箱根セミナ記録 8 9 (1989)

pre-frame への準備

- edge-coloured quartic graph と 3-manifold -

津久井 康之 （相模工業大学）

§ 0. INTRODUCTION.

(k+1) edge-coloured (k+1)-regular graph がある条件を満たすとき、それが k 次元 closed PL manifold を表現する。k=2 のときは「ある条件」は必要でない。k=3 のときは、k=2 のときの結果を用いて「ある条件」をグラフの（組合せ的）性質として表現できる。k≧4 では S^{k-1} を表現する (k-1) のときのグラフの性質が分かっていないので、「ある条件」は現在まだ捕らえられていない。

この報告ではこの「ある条件」を要求しない広い範囲で対象のグラフの変形と多様体の変化の関係を調べるための場－pre-frame－の導入を準備することを目標とする。 副産物として boundary を持つ compact 3-manifold の edge-coloured graph 表現が得られる。

ここで対象とするグラフは loop のない multi graph である。

§ 1. FRAME と 2-MANIFOLDS.

X が Polyhedron または 集合のとき、#X で X の連結成分の個数または濃度を表わし、$|X|=\cup\{p: p\in X\}$ は underlying space を示す。

<u>Definition</u> 1.

$R(k)=\{G$: Gは k-regular k-edge-colourable graph$\}$, $C_k=\{1,2,3,\ldots,k\}$

$R(k)\ni G$, $c:E(G)\to C_k$ を G の edge-colouring とする。$X\subset C_k$ について、

$E_X=c^{-1}(X)$, $G_X=(V,E_X)$, $E_X{}^-=E-c^{-1}(X)$, $G_X{}^-=(V,E_X{}^-)$ と記す。

特に、　$X=\{i\}$ のとき G_X を G_i、G_X^- を G_i^-

$X=\{i,j\}$ のとき G_X を G_{ij}、G_X^- を G_{ij}^- と記す。

以後、

$R(k)=\{(G,c)$:Gはconn. k-regular graph $c:E(G)\to Ck$ はその edge-colouring$\}$

とも記し、R(k) を混同して用いる。

Definition 2.

$R(k)\ni(G,c)$とするとき、　$b_i=\Sigma\{\#G_X:\ \#X=i\}$ とする。　すると、

$b_0=\#V(G)$ (even)、 $b_1=\#E(G)$、 $b_2=$ 2色で出来る cycles の総数、

$b_k=\#G$ (=成分数)

Definition 3.

$R(k+1)\ni(G,c)$ とするとき、

$P^0(G,c)=|V(G)|$,　$P^1(G,c)=|G|=|V(G)|\cup|E(G)|$,

$P^2(G,c)=P^1(G,c)$に二色 cycles に沿って b_2 個の 2-disks を貼付けて得られる 2-polyhedron.

もし、$P^i(G,c)$ が 定義され$(i>1)$、

$\forall X\subset C_k(\#X=i+1)$, $\forall H:G_X$の成分 について $P^i(H,c|H)=S^i$(i-sphere) の時、

$P^{i+1}(G,c)=P^i(G,c)$ に b_{i+1}個の (i+1)-ball を $P^i(H,c|H)$'s に沿って貼りつけて得られる (i+1)-Polyhedron.

$P(G,c)=P^k(G,c)$: k-manifold.

Definition 4.

$R(k+1)\ni(G,c)$ が (k-)weak-frame であるとは、$i=1,2,...,k-1$ に対して

$\forall X\subset C_k(\#X=i+1)$, $\forall H:G_X$の成分 について $P^i(H,c|H)=S^i$(i-sphere)

が成り立つときを言う。

また、$b_k=k$ である weak-frame を frame という。

特に $k+1=3$ のときは、$R(3)\ni(G,c)$ は常にweak-frame となり、$P^2(G,c)$ は閉曲面(2次元多様体)となる。$b_2=3$ の時 (G,c) は frame(2-frame) と呼ばれ、$b_0>2$ なら multi-edge を持たない。

Proposition 1. $R(3)\ni(G,c)$ について、

(1)χ を閉曲面 $P^2(G,c)$ の Eular 標数とすると、$\chi = b_0-b_1+b_2= b_2 - \frac{1}{2}b_0$

(2)$P^2(G,c)$ が orientable $\Leftrightarrow$ G が bipartite.

Proposition 2. 任意の閉曲面 F に対して、$R(3)\ni(G,c)$ が存在して、

$P^2(G,c)\approx F$, $b_2=3$.

§2. 3-FRAME.

$G=(V,E)$ が quartic graph で $c:E\rightarrow C_4$ がその edge-colouring とする。その 3 色でできる sub-graph $G_i^-=(V,\{e\in E:c(e)\neq i\})$ について、$\chi = b_2 - b_0/2 =2$ のとき $P^2(G_i^-,c)$ は 2次元球面となる。

Theorem 1. quartic edge-coloured graph $(G,c)\in R(4)$ が 3-frame である必要十分条件は、$b^2(G,c)= 4 + b_0 = 4 + \#V$.

また、closed 3-manifolds 全体では次のような事が分かっている。

Theorem 2. 任意の closed 3-manifold M に対して、$P^3(G,c)\approx M$ となる frame (G,c) が存在する。

edge-coloured quartic graph (G,c) が 3-manifold を unique に表現するのは frame に限らず、$i=1,2,3,4$ に対して $P^2(G_i^-,c)=k_i S^2$ (k_i個の球面)となれば十分である(weak-frame)。このとき、

$b_2(G_i^-,c) = 2k_i+\frac{1}{2}b_0(G,c)$, $b_2(G,c)= (k_1+k_2+k_3+k_4) + b_0(G,c)$

$b_3= (k_1+k_2+k_3+k_4)$.

§3. PRE-FRAME.

Definition 5.

$R(k+1)\ni(G,c)$ が (k-)pre-frame であるとは、$i=1,2,...,k-2$ に対して

$\forall X \subset C_k (\#X=i+1)$, $\forall H$: G_X の成分 について $P^i(H, c|H) = S^i$ (i-sphere)
が成り立つときを言う。

すなわち $\forall i \in C_{k+1}$ について、$(G_i^-, c|G_i^-)$ が weak-frame である (G, c) を pre-frame という。Polyhedron としては、$P^{k-1}(G, c)$ が定義される。

各 weak-frame $(G_i^-, c|G_i^-)$ について、$P^{k-1}(G_i^-, c|G_i^-)$ が connected であるとき、pre-frame $(G, c) \in R(k+1)$ は connected といわれる。

また、各 G_i^- が bipartite なとき pre-frame (G, c) が bipartite という。

$(G, c) \in R(k+1)$ が pre-frame のとき、$P^{k-1}(G, c)$ に 各 $P^{k-1}(G_i^-, c|G_i^-)$ に沿って k-manifold $P^{k-1}(G_i^-, c|G_i^-) \times I$ を

$P^{k-1}(G_i^-, c|G_i^-) = P^{k-1}(G_i^-, c|G_i^-) \times \{0\}$ として貼付けて得られる boundary を持つ k-manifold を $P^k[G, c]$ と表わす。

$P^k[G, c]$ の boundary component で S^{k-1} があればその全てに k-ball B^k を貼付けて得られる manifold を $P^k\langle G, c\rangle$ と記す。

pre-frame $(G, c) \in R(k+1)$ が frame であれば、$P^k\langle G, c\rangle = P^k(G, c)$.

Theorem 3.

connected 4 edge-coloured quartic graph (G, c) はすべて pre-frame である。

§4. EXAMPLES.

Pre-frame の性質や変形については次の機会に報告することとし、ここではいくつかの例を挙げておく。

Example 1. は frame で、従って $P^3[G, c]$ の境界はは4つの球面であり、

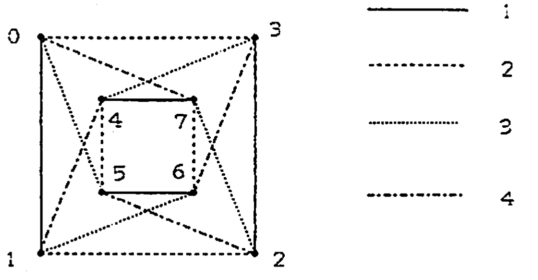
$P^3(G, c) = P^3\langle G, c\rangle$。Example 2. は Example 1 とよく似たグラフだが、$P^3[G, c]$ の4つの境界はすべて球面でない。

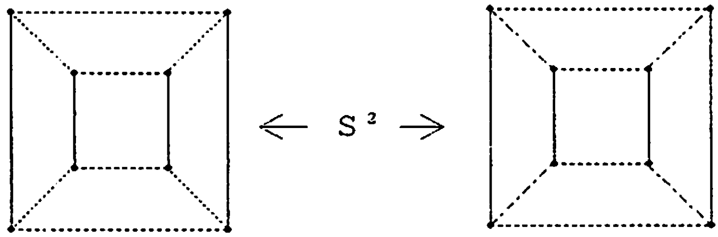
Example 3. は境界が1つだけ球面の例であり、Example 4. と 5. はともに、Manifold としては homeomorphic な closed surface $\times$ I で、境界の2つの surfaces の現れ方が異なる。この例では surface の genus は 1だが、一般

の場合も同様である。

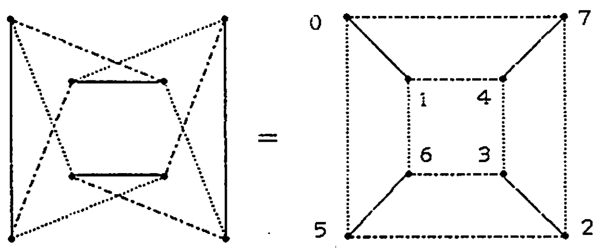
example 1. P^3

(frame)

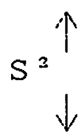


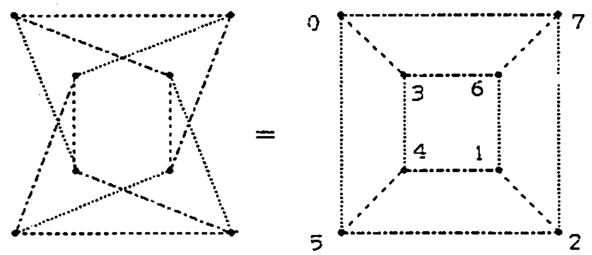


G_4^- G_3^-



G_2^-

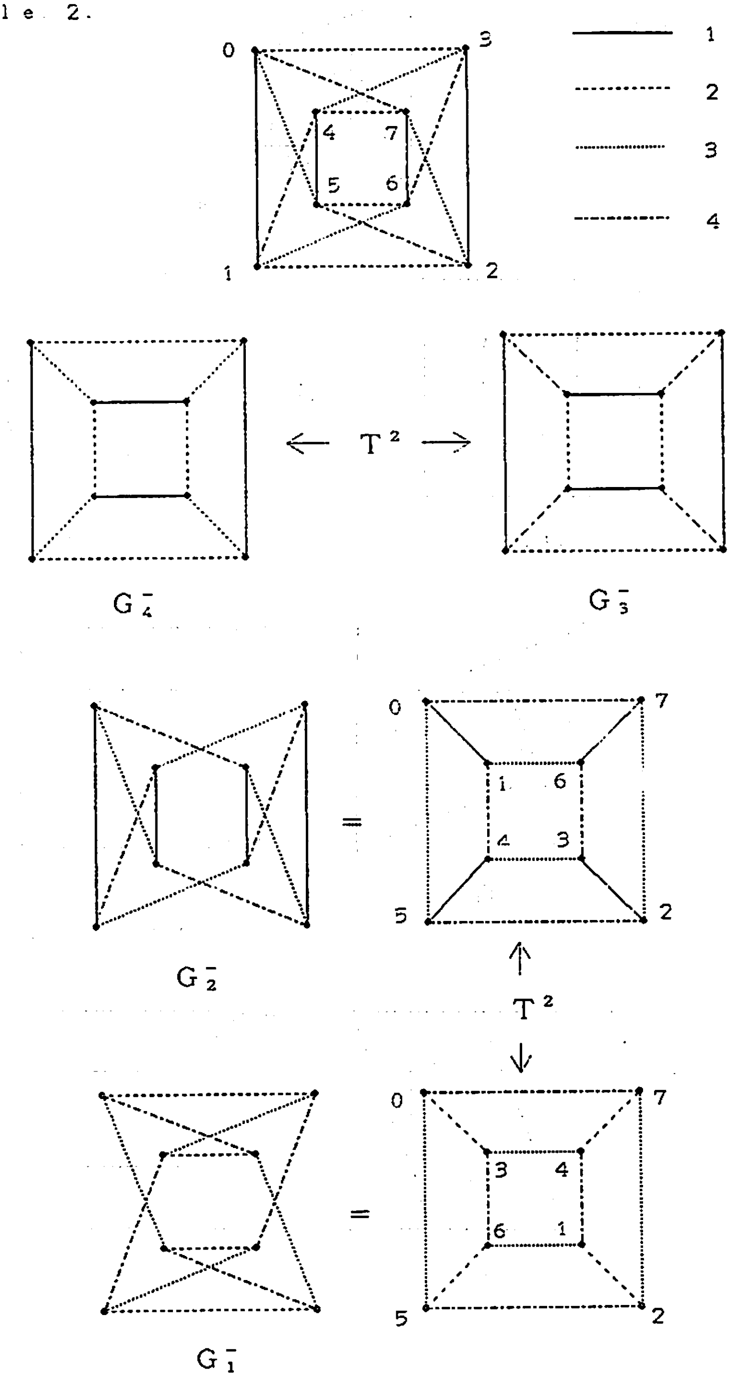




G_1^-

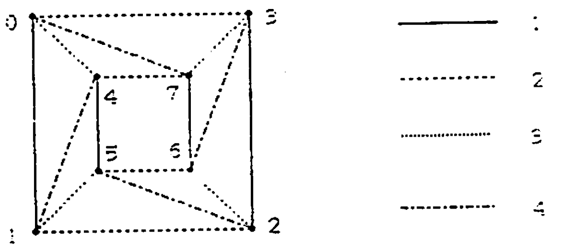
（3次元射影空間　P^3，レンズ空間も同様の表現を持つ）

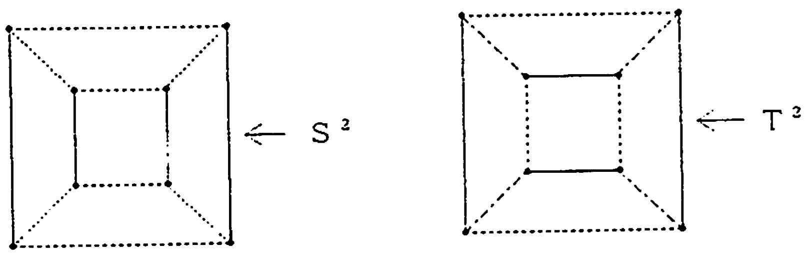
example 2.



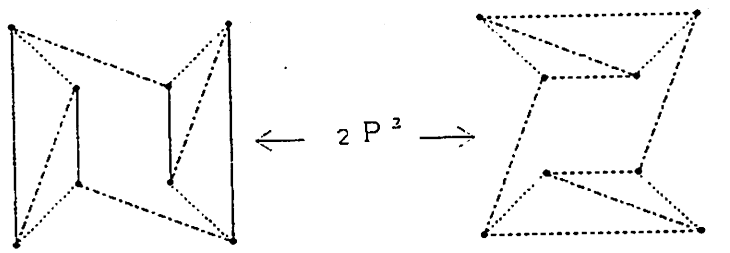
(Pre-connected pre-bipartite)

example 3.





G_4^- G_3^-



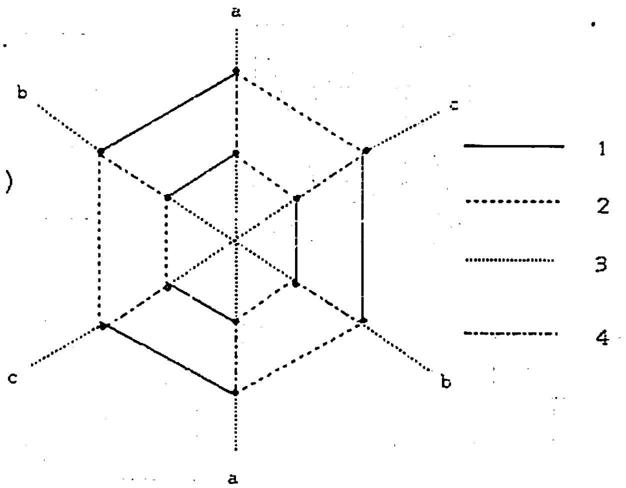
G_2^- G_1^-

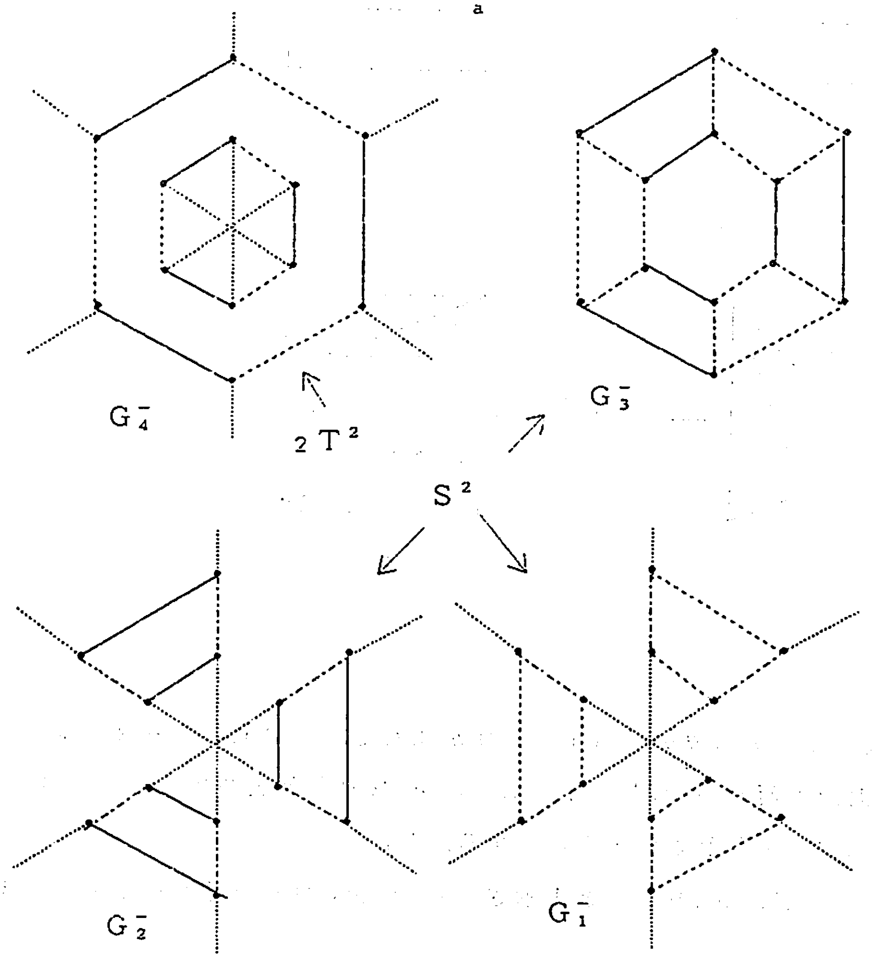
この例は、4つの境界のうち1つだけが球面で、その他のうち2つはクラインボトル（射影平面を P^2，クラインボトルを $2P^2$ と表わす）、1つはトーラス（$S^1 \times S^1 = T^2$ と表わすこととする。）。

Example 4. では、a，b，c と表示された edges はそれぞれ同じものである。

example 4.

$(S^1 \times S^1 \times I)$

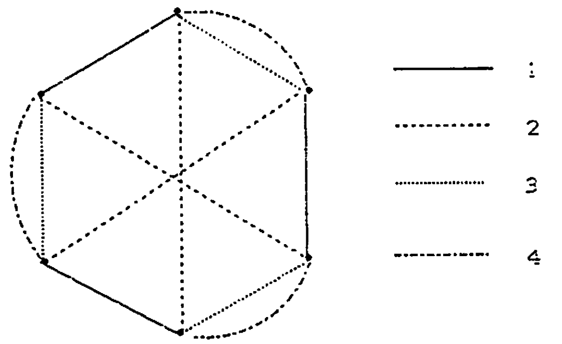


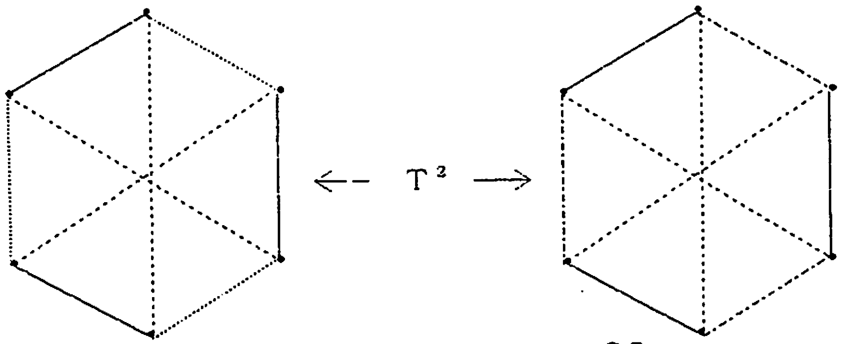


Example 4 と5 は同じ多様体の異なる表現、 $P^3[G,c]$ として、 example 4は 3つの 3-ball で表現され、 example 5 は2つの 3-ball を使っている。

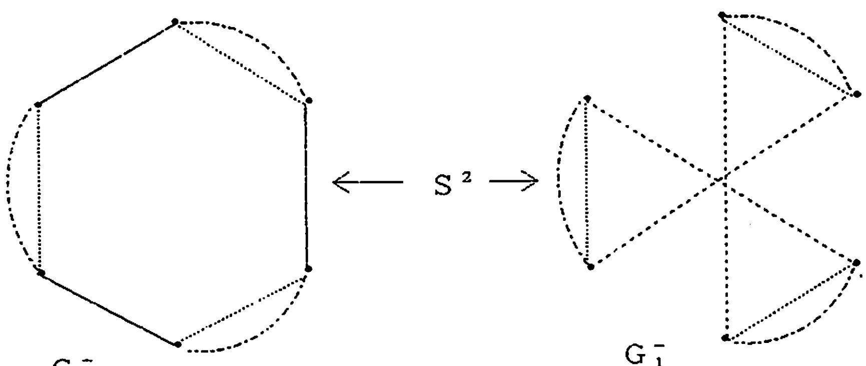
example 5.

$(S^1 \times S^1 \times I)$





G_4^- G_3^-



G_2^- G_1^-