

同相な多様体を表現するグラフの変換について I

津久井 康之(専修大学)

§ Introduction

loopを持たない連結 4-regular graph $G = (V, E)$ に $c : E \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ を $e \sim e'$ ならば $c(e) \neq c(e')$ となる map (proper edge-colouring) とするとき、 (G, c) または略して G を 4-graph という。(一般に n -graph が定義されるが、すべての n -regular graph が n -graph となるわけではない。)

4-graph $G = (G, c)$ の任意の一色 i を除いて出来る 3-graph $G_{\{h,j,k\}} = G_i^-$ は閉曲面を表現するが、 G_i^- にこの「閉曲面 $\times I$ 」の「閉曲面 $\times \{0\}$ 」を貼付けるということ、4色について行くと 4 種類の異なる境界を持つ compact 3-manifold $W(G) (= W(G, c))$ を得る。 $W(G)$ の境界に S^2 がある場合はそれら全てに 3-ball を貼付けてできる compact 3-manifold を $M(G)$ と記す。ここでは $M(G)$ が閉多様体となる場合を想定した記述をする。

定義 1 (H_0 -reduction).

4-graph G の辺 $e = \langle u, v \rangle$ ($c(e) = i$) について、 $G - \{u, v\}$ の対応する同色の辺を結んで得られる 4-graph を G の edge-reduction と呼び、 $G // e$ と記し、この反対を edge-expansion と呼ぶ(図1)。

3-graph G_i^- の vertex u を含む component を $G_i^-(u)$ とするとき、 $G_i^-(u) \neq G_i^-(v)$ かつ $G_i^-(u), G_i^-(v)$ の内の少なくとも 1 つが S^2 を表現するときの edge-reduction を type H_0 と呼ぶことにする。

4-graph H が G から有限回の H_0 -reduction と H_0 -expansion で得られるとき H_0 -equivalent であると云い、 $H \equiv G$ と書く。 $H \equiv G$ ならば、 $W(H) \approx W(G)$ (同相)である。

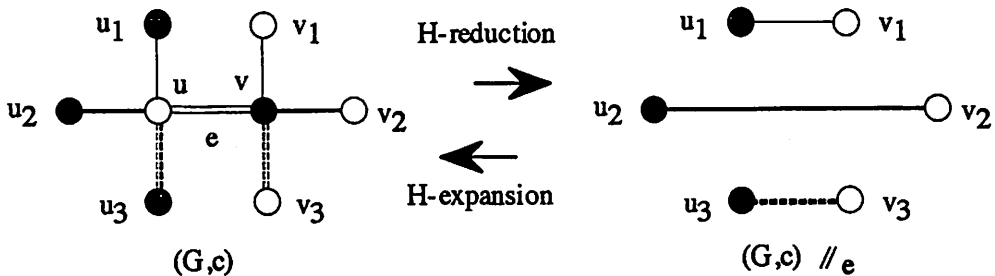


図 (1)

定義 2 (graph の sum).

2つの 4-graph G と H の頂点 u, v について、 $G \cup H - \{u, v\}$ の対応する同色の辺を結んで得られる 4-graph を G と H の connected sum と呼び、 $G \# H / (u, v)$ と記し、この反対を decomposition と呼ぶ(図2)。

この研究は専修大学2000年度研究助成の補助を受けて行なわれたものである。

定理. G と H を2つのbipartite 4-graphとする。 $u \in V^+(G)$, $x, z \in V^-(H)$ で、 x と z の距離が2であるとき、 $(G\#H)/(u, z) \equiv (G\#H)/(u, x)$

系. 4-graphのconnected sumは、 H_0 -equivalentの意味で、一意に定まる。

§ 定理のProof

2頂点の4-graphを θ で表わす。 $G' = G + \theta$ とし、 $G' + H/(ab, yx)$ を作る(図4, 4-1~4-3)。これに対して、 H_0 -reductionをくり返して、 $G\#H/(u, x)$ と $G\#H/(u, z)$ を得ることから、 $G\#H/(u, x) \equiv G\#H/(u, z)$ (図4)。

この報告では、境界のない閉多様体を対象とした記述になっているが、境界のあるコンパクト多様体に対してもこの手法で証明することができる。

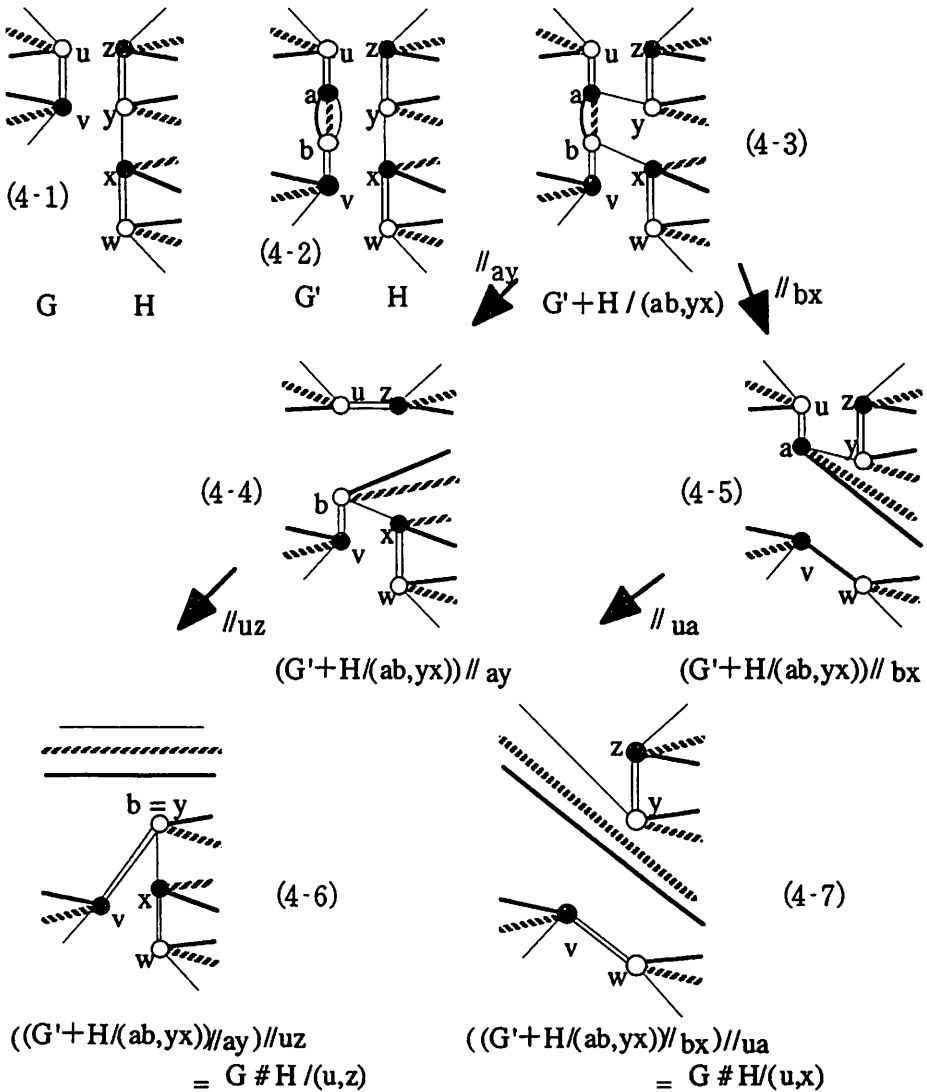


図 (4)

REFERENCES

1. 津久井 康之, *Simple compact 3-manifolds (1)*, 箱根セミナー記録 9 6 (1996), 79–89.
2. 津久井 康之, 辺着色グラフと曲面の同相について, *Hakone Seminar vol.15* (1999), 65–70.

DEPARTMENT OF NETWORK AND INFORMATION, SENSHU UNIVERSITY, 2-1-1 HIGASHI-MITA,
TAMAKU, KAWASAKI, 214-8580 JAPAN.

E-mail address: tsukui@isc.senshu-u.ac.jp