On Hoops in Induced Frames

津久井 康之
（相模工大）

§0

コンパクトで境界をもたない 3-manifold M の ball covering $\mathcal{B}=\{B_1, B_2, \cdots, B_b\}$($\cup B_i = M^3$, $B_i \cap B_j = \partial B_i \cap \partial B_j$ は 2-manifold) について、b=4 のとき、その singular locus のつくるグラフ $G(\mathcal{B}) = (\cap B_i, B_i \cap B_j \cap B_k)$ は、連結ならば、Mについての情報を十分に持っている「T」。

この報告はこのグラフG(B)が disconnected なある特別な場合について、より一般的(b≧4)に考察することによって、3-manifold の分類の研究のためには connected なもののうちある class のみを対象にすればよいことを示して、［T］の研究の方向の正当性をサポートするものである。

disconnected case で考察が残される1つの場合については次の機会に報告する。またここでの考え方は境界をもつ manifold に対して拡張することが出来るが、記述の容易さのためにコンパクトで境界のない manifold についてのみ報告することにする。形式的な議論のために manifold について connected は仮定しない。

§1ではこの理論の表現の明確化のために グラフの定義を拡張する。§2では b>4 の取扱いを容易にするためこれまでの ball covering に付随する概念を再構成する。それによって4色以上の edge coloured graph を導入する。§3でいくつかの 例をを示し、§4が本論である。最後にこの方面の参考文献のリストを挙げておく（但し、報告者が入手していないものもある）。

§1 Generalized Graph.

Xが polyhedron または集合の時 #X で集合Xの濃度 または polyhedron Xの連結成分の個数を表す。polyhedron の集合Xに対して $\cap X=\cap\{A: A\in X\}$とする。

1-1.[Definition] $G=(V,E,\psi)$が generalized graph(g-graph) とは、

1. V,E が finite sets で $V\cap E=\phi$
2. $\psi: E\to\{X: X\subset V, 0\leqq \#X\leqq 2\}$ mapping.

$e\in E$(edge)が hoop, loop または pure edge と呼ばれるのは $\#\psi(e)=0,1$ または 2 のときである。

以後 loop は必要ないので generalized graph とは loop を含まないものとする。

1-2.[Definition] g-graph $G=(V,E,(\psi))$ に対して map $c: E\to C$ が G の edge colouring であるとは、

$e\sim e'$(edge adjacent) ならば $c(e)\neq c(e')$ for any $e\neq e'\in E$ なる(普通は onto map)をいう。colouring についてのいくつかの問題についてはここでは省略する [T]。

§2 Ball covering と Induced frame.

2-1.[Definition] compact PL-manifold M^nに対して、M^n 内の (closed) n-ball の set $\mathcal{B}=\{B_1^n, B_2^n, \cdots, B_b^n\}$ が Mの ball covering である ($\mathcal{B}=\mathcal{B}(M)$) とは、

(1) $\cup B_i=M$, (2) $B_i\cap B_j=\partial B_i\cap\partial B_j$ は (n-1)-manifold (ϕでも disconnected でもよい), $i\neq j$.

2-2.[Definition] ball covering $\mathcal{B}=\{B_1^n,\cdots,B_b^n\}=\mathcal{B}(M)$ に対し、

$$\mathcal{S}^j=\mathcal{S}^j(\mathcal{B})=\{X\subset \mathcal{B}: \#X=j, \cap X\neq\phi\}\ (j\geqq 0)$$

とすると、$\mathcal{S}^0=\phi$、$\mathcal{S}^1=\mathcal{B}$, $\mathcal{S}^k=\phi\,(k>n+1)$.

$\mathcal{B}^i=\{W:\ W$ は $\cap X$ の連結成分$,X\in\mathscr{B}^{n+1-i}_{(\mathcal{B})}\}$ $(i=0,1,2,\cdots,n)$

$\mathcal{B}^{(i)}=\mathcal{B}^0\cup\mathcal{B}^1\cup\cdots\cup\mathcal{B}^i$. $P^i=P^i(\mathcal{B})=|\mathcal{B}^i|=|\mathcal{B}^{(i)}|$.

$\mathcal{B}^i$ の element は i-manifold で、 $\mathcal{B}^{(i)}$を$\mathcal{B}$の i-skelton 、 P^i を the induced i-polyhedron of $\mathcal{B}$という。 n=3 のとき、

$\mathcal{B}^3=\mathcal{B}$, $\mathcal{B}^2=\{$ punctured 2-spheres $\}$,

$\mathcal{B}^1=\{$ loops$(=S^1)$ and arcs $\}$, $\mathcal{B}^0=\{$ points $\}$.

ball covering $\mathcal{B}$ にたいして $G(\mathcal{B})=(\mathcal{B}^0,\mathcal{B}^1)$ はいつでも generalized graph になる。

2-3.[Definition] g-graph $G=(V,E)$ が induced (3)-frame とは，コンパクトで境界のない (3)-manifold M とその ball covering $\mathcal{B}=\mathcal{B}(M)$ があって、$G=G(\mathcal{B})$.

2-4.[Definition] induced frame $G=(V,E)$ の edge colouring $c:E\to C$ が induced colouring(induced framing) とは、bijection $h:C\to\mathscr{B}^3(\mathcal{B})$ があって、$e\in E\to e\subset\cap(h\cdot c(e))$ となることとする。すなわち、

$hc(e)=\{B_i,B_j,B_k\}\longleftrightarrow e\subset(B_i\cap B_j\cap B_k)$
(component)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}^1=E & \xrightarrow{\ c\ } & C \\ & & \Big\downarrow h \\ & & \mathscr{B}^3(\mathcal{B}) \end{array}$$

$p^k:\mathcal{B}^k\to\mathscr{B}^{n+1-k}_{(\mathcal{B})}$ を、$A\in\mathcal{B}\to\ \cap p^k(A)(\supset A)$ なる natural projection とすると

上の induced colouring は $hc=p^1$.

$\#\mathscr{B}^{n+1-k}_{(\mathcal{B})}$を $\mathcal{B}$ の k-th colour size ということがある。

induced frame と induced colouring(induced framing) の pair (G,c) をまた、induced frame と呼ぶことにする。

§3 Examples.

3-1. ある 3-manifold Mの ball covering $\mathcal{B}=\{B_1,B_2,\cdots,B_b\}$ に対して $\mathcal{B}'=\mathcal{B}(M)=\{B'_0,B'_1,\cdots,B'_b\}$ を次のようにして作る。

$A\in P^0$, $B\in P^1-P^0$, $C\in P^2-P^1$ として

3-1-A: $B'_0=N(A,M)$
3-1-B: $B'_0=N(B,M)$
3-1-C: $B'_0=N(C,M)$

$\Bigg\}$ regular neighbourhood

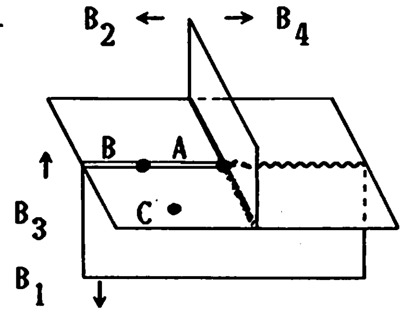
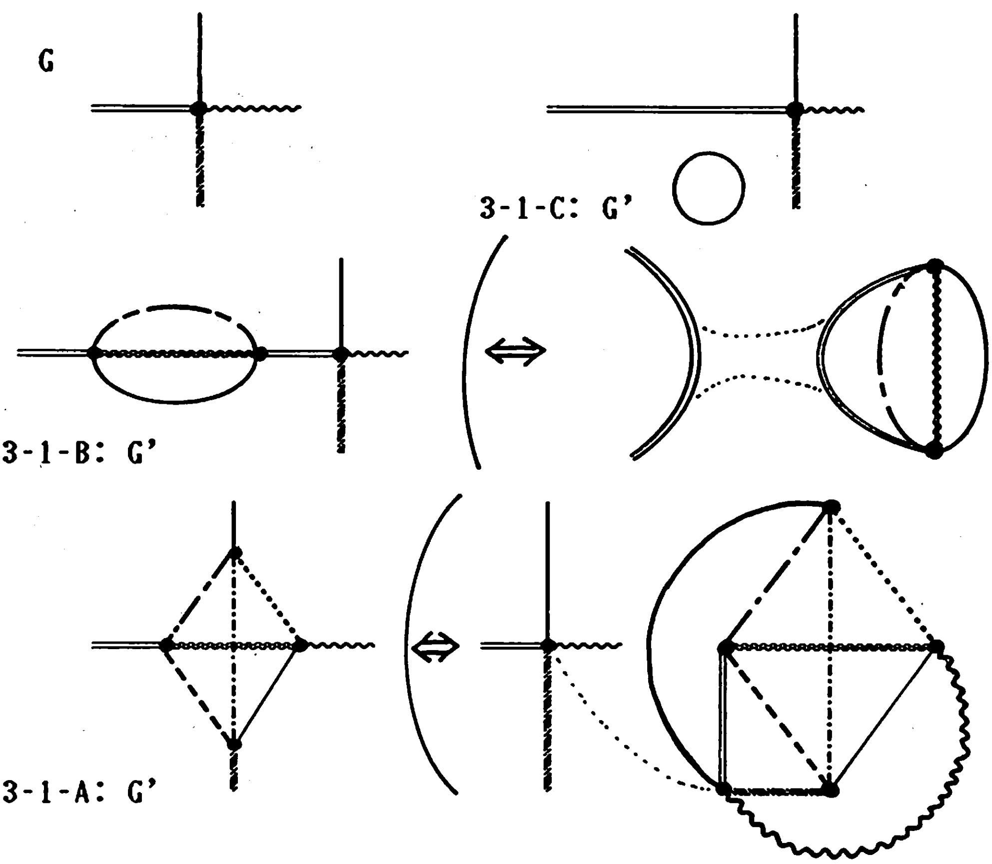


図 $P^2(\mathcal{B})$

$B'_i=cl(B_i-N)$ $(i=1,2,\cdots,b)$

$G(\mathcal{B})$ は $G'=G(\mathcal{B}')$ につぎのように変化する



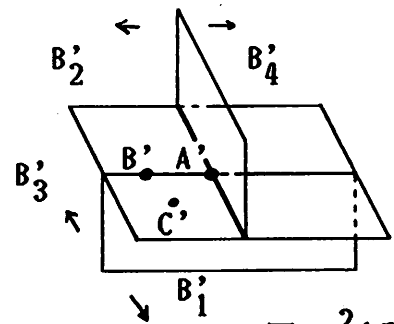


図 $P^2(\mathcal{B}')$

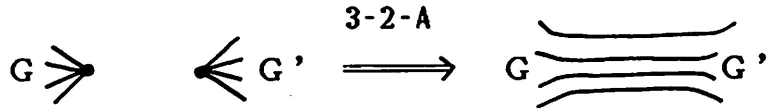
3-2. $\mathcal{B}=\mathcal{B}(M)$ を 3-1 のもの、
$\mathcal{B}'=\mathcal{B}(M')$ をべつの
ball covering とし、右の図を
その一部として、つぎのように
operation をおこなう。

3-2-A $N=N(A,M)$, $N'=N(A',M')$
3-2-B $N=N(B,M)$, $N'=N(B',M')$
3-2-C $N=N(C,M)$, $N'=N(C',M')$ } regular neighbourhoods

として、 orientation reversing homeomorphism $h: \partial N \to \partial N$ を
$h(B_i \cap \partial N)=(B_i \cap \partial N')$ と選び(適当な i に)、
(てきとうな i に対して) $B''_i=cl(B_i-N) \cup cl(B'_i-N')/h$.

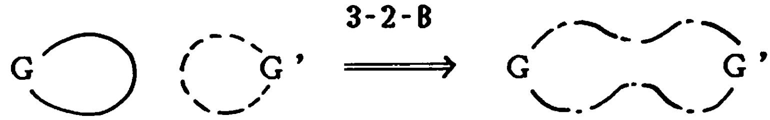
$\mathcal{B}''=\{B''_1,\cdots,B''_k,B_j,B'_j: k<j\leq b\}$ は
$M\#M'=cl(M-N)\cup cl(M'-N')/h$ の ball covering で、$G''=G(\mathcal{B}'')$ は
G''

3-2-A



(G # G')

3-2-B



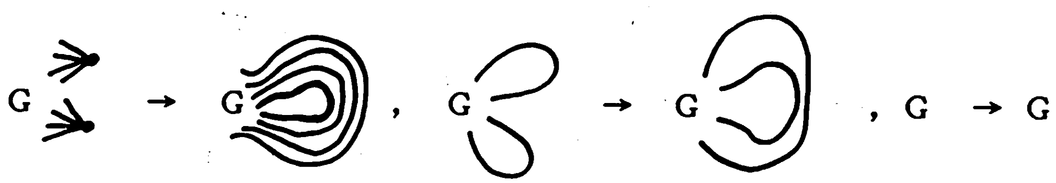
$(G \#_2 G')$

3-2-C

G G' $\Longrightarrow$ G G' (disjoint union)

Remark: 3-1 は 3-2 で $M'=S^3$の特殊な場合になる。

3-3. 3-2 において、B'_i を $\mathcal{B}$ 内にとって $B_i \cap B'_j = \phi\ (i, j=1, \cdots, k)$ とできる(A:$8 \leqq b$, B:$6 \leqq b$, C:$G \neq (\phi, \phi)$ なら $4 \leqq b$ が必要)ならば、3-2 と同様の operation で得られるものを M', $\mathcal{B}'$, G' とすると、$\#\mathcal{B}' = \#\mathcal{B} - k$ (k=2,3 or 4), $M' = M \# (S^1 * S^2)$ で G' は次のようになる:

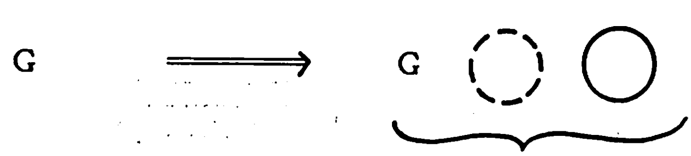


ここで、$S^1 * S^2$ は $S^1 \times S^2$ and/or twisted S^2-bundle over S^1。

3-4. 3-3-C で特に $b \geqq 3$ なら、$C \in \mathrm{int}(B_1 \cap B_2)$, $C' \in \mathrm{int}(B_1 \cap B_3)$ で、 $h(B_1 \cap \partial N) \subset \mathrm{int}(B_3 \cap \partial N')$ と h を選び、

$B'_i = \mathrm{cl}(B_i - N - N')$ (i=1,2,3), $B'_i = B_i$ (3<i),

$\mathcal{B}' = \{B'_1, \cdots, B'_b\}$ とすると、 $\mathcal{B}' = \mathcal{B}(M \# S^1 * S^2)$.



3-5. $G = G(\mathcal{B}) = G(\mathcal{B}(M))$, $G' = G(\mathcal{B}') = G(\mathcal{B}(M'))$ とし、
$b = \#\mathcal{B} \geqq 4$, $b' = \#\mathcal{B}' \geqq 4$, $\mathrm{ord}G = \#V(G) \neq 0$, $\mathrm{ord}G' = \#V(G') \neq 0$ とする。
$p_1 \in \mathrm{int}(B_1 \cap B_2)$ と $p'_1 \in \mathrm{int}(B'_1 \cap B'_2)$ で 3-2-C, つづいて
$p_2 \in \mathrm{int}(B_3 \cap B_4)$ と $p'_2 \in \mathrm{int}(B'_3 \cap B'_4)$ で 3-3-C を行うと,

$$G'' = G \sqcup G' = G(M \sqcup M') = G(M \# M') = G(M \# M' \# S^1 * S^2)$$

($\sqcup$ は disjoint sum を表わす)。

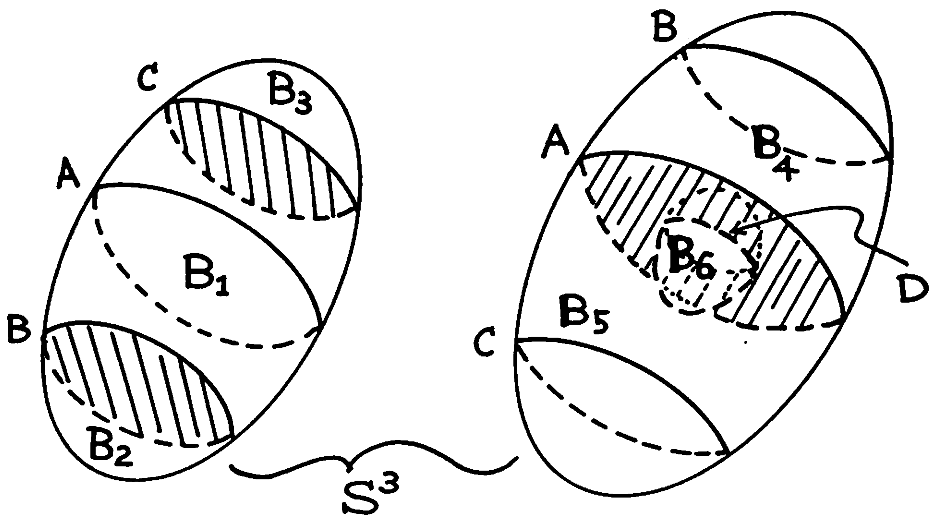
これをまとめると:

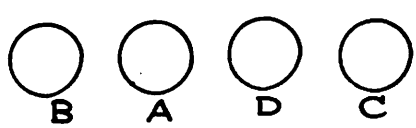
3-6. Proposition Closed 3-manifolds M, M' とそのグラフ G が存在して、 $G = G(\mathcal{B}(M)) = G(\mathcal{B}(M'))$, $\mathcal{B}(M) \neq \mathcal{B}(M')$, $M \neq M'$.

3-7. Problem $M \neq M'$, $G(M)=G(M')$ なる（induced colouring 同型な） connected graph G は存在するか？

［ordG=0 なら、hoop のみの graph $G=G(S^3)=G(k(S^1 * S^2))$ がつくれる。しかしこのとき disconnected で edge-colouring が異なる－すなわち、$\#\mathcal{B}(S^3) \neq \#\mathcal{B}(k(S^1 * S^2))$］

3-8. $\mathcal{B}=\{B_1,\cdots,B_6\}=\mathcal{B}(S^3)$, $G=G(\mathcal{B})$ を下の図のように取る。



G=G($\mathcal{B}$)： 

$G_B=G(\mathcal{B}(M_B))$, $G_C=G(\mathcal{B}(M_C))$, $G_D=G(\mathcal{B}(M_D))$ を nontrivial closed 3-manifold M_B, M_C, M_D の connected induced graphs とする。点 p_B, p_C, p_D を hoops B, C, D 上に取り、対応して、

点 p_B', p_C', p_D' を G_B, G_C, G_D の edges の上に取って 3-2-B の operation を行う。出来たグラフ $G_B \cup G_C \cup G_D \cup A$ は $M_B \# M_C \# M_D$ を表現する。

§4　A Role of a Hoop.

disconnected な induced graph の性質・およびその表現する 3-manifold の性質を明らかにしたい。これが一応の目標だが、ここでは hoop を含むときだけを扱う。結論だけを言えば、
「induced graph が disconnected なら表現される manifold は、$\#\mathcal{B}$ and/or ordG の意味で（and connected sum の意味でも）reducible である」　となるが、今後の研究に利用できる精密なものが望まれる。簡単な場合から順次見てゆくことにする。証明は短かく出来るが見通しが悪くなるのでいくつかに分ける。

4-1.[Definition]　　induced graph $G=(V,E)$ の hoop $h\subset E$ が
innermost であるとは、induced colouring(induced framing) $c:E\to C$ があって（$G=G(\mathcal{B})$ なる $\mathcal{B}$ を決めることと同じ）、h がある ∂B_i の上で 2-disk D を bound して $D\cap G=\partial D=h$。

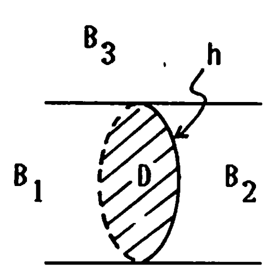
4-2.[Operation along an innermost hoop h: I (h)]
M を境界のない compact 3-manifold とし、

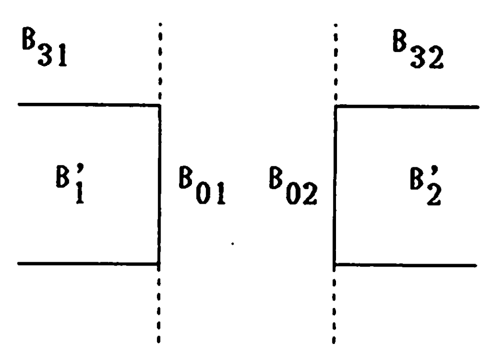
$$G=(V,E)=(\mathcal{B}^0,\mathcal{B}^1)=G(\mathcal{B}),\ \mathcal{B}=\{B_1,\cdots,B_b\}=\mathcal{B}(M)\ 、$$

h が inner most hoop で $h\subset B_1\cap B_2\cap B_3, h=\partial D, D\subset B_1\cap B_2$ とする。

このとき、$h\subset \partial B_3$ より、proper 2-disk $D_3\subset B_3$, $\partial D_3=\partial D=h$.

$S^2_{(h)}=D\cup D_3$ は２次元球面。$N=N(S^2_{(h)},M)$ を regular neighbourhood とする。（S(h) を induced 2-sphere of h ともいう）





$B'_i=cl(B_i-N)$ $(i=1,2)$, $B_{31}\cup B_{32}=cl(B_3-N)$,
$cl(M-N)$ に２つの 3-ball B_{01} と B_{02} を境界で貼り合わせると
closed 3-manifold $M'=cl(M-N)\cup B_{01}\cup B_{02}$を得る。
$B'_0=B_{31}\cup B_{01}$, $B'_3=B_{32}\cup B_{02}$, $B'_j=B_j$ $(j\neq 1,2,3)$ とおくと、
$\mathcal{B}'=\{B'_0,B'_1,B'_2,B'_3,B'_4,\cdots,B'_b\}$ は M' の ball covering で、
$\mathcal{B}$の induced frame $G'=G(\mathcal{B}')$ は $G'=(V,E-\{h\})=G-\{h\}$。結局、
(4-2) $\quad \#\mathcal{B}'=\#\mathcal{B}+1$, $\#E(G')=\#E(G)-1$

(Case 1) $\quad S^2_{(h)}\sim 0$ in $H_2(M,Z_2)$.
このとき、 $M'=M_1\cup M_2$ (disjoint union), $M=M_1\#M_2$,
$\mathcal{B}'=\mathcal{B}(M_1)\cup\mathcal{B}(M_2)$, $G'=G(\mathcal{B}(M_1))\cup G(\mathcal{B}(M_2))$.

(Case 2) $\quad S^2_{(h)}\nsim 0$ in $H_2(M,Z_2)$.
このときは、$M=M'\#\ S^1*S^2$.

4-3. Proposition $\mathcal{B}=\mathcal{B}(M)=\{B_1,\cdots,B_b\}$ が closed connected 3-manifold M の ball covering で $G=G(\mathcal{B})=(\phi,E)$ をその induced frame とするならば、

$$M=\frac{1}{2}(\#E-\#\mathcal{B}+2)(S^1*S^2).$$

(Proof) $\#E$(hoops の個数) の induction で示す。
$\#E=0$ ならば $b=2$ で $\#E-b+2=0\geqq 0$ $\quad M=S^3$ ($0(S^1*S^2)=S^3$).
つぎに $\#E>0$ とする。$ord(G)=0$ より innermost hoop が存在するからそのひとつを h として、operation I (h) (4-2) を行う。
(1) $S(h)\sim 0$ のとき、$M=M_1\#M_2$, $M'=M_1\cup M_2$, $\mathcal{B}'=\mathcal{B}(M')=\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2$,
$G'=G(M')=G_1\cup G_2$, ただし $\mathcal{B}_i=\mathcal{B}(M_i)$, $G_i=G(\mathcal{B}_i)=(V_i,E_i)$ $(i=1,2)$.
$b_1=\#\mathcal{B}_1$, $b_2=\#\mathcal{B}_2$ と略記すると、
$\#E-b+2=\#E_1+\#E_2+1-(b_1+b_2-1)+2=(\#E_1-b_1+2)+(\#E_2-b_2+2)\geqq 0$ (even)

$$\therefore\quad M=\frac{1}{2}(\#E_1-b_1+2)(S^1*S^2)\ \#\ \frac{1}{2}(\#E_2-b_2+2)(S^1*S^2)$$

$$=\frac{1}{2}(\#E-b+2)(S^1*S^2)$$

(2) $S(h)\neq 0$ のとき、$M=M_1\#(S^1*S^2)$

$$\#E-b+2=\#E_1+1-(b_1-1)+2=(\#E_1-b_1+2)+2$$

$$\therefore\quad M=\frac{1}{2}(\#E_1-b_1+2)(S^1*S^2)\ \#\ (S^1*S^2)=\frac{1}{2}(\#E-b+2)(S^1*S^2)$$

Remark. 4-3 は Theorem 4.3[KT] の拡張で精密化にもなっている。

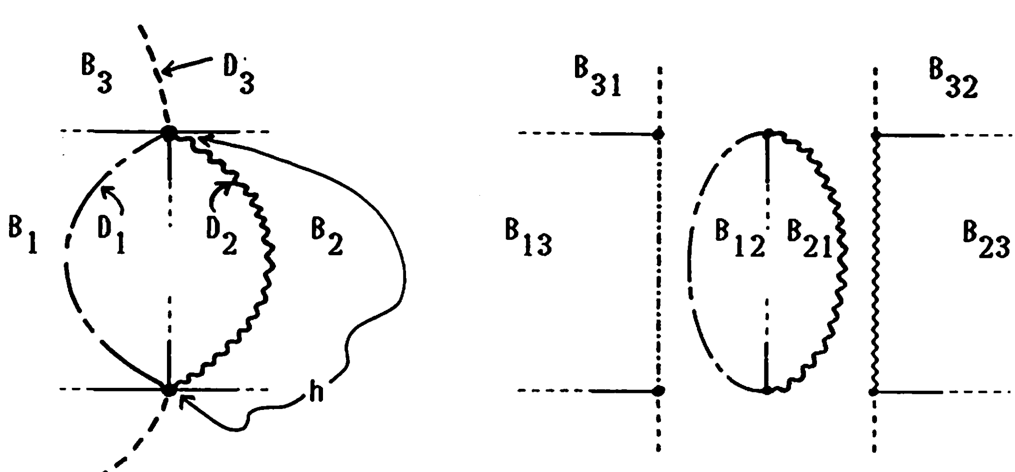
4-4.[Operation along a hoop h :O(h)]

$\mathcal{B}=\mathcal{B}(M)=\{B_1,B_2,\cdots,B_b\}$ を境界のない compact 3-manifold M の ball covering とし、$G=(V,E)=G(\mathcal{B})$ をその induced frame とする。 いま、G が hoop $h\subset(B_1\cap B_2\cap B_3)$ を含むものとする。

$h\subset\partial B_i$ より proper 2-disk $D_i\subset B_i$ $\partial D_i=h$ が存在する。

$S^2_{(h)}=\{S_1,S_2,S_3\}$ を induced 2-spheres of h という、ただし、$S_i=D_j\cup D_k$ $(\{i,j,k\}=\{1,2,3\})$ とする。

regular neighbourhood $N=N(D_1\cup D_2\cup D_3,M)$ の境界の３つの球面 ∂N は $S(h)$ と ambient isotopic .



$B_{ij} \cup B_{ik} = cl(B_i - N)$ は２つの balls, $i=1,2,3$, $\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$
$cl(M-N)$ の境界に3-balls ３個貼り付けると 境界のない compact
3-manifold $M'=cl(M-N) \cup B_{(12)} \cup B_{(23)} \cup B_{(31)}$ を得る。 ここで、

$$B_1^+ = B_{12} \cup B_{(12)}, \quad B_2^+ = B_{23} \cup B_{(23)}, \quad B_3^+ = B_{31} \cup B_{(31)},$$
$$B_1' = B_{13}, \quad B_2' = B_{21}, \quad B_3' = B_{32}, \quad B_i' = B_i \ (i \neq 1,2,3)$$

とおくと、

$\mathcal{B}' = \{B_1^+, B_2^+, B_3^+, B_1', \cdots, B_b'\} = \mathcal{B}(M')$ は M の ball covering でその
induced frame を $G'=G(\mathcal{B}')=(V',E')$ とすれば、$V'=V, E'=E-\{h\}$.
(4-4) $\quad \#\mathcal{B}' = \#\mathcal{B}+3, \quad \#E' = \#E-1.$

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 \sim 0 \text{ in } H_2(M, Z_2)$$

(Case 1): $S_1 \sim S_2 \sim S_3 \sim 0.$
このとき、$M'=M_1 \cup M_2 \cup M_3$, $M=M_1 \# M_2 \# M_3$
(Case 2): $S_1 \sim S_2 \nsim 0$, $S_3 \sim 0$ の場合は、

$$M'=M_1 \cup M_2, \quad M=M_1 \# M_2 \# (S^1 * S^2)$$

(Case 3): $S_i \nsim 0$, $S_i \nsim S_j$ $(i,j=1,2,3,\ i \neq j)$ ならば、

$$M=M_1 \# \ 2(S^1 * S^2)$$

Remark 1. h が innermost のときは、たとえば S_2^2 が 3-ball を bound し、S_1^2 と S_3^2 が ambient isotopic となり、4-4 は 4-3 を含む。

2. たとえば $B_1 \cap |E| = h$(a hoop) ならば $S(h)$はすべて 3-ball を bound し、$\#\mathcal{B}$ を減らすことができる。

3. innermost でない hoop だけを含む例がある(3-8)。

4-5. Proposition connected closed 3-manifold M の ball covering $\mathcal{B}=\mathcal{B}(M)=\{B_1,B_2,\cdots,B_b\}$ の induced frame $G=G(\mathcal{B})=(V,E)$ について、$\#E-2\#V>0$ (hoop あり) で innermost hoop はないとする。

このとき 4-4 Case 1 には $b=\#\mathcal{B}\geqq 9$,

4-4 Case 2 には $b=\#\mathcal{B}\geqq 5$ が必要である。

4-6. Corollary M を connected closed 3-manifold, $\mathcal{B}=\{B_1,B_2,\cdots,B_b\}=\mathcal{B}(M)$ は ball covering, $G=G(\mathcal{B})=(V,E)$ を $\mathcal{B}$ の induced frame とすれば、ball coverings $\mathcal{B}_i=\mathcal{B}(M_i)$ とその induced frames $G_i=G(\mathcal{B}_i)=(V_i,E_i)$ が存在して、$i=1,2,\cdots,n$。

(1) $M=M_1\#M_2\#\cdots\#M_n\#\, k(S^1 * S^2)$,

(2) $\#E_i-2\#V_i=0$ (すなわち hoop なし), $i=1,2,\cdots,n$,

(3) $b=\#\mathcal{B}\leqq \Sigma\#\mathcal{B}_i$,

(4) $\mathrm{ord}(G)=\Sigma\,\mathrm{ord}(G_i)$.

References

[KT] Kobayashi K. & Tsukui Y., The ball coverings of manifolds, J. Math. Soc. Japan 28(1976)133-143.

[T] Tsukui Y., On handle free 3-manifolds, (to appear).

<<BALL-COV.REF>> (87/06/15) file volume : 21

[1] Berstein I. & Ganer T.,
The category of a map and of a cohomology class,
Fund. Math. 50(1962)265-279.

[2] Cavicchioli A. & Grasselli L.,
Minimal atlases of manifolds,
Cahiers Top. Geom. Diff. (1983)389-397.

[3] Ferri M. & Gagliarde C.,
Strong ball coverings of manifolds,
Atti. Semi. Mat. Fis. Univ. Modena 28(1979)289-293 [82h:57016].

[4] Fox R.H.,
On the Lusternik-Schnirelmann category,
Ann. of Math. 42(1941)333-370.

[5] Ganer T.,
Lusternik-Schnirelmann category and strong category,
Illinois J. Math. 11(1967)416-427.

[6] Glaser L.,
Intersections of combinatorial balls of Euclidean spaces,
Trans. AMS. 122(1966)311-320.

[7] Hempel J.P. & McMillan D.R.,
Covering three-manifolds with open cells,
Fund. Math. 64(1969)99-104.

[8] Ikeda H.,
Note on the 4-manifolds in C(p,2) with p>=1,
Math. Semi. Notes 6(1978)527-530.

[9] Ikeda H. & Yamashita M.,
Closed 4-manifolds covered by three 4-balls,
Yokohama Math. J. 26(1978)109-117.

[10] James I.M.,
On category in the sense of Lusternik-Schnirelmann,
Topology 17(1978)331-348.

[11] Kobayashi K. & Tsukui Y.,
The ball coverings of manifolds,
J. Math. Soc. Japan 28(1976)133-143.

[12] Luft E.,
Covering of manifolds with open cells,
Illinois J. Math. 13(1969)321-326.

[13] Mielke M.,
Spherical modifications and coverings by cells,
Duke Math. J. 36(1968)49-58.

[14] Moran D.,
Minimal cell coverings of some sphere bundles,
Comm. Math. Univ. Carolinae 14(1973)647-650.

(180)

[15] Moran D.,
Cell coverings and residual sets of closed manifolds,
Illinois J. Math. 20(1976)516-518.

[16] Osborne R. & Stern J.,
Covering manifolds with cells,
Pacific J. Math. 30(1969)201-207.

[17] Singhof W.,
Minimal coverings of manifolds with balls,
Manuscripta Math. 29(1979)385-415.

[18] Takens F.,
The minimal number of critical points of a function on a compact manifold and the Lusternik-Schnirelmann category
Invent. Math. 6(1968)197-244.

[19] Tsukui Y.,
On ball coverings for products of manifolds,
Yokohama Math. J. 25(1977)113-117.

[20] Tsukui Y.,
On handle free 3-manifolds,
NHMS'topology and computer science' ***(1986)***-***.

[21] Yamashita M. & Ikeda H.,
4-manifolds of covering number 2,
Math. Semi. Notes 4(1976)105-111.

<<FRAME.REF>> (87/06/15) file.volume : 69

[1] Bandieri P. & Gagliardi C.,
Generating all orientable n-manifolds from (n-1)-complexes,
Rend. Circ. Mat. Parermo 31(1982)233-246 [84b:57010].

[2] Bandieri P. & Donati A. & Grasserlli L.,
Normal crystallizations of 3-manifolds,
Geom. Dedicata 14(1983)405-418 [85a:57003].

[3] Bracho J.,
Cyclic crystallizations of spheres,
Manuscripta Math. 55(1986)213-218.

[4] Bracho J. & Montejano L.,
The combinatorics of colored trianguration of manifolds,
Geomet. Dedicata 22(1987)303-328.

[5] Cavicchioli A.,
Pseudo-disseczioni e triangolazione contratte di spazzi con singolarita islate
Atti Semi. Mat. Fis. Univ. Modena 27(1978)132-150.

[6] Cavicchioli A.,
Una rappresentazione delle trivarieta orientabili medianti minimali di superficie
Atti Sem. Mat. Univ. Modena 29(1980)294-319 [83a:57011]A.

[7] Cavicchioli A. & Gagliardi C.,
Crystallizations of PL-manifolds with connected boundary,
Boll. Un. Mat. Italy 17-B(1980)902-917 [85j:57029]A.

[8] Cavicchioli A. & Grasselli L. & Pezzana M.,
Su una decomposizione normale per le n-varieta chiuse,
Boll. Un. Mat. Italy 17-B(1980)1146-1165 [85j:57028]A.

[9] Cavicchioli A.,
A new handlebody decomposition of 3-manifolds with connected boundary and their fundamental group
Boll. Un. Mat. Italy 18-B(1981)131-149 [83e:57012]A.

[10] Cavicchioli A.,
Remarks on Heegaard splitting theory,
Boll. Un. Mat. Italy 18-B(1981)961-975 [83h:57014].

[11] Cavicchioli A.,
A three-manifold invariant independent of the homotopy type,
Boll. Un. Mat. Italy 1-D(1982)215-227 [84g:57014].

[12] Cavicchioli A. & Grasselli L.,
Minimal atlases of manifolds,
Cahiers Top. Geom. Diff. (1983)389-397.

[13] Cavicchioli A. & Grasselli L.,
Contracted triangulations as branched coverings,
Atti Semi. Mat. Fis. Univ. Modena 33(1984)241-246.

[14] Cavicchioli A.,
Lins-Mandel crystallizations,
TA. (1986)1-.

[15] Chiavacci R.,
Pseudocomplessi colorati e loro gruppi fondamentali,
PP. (1986)1-29.

[16] Chiavacci R. & Pareschi G.,
Some bounds for the regular genus of PL-manifolds,
PP. (1986)22.

[17] Donati A. & Grasselli L.,
Gruppo dei colori e cristallizazioni normali degli spazi linticolare
Boll. Un. Mat. Italy 1-A(1982)359-366.

[18] Donati A.,
A method of calculation of 3-manifolds fundamental group,
TA. (1985)1-.

[19] Donati A.,
Lins-Mandel manifolds as branched coverings of S^3^,
Discrete Math. 62(1986)21-27.

[20] Ferri M. & GarliardiC.,
Alcone proprieta caratteristiche delle triangolazioni contratte,
Atti Semi. Mat. Fis. Univ. Modena 24(1975)195-220.

[21] Ferri M.,
Una rappresentazione delle n-varieta topologiche triangolavili mediante grfi (n+1)-colorati
Boll. Un. Mat. Italy 13-B(1976)250-260.

[22] Ferri M.,
Crystallizations of 2-fold branched coverings of S^3^,
Proc. AMS. 73(1979)271-276.

[23] Ferri M. & Gagliarde C.,
Strong ball coverings of manifolds,
Atti. Semi. Mat. Fis. Univ. Modena 28(1979)289-293 [82h:57016].

[24] Ferri M. & Gagliarde C.,
On the genus of 4-dimensional products of manifolds,
Geom. Dedicata 13(1982)331-345 [84m:57010].

[25] Ferri M. & Gagliarde C.,
Crystallization moves,
Pacific J. Math. 100(1982)85-103 [83i:57011]A.

[26] Ferri M. & Gagliarde C.,
The only genus zero n-manifold is S^n^,
Proc. AMS. 85(1982)638-642 [84e:57017].

[27] Ferri M. & Gagliardi C.,
A characterization of punctured n-spheres,
Yokohama Math. J. 33(1985)29-38.

[28] Ferri M.,
Colour switchings and homeomorphism of manifolds,
PP. (1986)1-28.

[29] Ferri M. & Gagliardi C.,
Multiple residues in dimension three,
PP. (1986)1-19.

[30] Ferri M. & Lins S.,
Topological aspects of edge fusions in 4-graphs,
TA. (1986)1-.

[31] Ferri M. & Gagliarde C. & Grasselli L.,
A graph-theoretic representation of PL-manifolds - a survey on crystallizations
TA. Aequationes Math. (1987).

[32] Gagliarde C.,
Spezzamenti alla Heegaad per varieta n-dimentionali,
Boll. Un. Mat. Italy 13-A(1976)302-311.

[33] Gagliarde C.,
A combinatorial characterization of 3-manifold crystallizations,
Boll. Un. Mat. Italy 16-A(1979)441-449 [81a:57003].

[34] Gagliarde C.,
How to deduce the fundamental group of a closed n-manifold from a contracted triangulation
J. Comb. Inf. Syst. Sci. 4(1979)237-252 [81m:57014].

[35] Gagliarde C.,
Regular imbeddings of edge-coloured graphs,
Geom. Dedicata 11(1981)397-414 [83g:05032].

[36] Gagliarde C.,
Extending the concept of genus to dimension n,
Proc. AMS. 81(1981)473-481 [82a:57004].

[37] Gagliarde C.,
Recognizing a 3-dimensional handle among 4-coloured graphs,
Ricerche Mat. 31(1982)389-404 [84m:57008].

[38] Gagliarde C.,
Cobordant crystallizations,
Discrete Math. 45(1983)67-73 [85c:57017].

[39] Gagliardi C.,
On the genus of CP^2^,
PP. (1986)1-.

[40] Gagliardi C. & Volzone G.,
Handles in graphs and sphere bundles over S^1^,
TA. Europ. J. Comb. (1987).

[41] Grasselli L.,
A geometric description of normal crystallizations,
J. Geometry 24(1985)36-47 [86i:57003].

[42] Grasselli L.,
Simple contracted complexes are nonshellable,
TA. (1986)1-.

[43] Ikeda H.,
Note on the 4-manifolds in C(p,2) with p>=1,
Math. Semi. Notes 6(1978)527-530.

[44] Ikeda H. & Yamashita M.,
Closed 4-manifolds covered by three 4-balls,
Yokohama Math. J. 26(1978)109-117.

[45] Kobayashi K. & Tsukui Y.,
The ball coverings of manifolds,
J. Math. Soc. Japan 28(1976)133-143.

[46] Lins S.,
A sequence representation for maps,
Discrete Math. 30(1980)249-263.

[47] Lins S.,
Graph-encoded maps,
J. Comb. Theory B 32(1982)171-181.

[48] Lins S.,
Towards a catalogue of 3-manifold ctystallizations I.
construction of 3-connected bicubic graphs in the 2-sphere
Atti Semi. Mat. Fis. Univ. Modena 33(1984)369-377.

[49] Lins S.,
A simple proof of Gagliardi's handle recognition theorem,
Discrete Math. 57(1985)253-260.

[50] Lins S. & Mandel A.,
Graph-encoded 3-manifolds,
Discrete Math. 57(1985)261-284.

[51] Lins S.,
Paintings: a planar approach to higher dimensions,
Geom. Dedicata 20(1986)1-25.

[52] Lins S.,
Invariant groups on equivalent crystallizations,
TA. (1986)1-.

[53] Lins S.,
On the fundamental group of 3-gems and a 'planar' class of
3-manifolds
TA. Europ. J. Comb..

[54] Paris G. & Volzone G.,
Omologia di grafi colorati sugli spigoli,
Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 32(1983)217-231.

[55] Pezzana M.,
Atlanti minimali di varieta differenziabili compatte,
Boll. Un. Mat. Italy 6(1968)749-752.

[56] Pezzana M.,
Sulla struttura topologica delle varieta compatte,
Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 23(1974)269-277 [53#6606].

<<DSDIAGRM.REF>> (87/06/15) file volume : 21

[1] Ikeda H.,
Acyclic fake surfaces,
Topology 10(1971)9-36.

[2] Ikeda H.,
Acyclic fake surfaces which are spines of 3-manifolds,
Osaka J. Math. 9(1972)391-408.

[3] Ikeda H.,
Non-contractible acyclic normal spines,
Osaka J. Math. 10(1973)511-520.

[4] Ikeda H.,
Orientable 3-manifolds as singular block bundles,
Yokohama Math. J. 22(1974)141-149.

[5] Ikeda H.,
Singular block bundles,
Yokohama Math. J. 22(1974)79-100.

[6] Ikeda H.,
Fake surfaces which are spines of 3-manifolds,
Yokohama Math. J. 23(1975)55-61.

[7] Ikeda H. & Yamashita M.,
Mapping cylinders and manifolds,
Math. Semi. Notes 7(1979)647-656.

[8] Ikeda H.,
Acyclic 3-manifolds without closed chain,
Math. Semi. Notes 9(1981)25-57.

[9] Ikeda H. & Yamashita M.,
The collapsing maps of simplicial collapsings,
Math. Semi. Notes 9(1981)269-313.

[10] Ikeda H.,
Finding simpler spines for acyclic 3-manifolds,
Math. Seminar Notes 10(1982)57-68.

[11] Ikeda H. & Yamashita M.,
Note on the collapsing maps,
Math. Seminar Notes 10(1982)345-349.

[12] Ikeda H.,
Contractible 3-manifolds admitting normal spines with maximal elements
Kobe J. Math. 1(1984)57-66.

[13] Ikeda H.,
Identification map on the 2-sphere,
Kobe J. Math. 2(1985)163-167.

[14] Ikeda H. & Inoue Y.,
Invitation to DS-diagrams,
Kobe J. Math. 2(1985)169-186.

(186.)

<<DSDIAGRM.REF>> (87/06/15) file volume : 21

[15] Ikeda H.,
DS-diagrams with E-cycle,
Kobe J. Math. 3(1986)103-112.

[16] Ikeda H.,
The diversion of DS-diagrams,
PP. (1987)1-20.

[17] Ikeda H. & Yamashita M. & Yokoyama K.,
Deformations of DS-diagrams,
NH. (1987)1-57.

[18] Ishii I.,
Flows and spines,
PP. (1985)1-31.

[19] Ishii I.,
Combinatorial construction of a non-su¥ingular flow on a 3-manifold
Kobe J. Math. 4(1987)1-10.

[20] Ishii I.,
Flow-spines and Seifert fibred structure of 3-manifolds,
PP. (1987)1-18.

[21] Yamashita M.,
D%1%-deformation of DS-diagram,
PP. (1987)1-10.