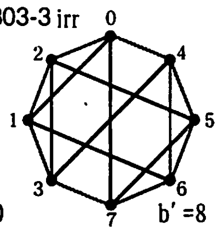


D802: $2^{14}3^{2}$

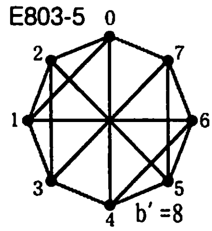
E803-2irr



E803-3 irr

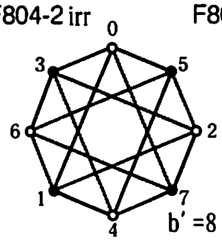


E803-5

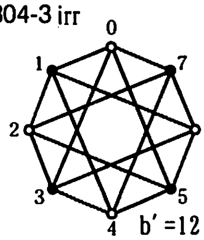


E803: $2^{10}3^{6}$

F804-2 irr



F804-3 irr



F804: 3^{16}