

辺着色グラフと曲面の同相について

津久井康之(専修大学経営)

1. 3-Graph

ループのない連結なcubic (3-regular) graph $G=(V, E)$ に $c:E \rightarrow \{1, 2, 3\}$ を、 $e \sim e'$ (edge-adjacent) ならば、 $c(e) \neq c(e')$ となる、map (edge-colouring) とするとき、 (G, c) または、略して G を 3-graph という(あまりよい名前とは思わないがここでは前例に従う)。(一般に n -graph が定義されるが、すべての n -regular graph が n -graph となるわけではない)。

このとき、sub-graph $G_{ij}=(V, \{e \in E; c(e)=i \text{ or } j\})=G_k \subset (G, c)$, ($\{i, j, k\}=\{1, 2, 3\}$) はいくつかの cycle (2色cycle, (i, j) -cycleという)になる。 $b_2(G, c)=\sum \#G_{ij} (i \neq j)=\sum \#G_k \geq 3$ は (G, c) の同型の不変量である。ここで $\#G$ は G の component の数を表し

$G_k=(V, \{e \in E; c(e) \neq k\})$, ($G_{ij}=G_k$, $\{i, j, k\}=\{1, 2, 3\}$)。

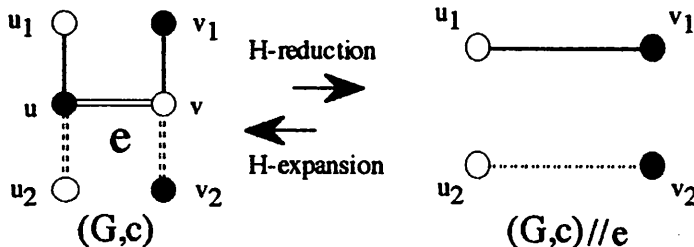
グラフの同型を \cong で、位相空間の同相は \simeq で示すことにする。

定義 [characteristic of an edge]

e を $c(e)=i$ なる G の辺とする。 $\chi:E \rightarrow \{0, 1, 2\}$ を次のように定義して、 $\chi(e)$ を e の characteristic という。(e の端点を ∂e で示す。)

- (1) ∂e の2点が $G_j=(G_{jk}, \{i, j, k\}=\{1, 2, 3\})$ の異なる cycle にあるとき、 $\chi(e)=0$ 、
- (2) ∂e の2点間の距離が G_j で、even のとき、 $\chi(e)=1$ 、
- (3) ∂e の2点間の距離が G_j で、odd のとき、 $\chi(e)=2$ 。

G が bipartite ならば、 $\chi(e) \neq 1$ である。



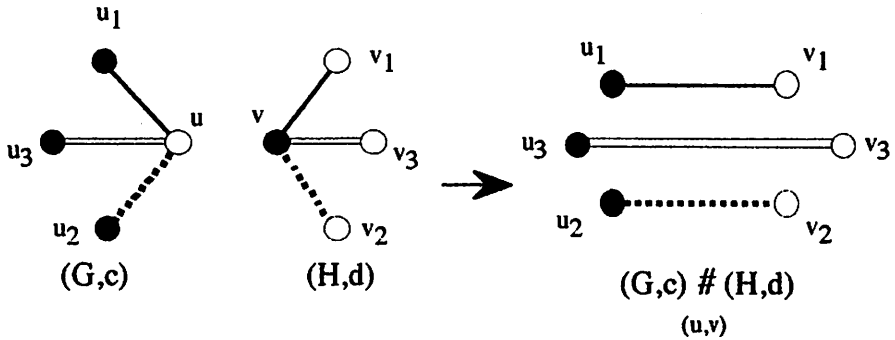
(図 1)

定義 [H-reduction]

e を G の辺とするととき図1で示されるグラフの変形 $(G, c) \rightarrow (G, c) // e$ を H-reduction (at e) とい、逆変形を H-expansion とい。H-reduction は bipartiteness を保存する (H-expansion も bipartiteness を保存するようにできる)。

$\chi(e) = i$ の時の H-reduction (expansion) を H_i -reduction (expansion) と呼ぶ ($i=0, 1, 2$)。

一般には、H-reduction (H-expansion) は連結性を保存しない。

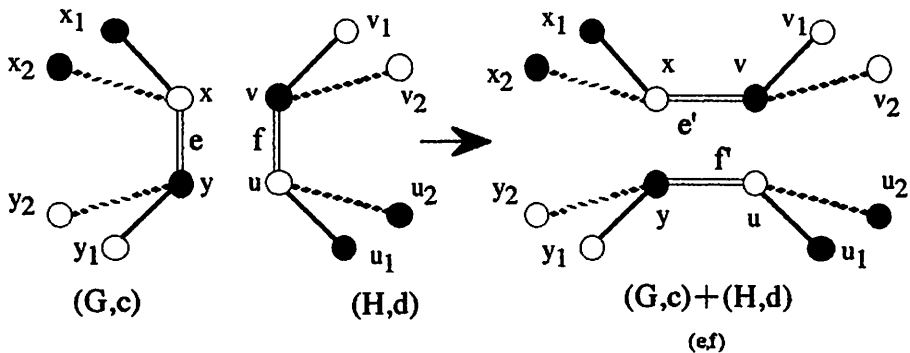


(図 2)

定義 [sum]

2つの 3-graph (G, c) と (H, d) に対して、図2の変形で得られる 3-graph を、sum とい、 $(G, c) \# (H, d) / (u, v)$ で表す。sum は bipartiteness を保存する。

一般には $\text{sum } (G, c) \# (H, d) / (u, v)$ はグラフの同型の意味では一意には定まらない (u, v に依存する)。



(図 3)

定義 [addition]

2つの 3-graph (G, c) と (H, d) の辺 e と f ($c(e) = d(f)$) について、図3の変形で得られる 3-graph を (G, c) と (H, d) の addition とい、 $(G, c) + (H, d) / (e, f)$ で表す。addition は bipartiteness を保存する。 $(G, c) + (H, d) / (e, f) \equiv (H, d) + (G, c) / (f, e)$ 。

2. グラフと曲面

3-graph (G, c) を幾何学的グラフと見て、各 component $C \subset G_{ij}$ ($i \neq j$) に 2-disk を貼って得られる 2次元多面体 $P(G, c)$ は閉曲面となる。閉曲面 $P(G, c)$ は G が bipartite なときに orientable, そうでない時 non-orientable である。orientable なときは、その頂点集合が $V(G, c) = W \cup B$ ($W \cap B = \emptyset$) と (white vertex, black vertex) の二つに分けられるから、その一方(ここでは white)を指定してその頂点での colour の順序(例えば 1, 2, 3)を定めることで orientation を定めることができる。

逆に、任意の閉曲面 F に対して、その三角形分割の dual cell 分割をとれば、それが自然に 3-graph (G, c) をあたえており、 $P(G, c) \cong F$ となる。

H_0 -reduction (H_0 -expansion) はグラフの表現する homeo type を変えない。すなわち:

Theorem 1.

$\chi(e) = 0$ ならば、 $P(G, c) \cong P((G, c) // e)$.

Theorem 2.

(1) $\chi(e) = 1$ ならば、 $P(G, c) \cong P((G, c) // e) \# P^2$,

(2) $\chi(e) = 2$ ならば、 $P(G, c) \cong P((G, c) // e) \# T^2$,

(3) $P((G, c) \# (H, d)) \cong P(G, c) \# P(H, d) \cong P((G, c) + (H, d))$.

ただし $\#$ は曲面に対して通常の connected sum を表し、 P^2 は projective plane を、 T^2 は genus 1 torus を表す。

この定理から、ただちに閉曲面の分類が 3-graph によってできる。

この報告では、Theorem 1. を用いて、曲面の同相とそれらを表現するグラフの変形について、もう少し詳細に調べてみたい。それは、Vince [Vince] による次の定理3の内容を調べることである。

Definition [H_0 -equivalence]

3-graph (H, d) が (G, c) から有限回 (≥ 0) の H_0 -reduction and/or H_0 -expansion で得られる時 H_0 -equivalent であると言い、 $(H, d) \Leftrightarrow (G, c)$ と記す。

Theorem 3. [Vince]

$P(G, c) \cong P(H, d)$ となる必要十分条件は、 $(H, d) \Leftrightarrow (G, c)$ である。

それは次の定理を示すことになる。

Theorem 4.

異なる 3-graph (G, c) と (H, d) について $b_2(G, c) = b_2(H, d) = 3$, $P(G, c) \cong P(H, d)$ ならば、3-graph の有限列 $((G_0, c_0), (G_1, c_1), (G_2, c_2), \dots, (G_n, c_n))$ が存在して、 $(G, c) \equiv (G_0, c_0)$, $(G_n, c_n) \equiv (H, d)$, $b_2(G_i, c_i) \leq 4$ であり、 (G_i, c_i) は (G_{i-1}, c_{i-1}) から H_0 -reduction または H_0 -expansion によって得られる ($i=1, 2, \dots, n$)。

じつは、Vince の論文[Vince] をその気になって良く読むと上の定理は証明されているようにも思える。「ようにも思える」というのは著者自身がそれを意識していないようなことと、証明に使うグラフの頂点数による induction の働きが明確でないことによる。

この報告では触れられないが、この方法を 3-graph を 4-graph に置き換えることで、曲面でなく (closed) 3-manifold を表現する辺着色グラフが得られるが、簡単に拡張できる部分と全く問題が難しくなる面がある。この報告はその違いを明確にすることをねらいとして 3-graph と曲面の関係を復習しているものである。

Proposition 1. H_0 -equivalence の意味で 3-graph の sum (addition) は unique である。

Proof. 図3の $(G, c) + (H, d) / (e, f)$ に対して、 $e' = \langle x, v \rangle$ で H_0 -reduction すると、 $(G, c) \# (H, d) / (x, v)$ が得られ、 $f' = \langle y, u \rangle$ で H_0 -reduction すると $(G, c) \# (H, d) / (y, u)$ が得られる。よって、 $(G, c) \# (H, d) / (x, v) \Leftrightarrow (G, c) + (H, d) / (e, f) \Leftrightarrow (G, c) \# (H, d) / (y, u)$ 。

これが分かるとあとは Vince の論文そのままが良い。以下に蛇足を付け加える。

Proposition 2. $b_2(G, c) = 3$ である 3-graph (G, c) に対して $\text{order}(G) > 6$ (non-bipartite では > 4) ならば、 $(H, d) \# (K, e) \Leftrightarrow (G, c)$ で、 $b_2(H, d) = b_2(K, e) = 3$ となる 3-graphs (H, d) と (K, e) が存在する。ただし $\text{order}H + \text{order}K = \text{order}G - 2$, $\text{order}H, \text{order}K > 3$ 。

Proof. G が bipartite とそうでないときに分けて、次の図4と図5で示す。

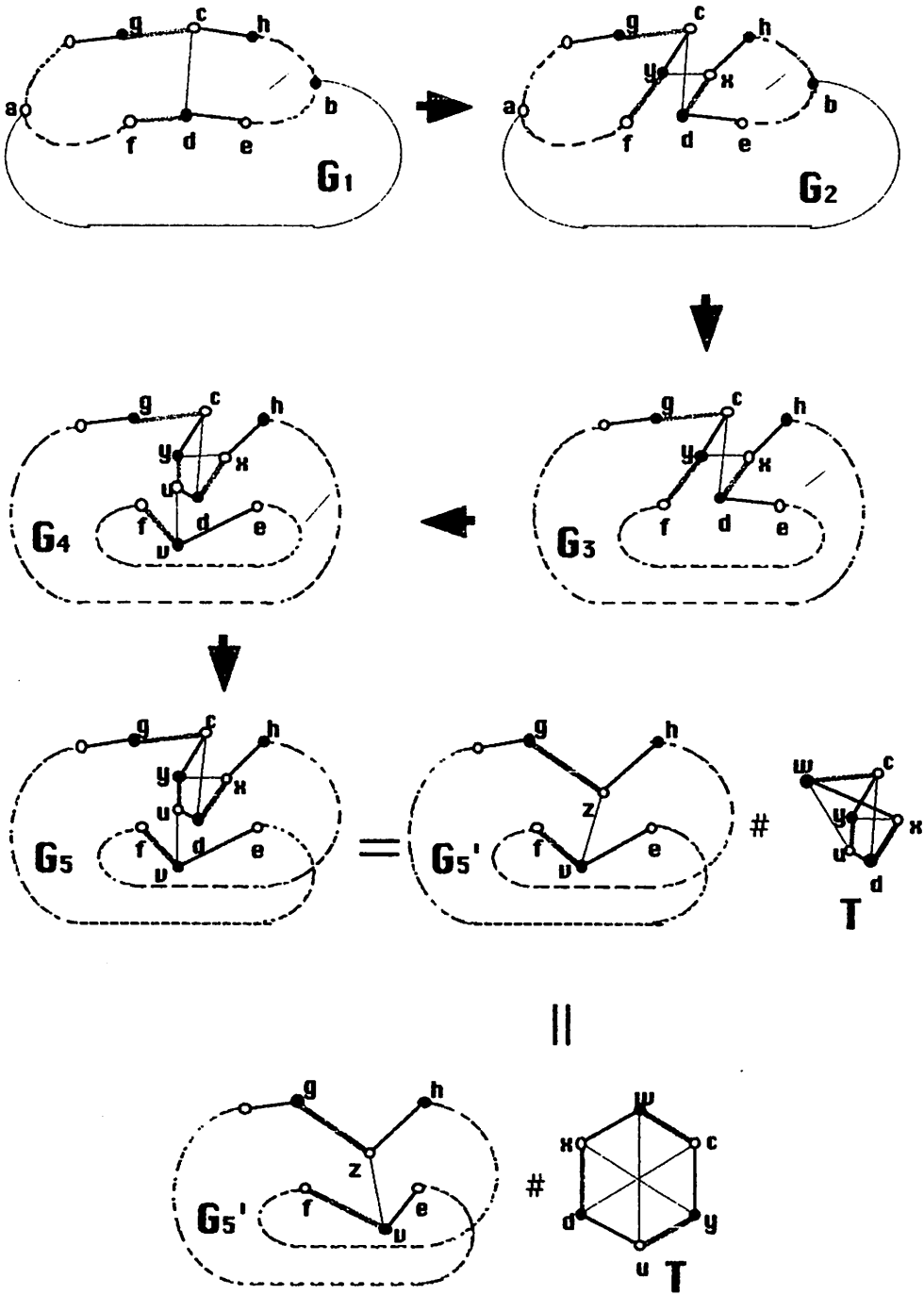
つまり、閉曲面を表現する 3-graph は閉曲面を cover する 2-disks (ball covering) が 3 枚あるが ($b_2(G, c) = 3$) H_0 -expansion と H_0 -reduction を順番にくり返して、2-disk は 4 枚までしか増やさなくて同じ閉曲面を表現する 3-graph (H, d) ($b_2(H, d) = 3$) に到達できるという事である。しかし Proposition 2. を一般的に topological に証明することは困難なようである。どうしてだろう。具体的・構成的に示せることが、定性的に示すことが難しいとは。

これに相当する 3次元の結果は得られていない。Proposition 1. は 4-graph でも OK。

REFERENCES

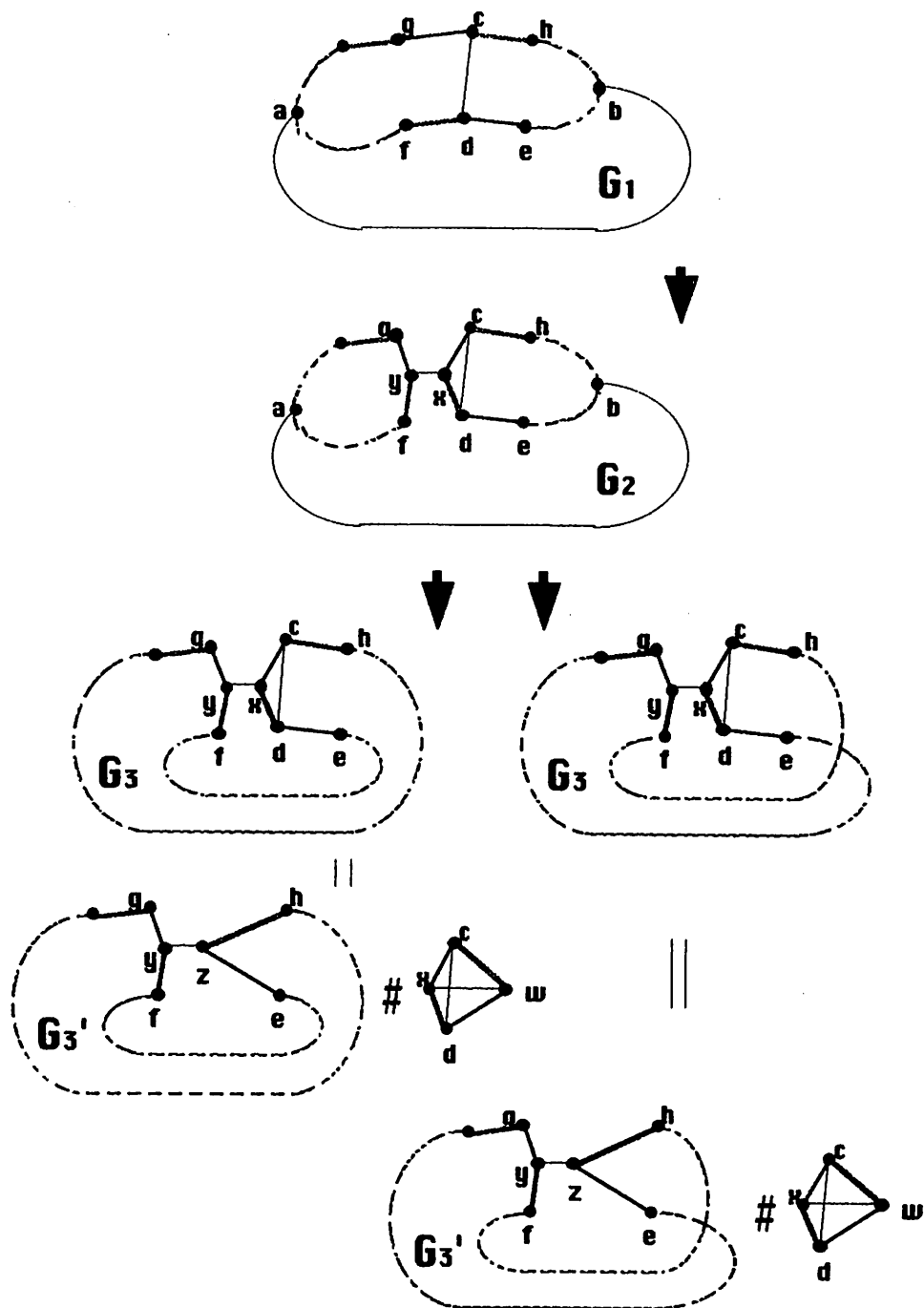
- [Vince] Vince A., The classification of closed surfaces using colored graphs, Graphs and Combinatorics 9(1993)75-84.
- [1] 津久井康之, Graphs in surfaces, 数理解析研講究録 442(1981)162-167.
- [2] 津久井康之, 辺着色グラフと曲面, 日本数学会応用数学分科会予稿集(1988.10)金沢.
- [3] 津久井康之, Reduction of edge-coloured cubic graph, 同上(1990.03)岡山.

[bipartite case]



(图 4)

[non-bipartite case]



(图 5)