HAKONE SEMINAR 21 (2005) 55-58.

4-regular Graph のある族について

津久井　康之(専修大学)

§ Introduction

loopを持たない連結 4-regular graph $G=(V,E)$ に $c:E\to\{1,2,3,4\}$ を $e\sim e'$ ならば $c(e)\neq c(e')$ となる map(proper edge-colouring) とするとき、(G,c) または略して G を 4-graph という。(一般に n-graph が定義されるが、すべての n-regular graph が n-graph となるわけではない。)

4-regular graph および 4-graph の例を豊富にしたいというのがこの報告のテーマである。グラフ論的興味から、simple graph だけを対象とする。

定義 1. $Q_0(n,k)$

頂点集合を $V_0=\{v_0,v_1,\ldots,v_{n-1}\}$、辺集合を
$E_0=\{\langle v_i,v_{i+1}\rangle,\langle v_i,v_{i+k}\rangle|i=0,1,2,\ldots,n-1,(mod\ \ n)\}$, $(k<n,k\neq\frac{n}{2})$ とする単純グラフを $Q_0(n,k)$ と表わす。　$Q_0(n,k)\cong Q_0(n,n-k)$ などいろいろ有るがここでの興味ではない。

定義 2. $Q_h(n,k)$

頂点集合を $V=\{u_0,u_1,\ldots,u_{n-1},v_0,v_1,\ldots,v_{n-1}\}$、辺集合を
$E=\{\langle u_i,u_{i+1}\rangle,\langle u_i,v_i\rangle,\langle u_{i+h},v_i\rangle,\langle v_i,v_{i+k}\rangle|i=0,1,\ldots,n-1,(mod\ \ n)\}$,
$(0<h<n,h\neq\frac{n}{2},\ k<n,k\neq\frac{n}{2})$ とする単純グラフを$Q_h(n,k)$と表す。$Q_h(n,k)\cong Q_h(n,n-k)$ などいろいろ有るがここでの興味ではない。ただ取り扱いやすさのために、$0<k<\frac{n}{2}, 0<h<\frac{n}{2}$ とする。

Figure 1 は、あるグラフが、$Q_2(5,1)$と$Q_0(10,4)$と二つの形で表現される例を示している。

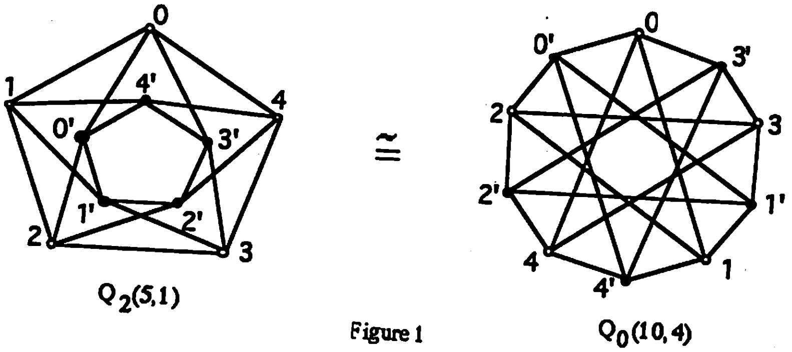


Figure 1

§ 4-Edge Colouring

$Q_0(n,k)$の頂点数はnであるから、nが奇数のときは4-graph とはなれない。

Proposition 1.
nが偶数のとき、$Q_0(n,k),(4<n)$ は$4-graph$である。

proof. $Q_0(2n,k)$の辺集合に４彩色を構成する。cycle $\{\langle v_i,v_{i+1}\rangle|i=0,1,\ldots,n-1,(mod\ \ n)$ ($Q_0(2n,k)$の outer rim と呼ぶ)、の長さは偶数だから、これは２色で彩色出来る。
$\{\langle v_i,v_{i+k}\rangle|i=0,1,2,\ldots,n-1,(mod\ \ n)\}$ (これを inner cycles と呼ぼう)の各cycleの長さ、

$\frac{2n}{(2n,k)}$ が偶数であれば、これら各cycleも残り２色で彩色できて、$Q_0(2n,k)$ は4-graphとなるから、以後、$\frac{2n}{(2n,k)}$ を奇数と仮定する(k は偶数)。

このとき、inner cycles は偶数本($(2n,k)$)ある。各inner cycle; $\{\langle v_{i+tk}, v_{i+(t+1)k}\rangle | i = 0,1,\ldots,(2n,k)-1, t = 0,1,\ldots,\frac{2n}{(2n,k)}, (mod\ \ n)\}$ に対して、辺彩色を(色 ; 1,2,3,4)、(1,2,1,2,...1,2,3) と選ぶ。
頂点$\{v_i | i = 0,\ldots,\frac{2n}{(2n,k)}\}$ に接合する辺の色は$\{1,3\}$であり、頂点$\{v_{2n-k+i} | i = 0,\ldots,\frac{2n}{(2n,k)}\}$ に接合する辺の色は$\{2,3\}$であり、他の頂点には$\{1,2\}$の色の辺が接合している。辺 $\langle v_0, v_1\rangle$ に例えば色２を選ぶことに因って他の辺の色も決めることが出来て、全体で４色で辺彩色が出来る。

$P(n,k) = Q_h(n,k) - \{\langle u_{i+h}, v_i\rangle | i = 0,1,\ldots,n-1, (mod\ \ n)\}$ とすると、$P(n,k)$ は、Generalized Petersen graph と呼ばれる、3-regular graph である。$P(5,2)$ がオリジナルのPetersen graph である。Petersen graph は、頂点数最小の、3-graph でない、単純グラフとして知られている。これに関して次の定理がある。

Proposition [Watkins,Castagna-Prins]. *Generalized Petersen graph* $P(n,k)$, $(4 < n)$、は $P(5,2)$ を除いて $3-edgecolourable$ である。

Proposition 2.
$Q_h(n,k)$ $(2 < n, 0 < h)$ は $4-graph(4-edgecolourable)$ である。

proof. [Watkins,Castagna-Prins] により $Q_h(n,k)$ は $n \leq 5$ を除いて4-edge colourable である。$n \leq 5$ の場合は具体的に辺彩色を与えることで示される。Figure 2,3では、太い線と細い線がそれぞれ偶数長のHamilton cycle になっていることで４色彩色できることが確認される。

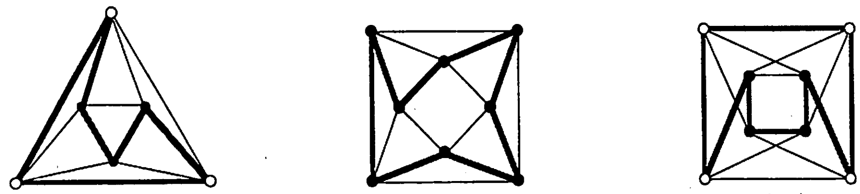


Figure 2.

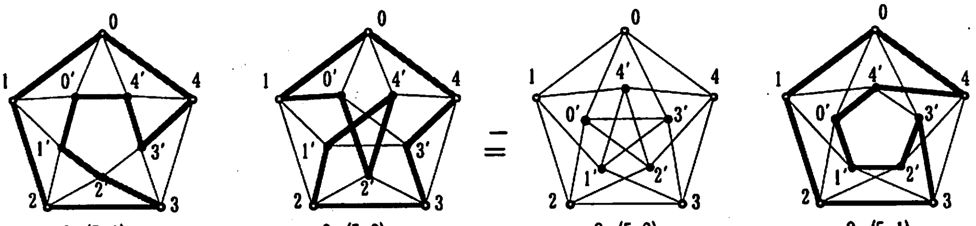


Figure 3.

§ $Q_0(2n,m)$ と $Q_h(n,k)$

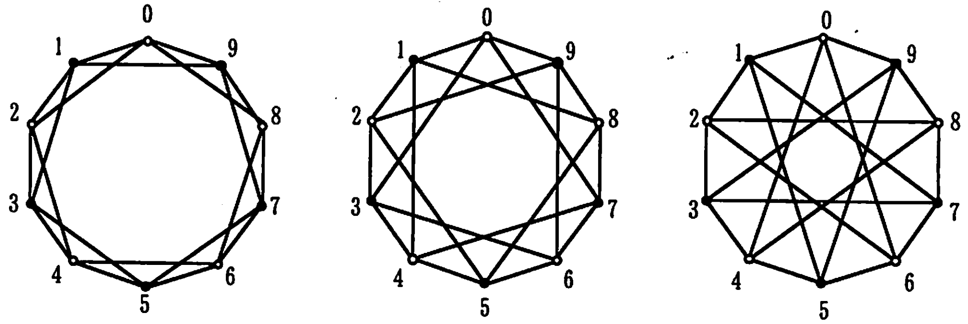
$Q_0(n,m)$ は $n < 5$ では定義されない。２つのgraphの集合を次のように定める$(2 < n)$。

$$Q_0(n) = \bigcup_m \{Q_0(2n,m) | 1 < m < \frac{n}{2}\},\ Q_+(n) = \bigcup_{h,k} \{Q_h(n,k) | 1 < h < \frac{n}{2}, 0 < k < \frac{n}{2}\}$$

$Q_0(10,4) = Q_2(5,1)$ のように、一般に $Q_0(n) \cap Q_+(n) \neq \phi$ である。この節では、$Q_0(n)$ と $Q_+(n)$ の独立性について論じよう。$Q_+(5)$ のグラフは全てnon-bipartiteであり、$Q_0(10,3)$ はbipartiteなので、$Q_0(10,3) \notin Q_+(5)$。これを一般化すると：

Proposition 3.
$Q_0(2n-1) \not\subset Q_+(2n-1)$, $(2<n)$.

逆に、$Q_1(5,2)$は3辺形(長さ3のサイクル)Δ を含み、non-bipartite, non-planar である。$Q_0(5)=\{Q_0(10,2), Q_0(10,3), Q_0(10,4)\}$について見ると、$Q_0(10,2)$はplanar、$Q_0(10,3)$はbipartite、$Q_0(10,4)$は$\Delta$を含まないから、$Q_1(5,2) \notin Q_+(5)$。以下では、これを一般化する。



$Q_0\,(10,\,2)$ $Q_0\,(10,\,3)$ $Q_0\,(10,\,4)$

Figure 4.

Lemma 1.
$Q_0(2n-1,2) \searrow Q_0(2(n-1)-1,2)\,(4<n)$.
($\searrow$ は有限回の辺の除去と縮約のによる、graph minor を表す)

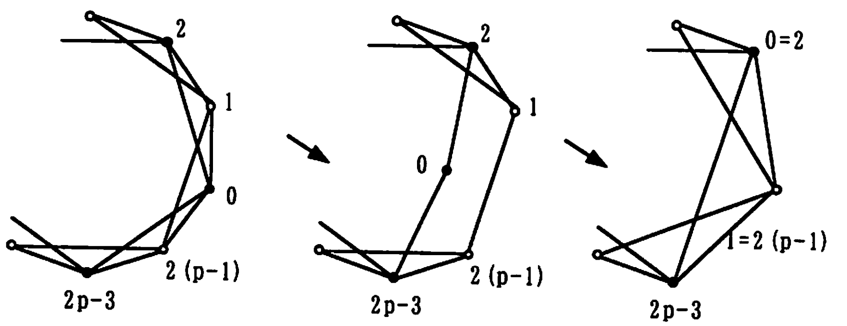


Figure 5.

Lemma 2.
$Q_h(2n-1,2)$は$non-planar$である$(0<h, 2<n)$。

proof. $Q_h(2n-1,2) \searrow P(2n-1,2) \searrow Q_0(2n-1,2)$と、Lemma 1から、$Q_h(2n-1,2) \searrow Q_0(5,2)=K_5$。$\searrow$はplanarity を保つから、$Q_h(2n-1,2)$は non-planar である。

Proposition 4.
$Q_+(2n-1) \not\subset Q_0(2n-1)$, $(2<n)$.

proof. $Q_h(2n-1,2), (0<h)$はnon-bipartite,nonplanarで、Δを(2n-1)個含む。
$Q_0(2n-1)$の元、$Q_0(2(2n-1),k)$は、kが奇数のときbipartite,$k=2$のときplanarで、$\frac{2(2n-1)}{k}=3(2<k)$のときはΔを持たない。$k=\frac{2(2n-1)}{3}$のときはΔを$k(<2n-1)$個持つ。よって、$Q_h(2n-1,2) \notin Q_0(2n-1)$, $Q_+(2n-1) \not\subset Q_0(2n-1)$.

$Q_0(3)=Q_+(3)=\{Q_1(3,1)\}$, $Q_0(4)=Q_+(4)$であるが、一般には「$Q_0(2n)=Q_+(2n)$」は不明である。

§ Lens Space

Lens space をgenus 1 の Heegaard splitting で表現したとき、$L(p,q)$ は 2-handle の core は solid torus の longitude 方向に p回、meridian 方向に q回まわる。figure 6 は $L(5,2)$。

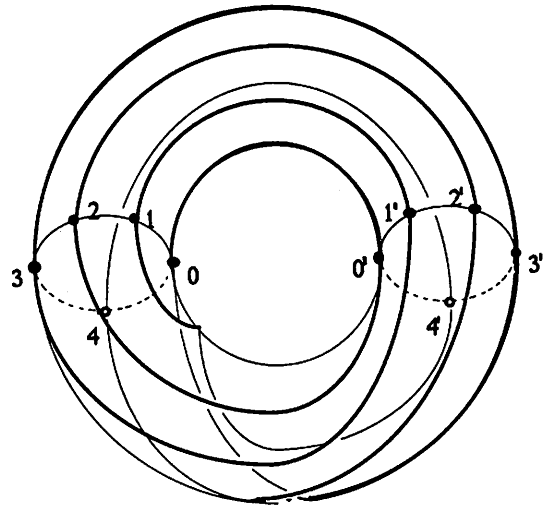


Figure 6

この 2handle の core の torus 上の regular neghbourhood の boundary は core と平行な 2 本の loop である。この状態をグラフ表現したものは、$Q_2(10,1)$ である。これは次のように一般化される。

Proposition 5. $Q_{2h}(2p,1)$ は *Lensspace* $L(p,h)$を表現する。

References

1. Watkins M.K., *A theorem on Tait colorings with an application to the generalized Petersen graphs*, J. Combin. Theory 6 (1969), 152-164.
2. Castegna F. and Prins G., *Every generalized Petersen graph has a Tait coloring*, Pacific J. Math. 40 (1972), 53-58.