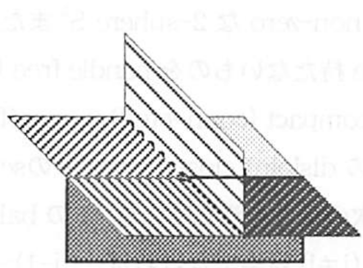
箱根セミナ記録 ９４(1994)69-74

On handle free 3-manifolds with boundary

津久井康之(専修大経営)

§0. In troduction

(G,c) を 4-regular(quartic) 4-edge-coloured (multi) Graph (略して、ec-quartic graph)とする。edge colouring は c:E(G)→{1,2,3,4}。4色のうちの任意の2色を指定すると、それらの色を持つ edge からなるいくつかのcycle が定まる。これら全てのcycle に2-disk を貼つけて得られる 2-polyhedron を $P^2(G,c)$ と記す。$P^2(G,c)$ は、いわゆる、fake-surface である。



$P^2(G,c)$ の一部

(G,c) 内で3色 $\{i,j,k\}=\{1,2,3,4\}-\{h\}=C_h^-$ を指定して定まる $P^2_h{}^-(G,c)$ は閉曲面となる。そこで $P^2(G,c)$ に $P^2_h{}^-\times I$ を $P^2_h{}^-\times\{0\} = P^2_h{}^- \subset P^2$ として(h=1,2,3,4) 貼りつけると、compact 3-manifold W(G,c) を得る。

W(G,c) の boundary は disjoint union $P^2_1{}^- \cup P^2_2{}^- \cup P^2_3{}^- \cup P^2_4{}^-$ と同相となっている。なお、この作り方から4つの $P^2_h{}^-\times I$ のうちの1つは取り去っても homeo type は変らない 3-manifold が定まる。W(G,c) のboundary component のうち 2-sphere S^2 であるもの全てに 3-ball を貼りつけて得られる compact manifold を Ω(G,c) と記すこととする。 closed 3-manifold については、次のような結果がある[NHK]。

Theorem 1. 任意の closed 3-manifold M^3 に対して、ec-quartic graph (G,c) が存在して、$\Omega(G,c)=M^3$ となる.

closed 3-manifold M^3 が $H_2(M^3,Z_2)$ の元として non-zero な 2-sphere S^2 を持たないとき、M^3 は handle-free であると言われる。

Theorem 2. M^3 を closed な handle free 3-manifold とする。

(1) M^3 の ball covering からは常に（それらの intersection として）ec-quartic graph が得られる。

(2) theorem 1 の G としていつも simple なものが取れる。

これら2つの定理は closed 3-manifold を edge-coloured graph を通して研究するための基礎である(詳細は[NHK] [KT] を参照)。

その後、この研究を進めるためにも、境界をもつ compact 3-manifold とそれを表現する graph の研究が必要となった。そのための第一歩をここで報告するが、多くの紙面と多くの時間が必要となるので、ここでの報告はその introduction の概要を述べるに止まるであろう(一部は、[箱根86] [箱根89] にその背景と exampe がある)。

§ 1 compact handle free 3-manifold.

Definition 1.1 compact (connected) 3-manifold M^3 が handle を持つというのは、$H_2(M, \partial M; Z_2)$ の元として、non-zero な 2-sphere S^2 または proper 2-disk D^2 が M^3 に存在することを言う。handle 持たないものを handle free いう。

Definition 1.2 M^n をcompact (connected) n-manifold とする。

$\Lambda_j=\{B_{j1}, B_{j2}, \ldots, B_{j1j}\}$ をM の disjoint closed n-balls のset とする。

$\Lambda=\Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \ldots \cup \Lambda_k$ が次の条件を満たすとき M の ball covering という。

(1) $B_{ik} \cup B_{jh} = \partial B_{ik} \cup \partial B_{jh}\ (i \neq j)$ は空でなければ、(n-1)-manifold で、

(2) $\cup \Lambda = M^n$.

$k \leqq n+1$ (non empty boundary のときは $k \leqq n$) でよいこと、n=3 では 一般に k=4 として良く、lk=1 でよいこと等が知られている[KT] 。

Lemma 1.3([lemma 3.3 in [NHK]) $M^3=B_1 \cup B_2 \cup B_3$ が M の ball covering のとき、inclusion から定まるつぎの写像は injection である。

$$i : H_2(B_1 \cup B_2 ; Z_2) \rightarrow H_2(B_1 \cup B_2 \cup B_3; Z_2)$$

次の定理は境界のある manifold を edge-coloured graph で表現するためのものの、3次元の特別な場合である。境界が S^2 を含む場合等を扱うように定義することは可能だが、ここでは、省略する。

Theorem 3. 任意の compact 3-manifold M^3 に対して、ec-quartic graph (G,c) が存在して、W(G,c)=M または Ω(G,c)=Mとなる。

特に、$\partial M = P^2{}_h{}^-$ となるように $h \in \{1,2,3,4\}$ を選べる。

Proof.

closed な場合に対してはすでに証明されているので[NHK]、compact connected 3-manifold $M^3 \neq B^3$ は空でない境界をもち、その全ての component は 2-shpere でないものとする。

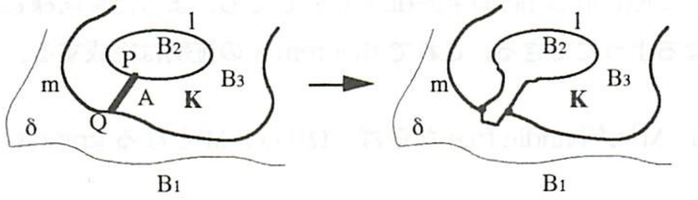
$M^3=B_1 \cup B_2 \cup B_3$ は ball covering で(このことはいつでも可能)、

(1) $B_i \cap B_j\ (i \neq j)$ は nonempty で 2-manifold,

(2) $B_1 \cap B_2 \cap B_3$ は arcs(proper in M) と loops(in interiour of M).
とする。

[1] まず、$B_1 \cap B_2 \cap B_3 \supset \ell$(loop) を消去することを考える。

loop があるので、例えば、$B_1 \cap B_3 \supset K$(component), $\partial K \supset \ell$ なる K が存在する。
∂K の ℓ 以外の component で $B_1 \cap B_3 \cap \partial M$ のものを m とする(必要なら 1,2,3 を取り替えてもよい)。



K のなかに ℓ の内点 P と m の内点 Q を結ぶ proper arc A をとり、その M での regular neighbourhood を N=N(A;M) とする。

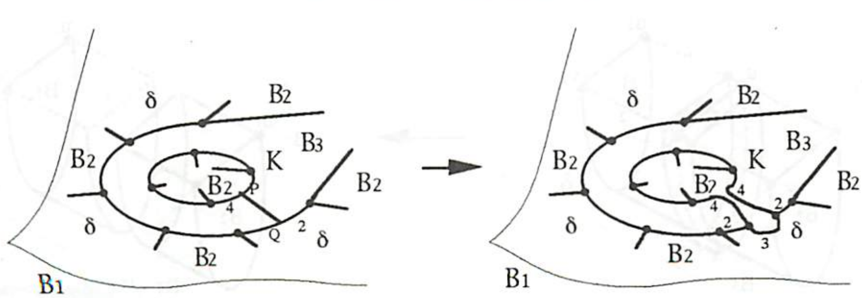
$B'_2 = B_2 \cup N$, $B'_3 = cl(B_3 - N)$, $B'_1 = cl(B_1 - N)$ とすると $M^3 = B'_1 \cup B'_2 \cup B'_3$ は ball covering で、$B_1 \cap B_2 \cap B_3$ の loop が1つ減って arc に変っている。これをくりかえせば、すべての loop は arc にかわる。

$B_1 \cap B_2 \cap \partial M$, $B_2 \cap B_3 \cap \partial M$, $B_3 \cap B_1 \cap \partial M$ についても、同様にして loop を arc に変える。

[2] 結果として、$B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \partial M$ は有限個の points で、この集合を V とする。
$B_1 \cap B_2 \cap B_3$ の要素は M の proper arcs で, $B_1 \cap B_2 \cap \partial M$, $B_2 \cap B_3 \cap \partial M$, $B_3 \cap B_1 \cap \partial M$ のすべての component は ∂M の arcs である。これらの arcs の集合を E とすると、G=(V,E) は graph である。$E_4 = \{e \in E : e \subset B_1 \cap B_2 \cap B_3\}$, $E_1 = \{e \in E : e \subset \partial M \cap B_2 \cap B_3\}$, $E_2 = \{e \in E : e \subset B_1 \cap \partial M \cap B_3\}$, $E_3 = \{e \in E : e \subset B_1 \cap B_2 \cap \partial M\}$ として、各 E_k の edge に色 k を与える colouring を c とする。(G,c) は ec-quartic graph である。

$B_i \cap B_j$ ($i \neq j$) が 2-disk から成っているとは限らないので、まだ $\Omega(G,c) = M^3$ となっている保証はない。

[3] $B_1 \cap B_3 \supset K$(component)$\neq$2-disk が存在したとする。



∂Kの異なるcomponentsをAとBとする。AもBも色4と2の辺からなる。Aの色4の辺aの内点PとBの色2の辺bの内点QをK内のproper arc Cで結び、そのregular neighbourhoodを$N=N(C;M)$とする。$B'_2=B_2\cup N$, $B'_3=cl(B_3-N)$, $B'_1=cl(B_1-N)$とすると　$M^3=B'_1\cup B'_2\cup B'_3$　はball coveringで、$B_1\cap B_3$のcomponentの境界数が減っている。これを繰り返せば$B_1\cap B_3$は2-disksとなる。このことを他の3-ballsのintersectionに対しても行えば、$B_i\cap B_j\,(i\neq j)$が2-diskから成ることとなる。

[4] $B_i\cap\partial M\supset K$(component)$\neq$2-diskに対しても、まったく同様にして、$B_i\cap\partial M$が2-disksとなるようにできる。これでtheorem 3の証明は完成する。

Theorem 4. M^3がhandle freeならば、$\Omega(G,c)=M$となるgraph Gはsimpleにとれる。

proof.

Mがclosedのときは証明されているので、$\partial M\neq\phi$　かつ　∂Mは2-sphere componentを含まないとする。

$M^3=B_1\cup B_2\cup B_3$はball coveringで、(1) $B_i\cap B_j$ $(i\neq j)$はnonemptyで2-disks, (2) $B_i\cap\partial M$もnonemptyで2-disksと仮定してよい(このような性質をball coveringのdisk propertyという)。

$V=\{v\in B_1\cap B_2\cap B_3\cap\partial M\}$, $E=E_1\cup E_2\cup E_3\cup E_4$, $G=(V,E)$. ただし、

$E_4=\{e\subset B_1\cap B_2\cap B_3 : e \text{ is a component}\}$, $E_1=\{e\subset\partial M\cap B_2\cap B_3 : e \text{ is a component}\}$,

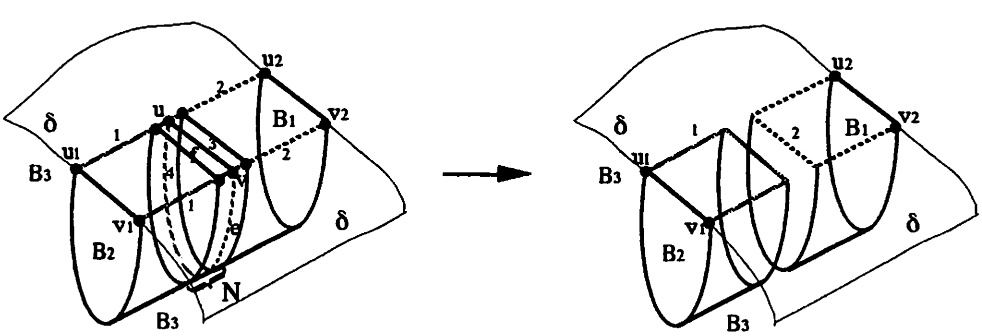
$E_2=\{e\subset B_1\cap\partial M\cap B_3 : e \text{ is a component}\}$, $E_3=\{e\subset B_1\cap B_2\cap\partial M : e \text{ is a component}\}$.

また、$c: E\to\{1,2,3,4\}$を$c(e)=k$, if $e\in E_k$とcolouringを定めと$\Omega(G,c)=M^3$。

条件から、3本のmulti edgeは無いとして良い。

(1) eとfがvertex uとvを結ぶmulti edgesで、$c(e)=4$, $c(f)=3$ (一方が4)の場合。

eはproper arcでfは境界上のarcである。uに隣接する頂点をu_1, u_2, vに隣接する頂点をv_1, v_2とする。$a_1\sim\{u, u_1\}$, $a_2\sim\{u, u_2\}$, $b_1\sim\{v, v_1\}$, $b_2\sim\{v, v_2\}$で、$c(a_1)=c(b_1)=1$, $c(a_2)=c(b_2)=2$としよう。

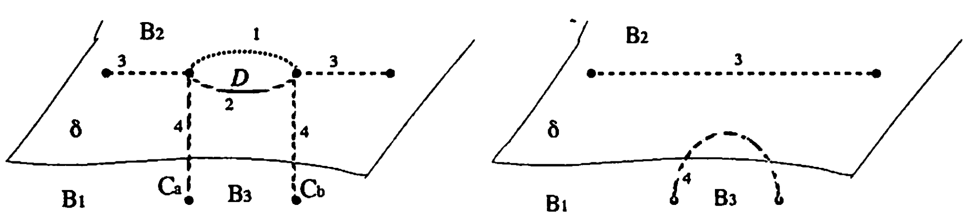


e と f が bound する 2-disk を D とする。N=N(D;M) を D の M でのregular neighbourhood として、$B'_3=B_3 \cup N$, $B'_2=cl(M_2-N)$, $B'_1=cl(M_1-N)$ とすればこれは M の ball covering である。もし、a_1 , a_2 を含む cycle C_a と b_1 ,b_2 を含む cycle C_b とが異なっていれば、この操作によって得られた ball covering は disk property を持ち、したがってこの ball covering から定まる ec-quartic graph そのものが M^3 を定める。

C_a と C_bが同じ cycle のときは、この操作で $B_3 \cap \partial M$ が annulus $S^1 \times I$ を含むようになる。この時は $B_3 \cap \partial M$ に proper 2-disk D_3 があってこれが $H_2(M, \partial M; Z_2)$ の non-zero element であることが確認されて、これは矛盾である。

(2) つぎに、e と f が vertex u と v を結ぶ multi edges で、c(e)=1, c(f)=2 (両方ともが 4 でない) の場合。

e と f は境界上の arc である。u に隣接する頂点を u_1,u_2, v に隣接する頂点をv_1 ,v_2 とする。$a_1 \sim \{u, u_1\}$, $a_2 \sim \{u, u_2\}$,$b_1 \sim \{v, v_1\}$,$b_2 \sim \{v, v_2\}$ で、$c(a_1)=c(b_1)=3$, $c(a_2)=c(b_2)=4$ としょう。e と f が bound する境界上の 2-disk を D とする。N=N(D;M) を D の M でのregular neighbourhood として、$B'_1=B_1 \cup N$, $B'_2=cl(M_2-N)$, $B'_3=cl(M_3-N)$ とすればこれは M の ball covering である。ここでも、a_1 , a_2 を含む cycle C_a と b_1 ,b_2 を含む cycle C_b とが異なっていれば、この操作によって得られた ball covering は disk property を持ち、したがってこの ball covering から定まる ec-quartic graph そのものが M^3 を定める。



C_a と C_bが同じ cycle のときは、この操作で $B_1 \cap B_2$ が annulus $S^1 \times I$ を含むようになる。lemma 1.3 から、ここに $H_2(M, \partial M; Z_2)$ の non-zero element である S^2 の存在が確認されて、矛盾が導かれる。

これで theorem 4 は証明された。

theorem 3 と 4 により、境界を持つ 3-manifold も ec-quartic graph を用いて研究する基礎が与えられた。[NHK] と同様に、manifold を変えずに それを表現する graph の変形を論じられるが、ここでは省略して今後のこととする。

REFERENCES

[KT] Kobayashi K. and Tsukui Y., The ball coverings of manifolds, J. MSJ. 28(1976)133-143.

[箱根86] Tsukui Y., On hoops in induced frames, 箱根セミナ記録(1986)167-186.

[NHK] Tsukui Y., On handle free 3-manifolds, 'Topology and Computer Science', Kinokuniya (Tokyo), (1987)61-80.

[箱根89] Tsukui Y., Pre-frame への準備, 箱根セミナ記録(1989)87-95.