箱根セミナ記録 9 6 (1996) 79-89.

Simple compact 3-manifolds (1)

津久井康之(専修大学経営)

compact connected 3-manifolds の list を作ることをテーマとする。
表題の Simple はそのまま、簡単なという意味で、学術用語ではない。

簡単さは3-manifold を表現する 4-regular edge-coloured graph の位数すなわち、頂点数を基準とする。

これから、4-regular edge-coloured graphを4-graph と呼ぶことにする。任意の一色を除いて出来る 3-graph は閉曲面を表現するが、ここにこの「閉曲面×I」の「閉曲面×{0}」を貼付けるということを、4色について行うと4種類の異なる境界を持つcompact 3-manifold を得る。

graph G とその edge-colouring c から成る 4-graph (G, c) に対して、こうして出来る 3-manifold を W(G, c) と記す。また、W(G, c) の、球面である境界すべてに 3-ball を貼付けて出来る compact 3-manifold (closed のこともある)を、Ω(G, c) と表わす。

今までに、次のことが知られている[NHK] [箱根94] ([箱根94] の証明は不完全である)。

THEOREM 1. 任意の closed 3-manifold M に対して、4-graph (G, c) が存在して、 Ω(G, c) = M となる。

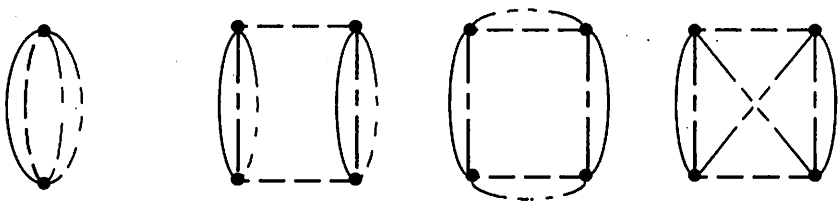
THEOREM 2. 任意の boundary を持つ compact 3-manifold M に対して、4-graph (G, c) が存在して、Ω(G, c) = M となる。とくに、ある一色を除いた 3-graph が M の境界と(同相に)なるようにとれる。このときは、他の3種の曲面は球面(複数)である。

THEOREM 3. 二つの 4-graphs (G, c)と(H, d) の sum は W(G, c)とW(H, d) (Ω(G, c)とΩ(H, d))の boundary sum (connected sum) を表現する(4-graph の sum については省略)。

この報告では、頂点数の少ないほうから compact 3-manifolds のexamples の list を紹介してゆくことを目標とするので表現の多様さについては省略する。

以下の 4-graph の表では x-y-z (x-z) の x は頂点数を、y は multi-edge の組数を、z は同じ頂点数の中での順番を示す。x-y-z# の # は sum に関して分解可能なことを示し、したがってその表現する 3-manifold は、もっと小さな頂点数の 4-graphs の sum で表わせることが分かる。

2-1, 4-1, 4-2 はすべて 3-sphere である。4-3 は P^3 。



2-1　　4-1　　4-2　　4-3

頂点数 6の 4-graph は１１個あるが、6-4-9#, 6-4-10#, 6-6-11# については省略した。

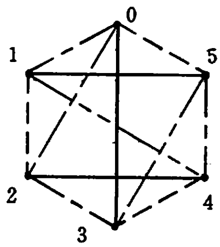
6-4-9# は P^3, 6-4-10# は $P^3\#P^3$, 6-6-11# は S^3 である。

いくつかの境界が3-sphere (3-ballが貼付けられている)の場合は、Heegaard Splitting もどきの図をつけ、また基本群の表示または関係子を記した。図は edge の色分けが面倒なので一部省略してある。基本的には六角形は二色の edges によって表現されているように描いたので混乱はないものと思う。

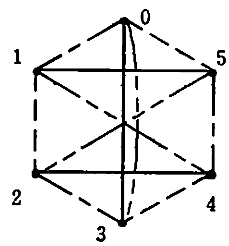
REFERENCES

[NHK] Tsukui Y., *On handle free 3-manifolds*, 'Topology and Computer Science', Kinokuniya (Tokyo), (1987)61-80.

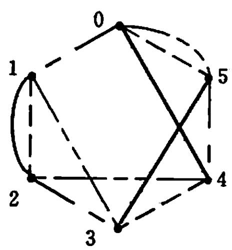
[箱根89] Tsukui Y., *On handle free 3-manifolds with boundary*, 箱根セミナ記録 (1994)69-74.



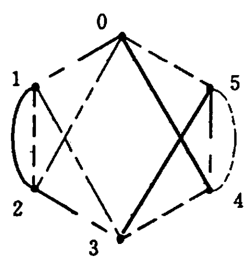
6-0-1



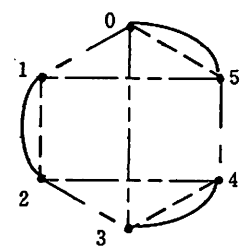
6-1-2



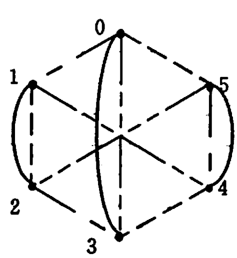
6-2-3#



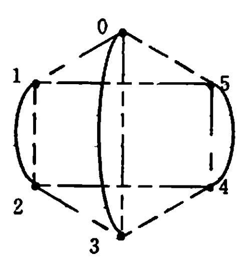
6-2-4#



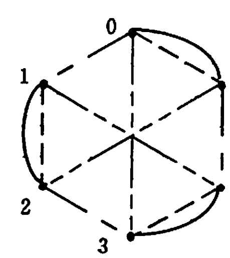
6-3-5#



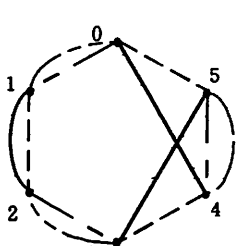
6-3-6



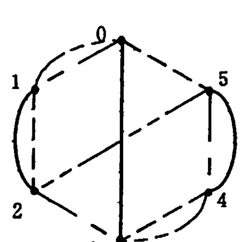
6-3-7



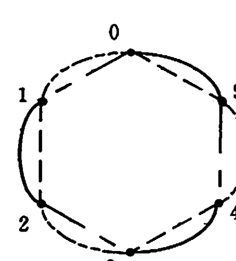
6-3-8



6-4-9#



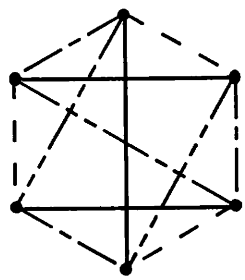
6-4-10#

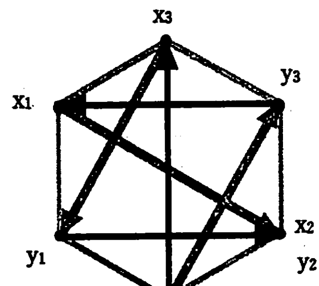


6-6-11#

(82)

6-0-1





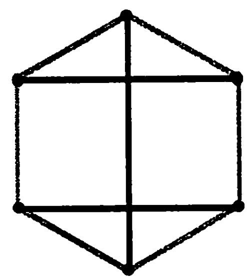
$x_1x_2x_3$

$x_1^{-}x_3x_2$

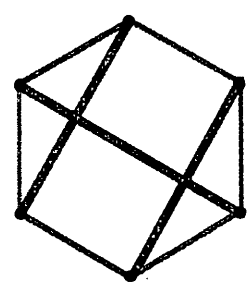
$y_1y_2y_3$

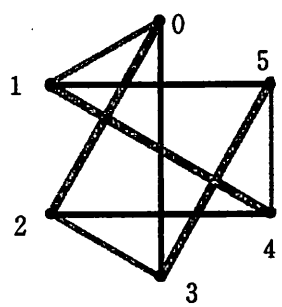
$y_1y_3^{-}y_2$

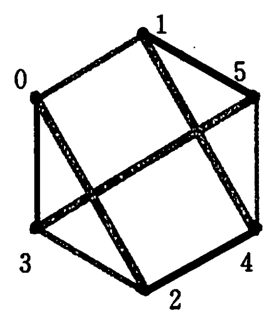
$x_1y_2^{-}x_2^{-}y_1^{-}x_3y_3$

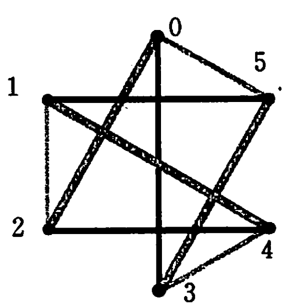


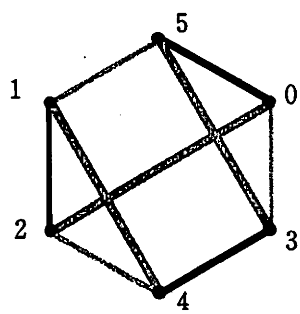
$\langle x_1, x_2, y_1;\quad x_1x_1x_2x_2,\quad y_1y_1x_2x_1y_1x_2^{-}y_1^{-}x_1x_2x_1y_1x_2^{-}y_1^{-}x_1 \rangle$

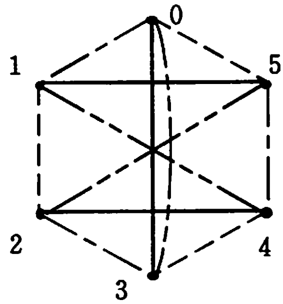


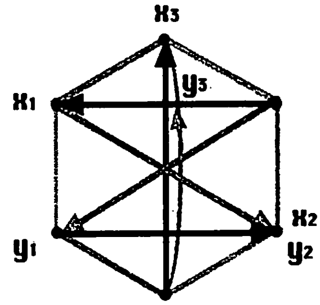




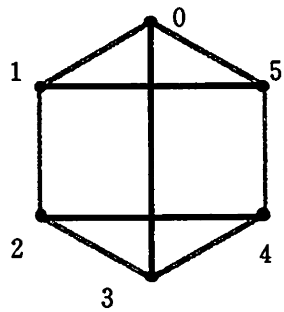








6-1-2



$x_1 - x_3x_2$

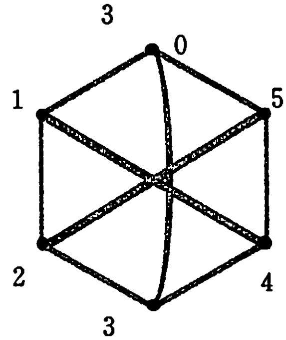
$x_1x_2x_3$

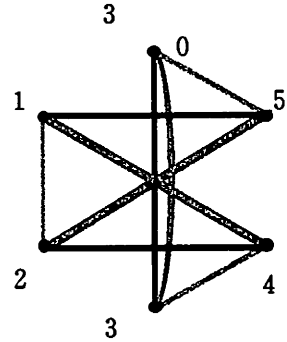
$y_1y_3y_2$

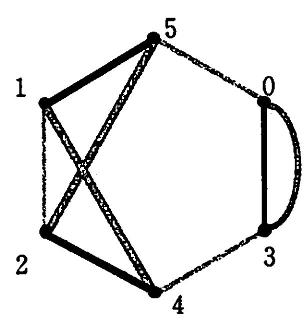
$y_1y_2y_3$

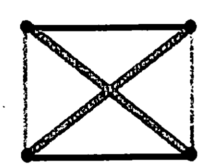
$y_1x_2 - y_2 - x_1, \quad y_3 - x_3$

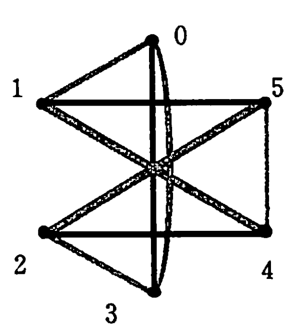
$\langle x_1, x_2, y_1; \quad x_1 - x_2 - x_1x_2, \quad y_1x_1x_2 - y_1 - x_2 - x_1, \quad y_1x_2y_1 - x_2 - x_1 - x_1 \rangle$

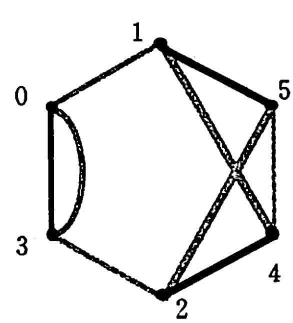


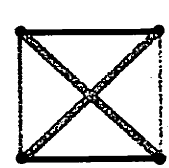






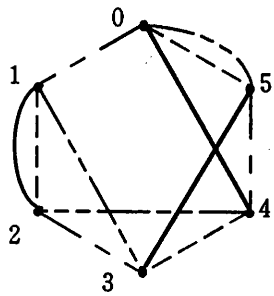




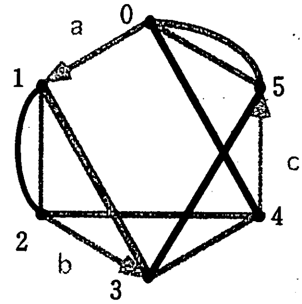


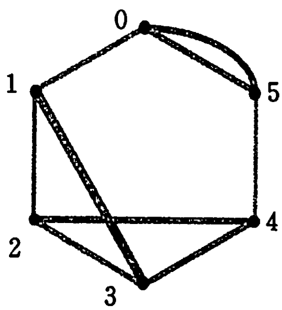
(84)

6-2-3 #

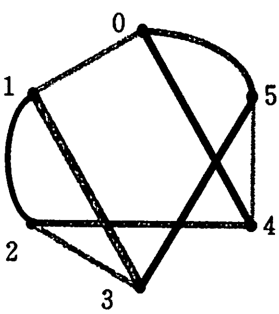


=

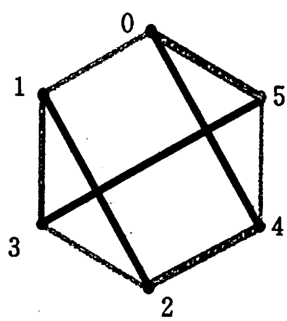


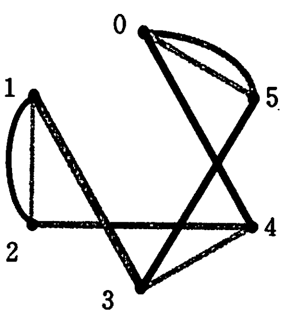


abc, a-bc, ab-c

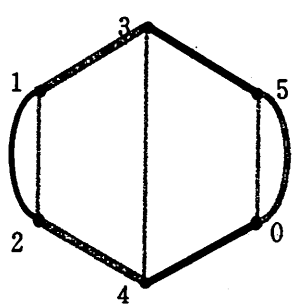


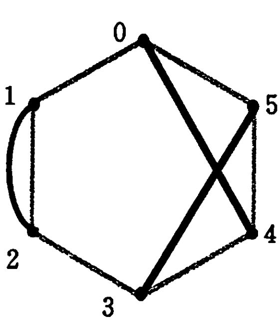
=



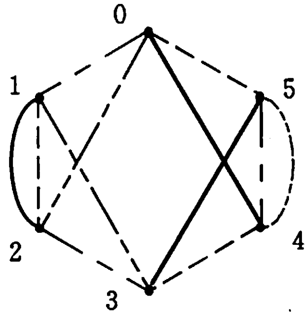


=

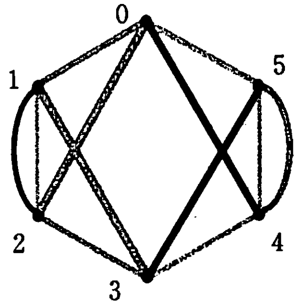


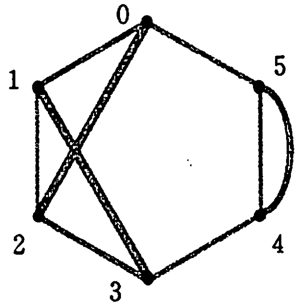


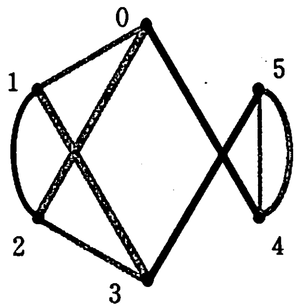
6-2-4 #

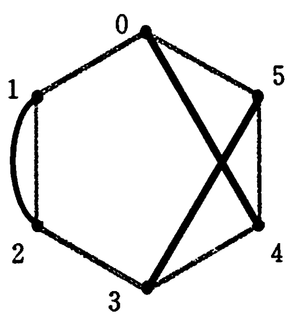


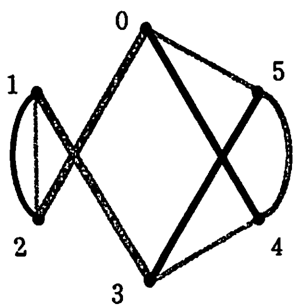
=





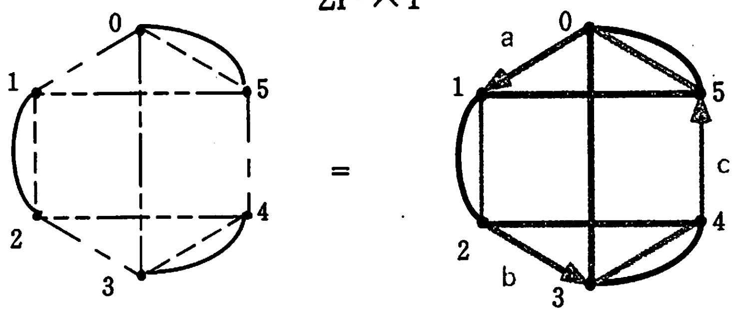




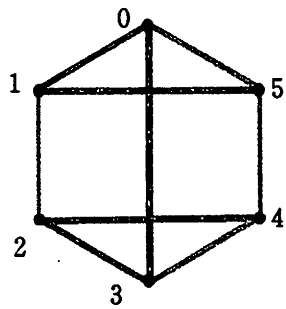


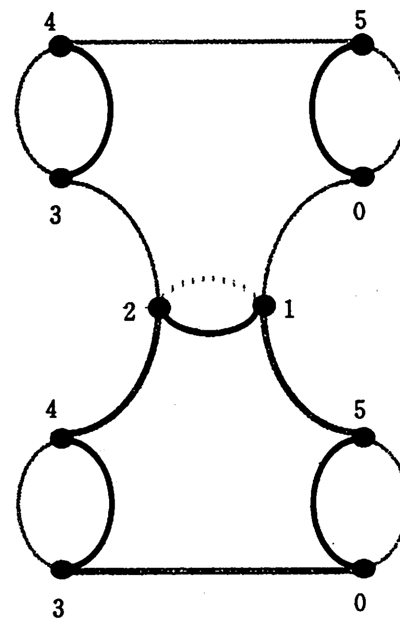
6-3-5 #

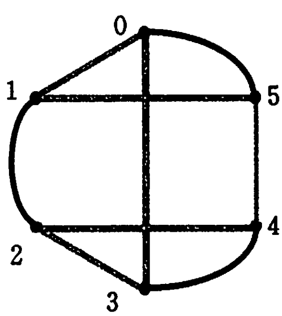
$2P^2 \times I$

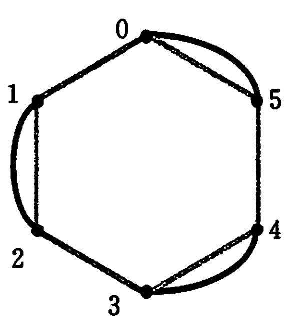


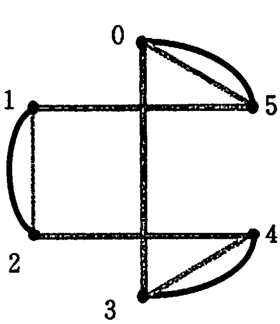
abc, a-cb

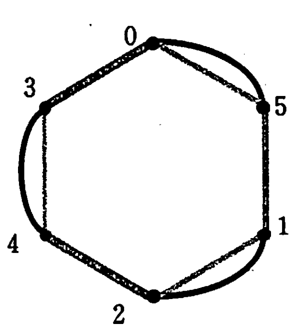


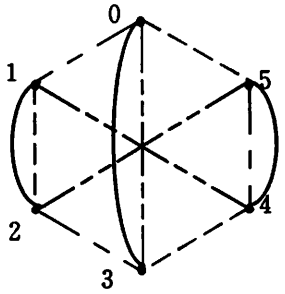




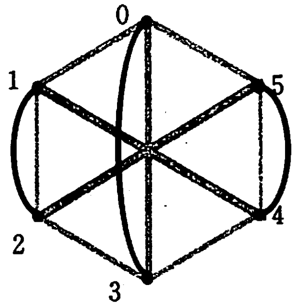


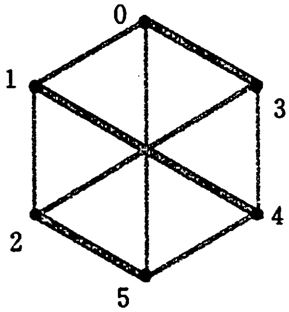


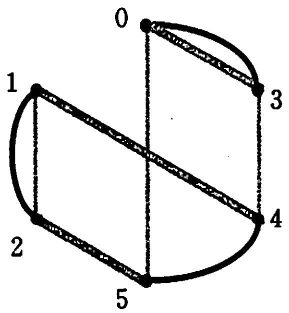


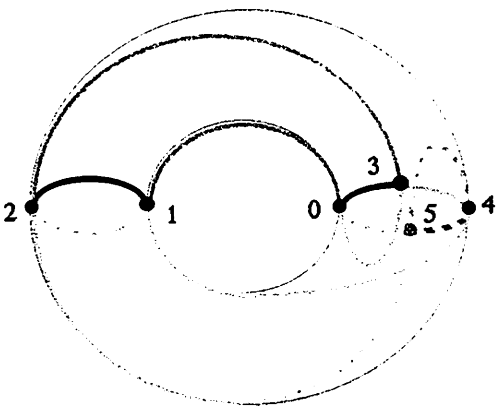

0
1
5
2
4
3

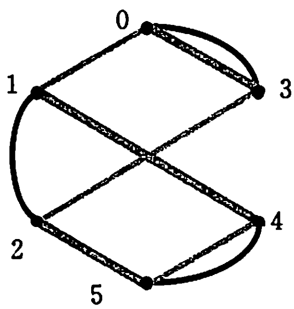
=

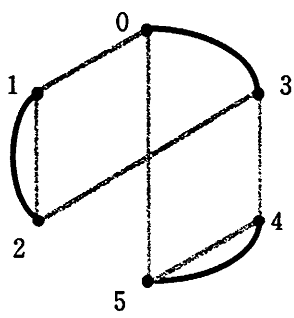

0
1
5
2
4
3


0
1
3
2
4
5

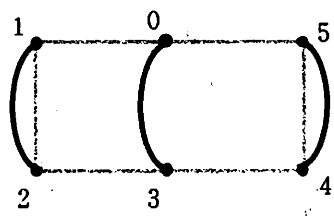

0
1
3
4
2
5


3
2
1
0
5
4


0
1
3
4
2
5

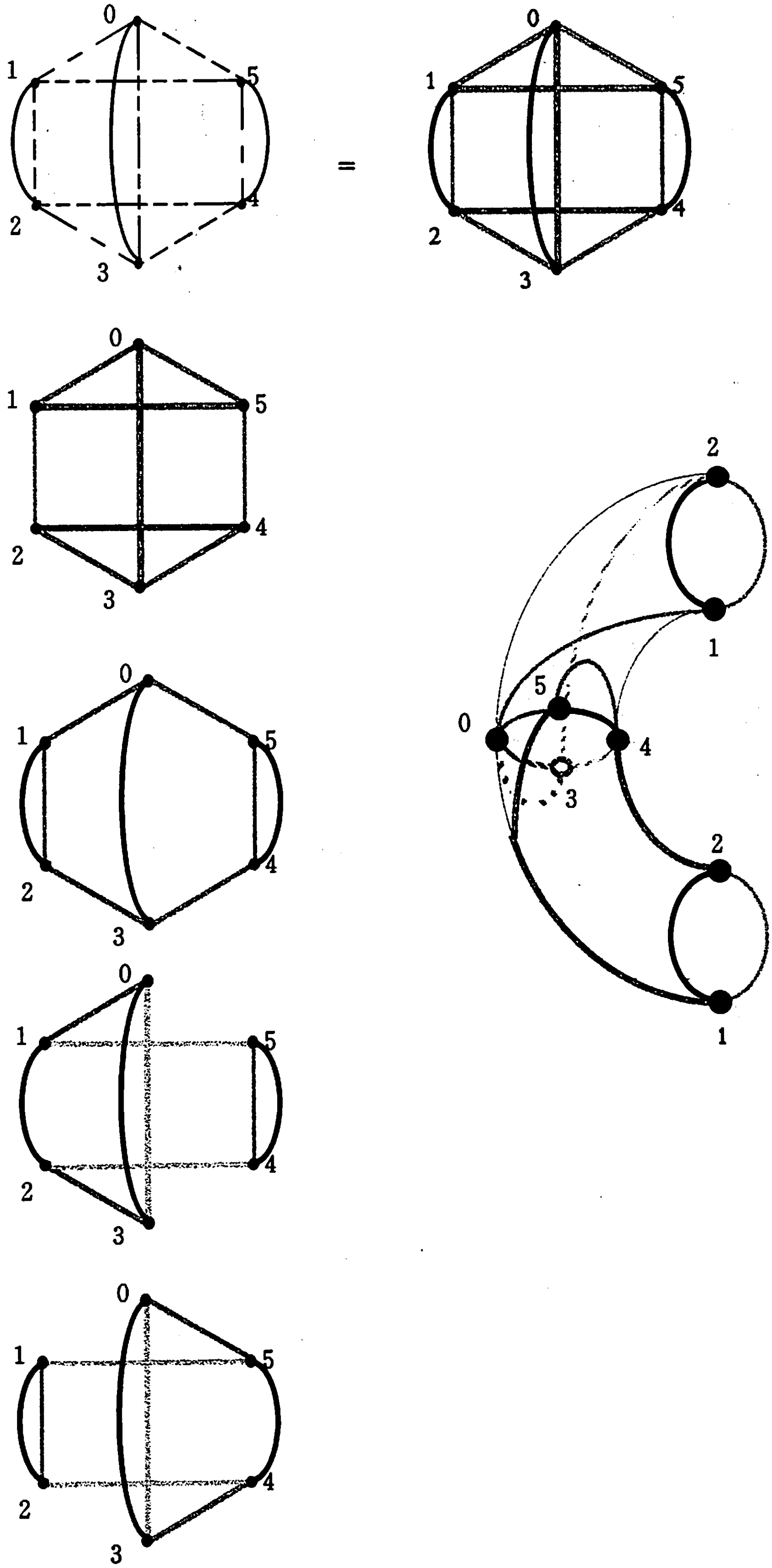

0
1
3
4
2
5

=


1
0
5
2
3
4

(88)

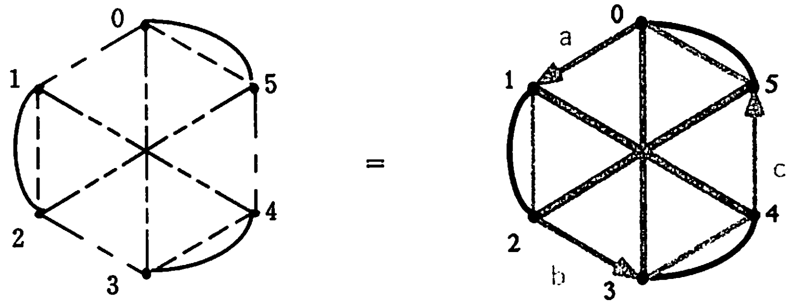
6-3-7



6-3-8

T²×I

$T^2 \times I$



abc, acb