HAKONE SEMINAR 14 (1998) 103-104.

On handle free 3-manifolds with boundary (2)

津久井康之 (専修大学経営)

4-graph (4-regular edge-coloured graph) に対して、任意の一色を除いて出来る 3-graph は閉曲面を表現するが、ここにこの「閉曲面×I」の「閉曲面×{0}」を貼付けるということを、4色について行うと4種類の異なる境界を持つcompact 3-manifold を得る。

graph G とその edge-colouring c から成る 4-graph (G, c) に対して、こうして出来る 3-manifold を W(G, c) と記す。また、W(G, c) の、球面である境界すべてに 3-ball を貼付けて出来る compact 3-manifold (closed のこともある)を、Ω(G, c) と表わす。

M^3 をcompact connected 3-manifold で、$\mathcal{B}=\{B_1, \ldots, B_k\}$ をM の closed 3-balls のset とする。$\mathcal{B}$は次の条件を満たすとき ball covering という。

(1) $B_i \cap B_j = \partial B_i \cap \partial B_j$ $(i \neq j)$ は空でなければ、2-manifold で、

(2) $\cup \mathcal{B} = M^3$.

M が closed では 一般に $k \leqq 4$ で、boundary を持つときは $k \leqq 3$ でよいことが知られている。

closed 3-manifold が non-splittable S^2 を持たないとき、handle free と呼ばれる。M^3 が境界を持つときには、non-splittable D^2 を持たないとき handle free と呼ぶことにする (non-splittable S^2 を持てばnon-splittable D^2 を持つ)。

今までに、次のことが知られている。

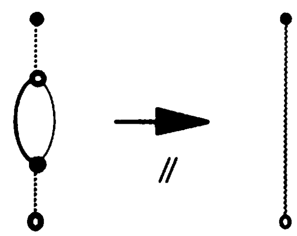
THEOREM 1. 任意の compact 3-manifold M に対して、4-graph (G, c) が存在して、 Ω(G, c) = M となる。

THEOREM 2. closed 3-manifold M が handle free ならば、M の任意の ball covering $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ はそれらの intersection として自然に 4-graph (G, c) を induce してΩ(G, c) = M となる。並行辺があれば除去可能である。

同様に次が証明される。

THEOREM 3. boundary を持つcompact 3-manifold M が handle free ならば、M の任意の ball covering $\{B_1, B_2, B_3\}$ はそれらの intersection として自然に 4-graph (G, c) を induce して Ω(G, c) = M となる。並行辺があれば除去可能である。

上で「除去可能」というのは、つぎのような operation を指す。



証明は[箱根89] (ここには証明に少し飛躍がある)と同様にできるので、省略する。これらの性質「並行辺の除去可能性」は、一般の 4-graph に対しては保証されないが、もう少し一般化出来るのではないかと考えている。いまのところ、ball covering の有効性はここに有るようである。

REFERENCES

[NHK] Tsukui Y., *On handle free 3-manifolds*, 'Topology and Computer Science', Kinokuniya (Tokyo), (1987)61-80.

[箱根89] Tsukui Y., *On handle free 3-manifolds with boundary*, 箱根セミナ記録 (1994)69-74.