辺着色グラフと3次元多様体

津久井 康之
（相模工大）

§1 Frame と Framing

以下全て Graph は loop を持たないものとする。

Def. graph $G=(V,E)$ が k-edge-colourable

$\iff \exists\, c: E \longrightarrow \{1,2,3,\cdots,k\}$ map such that

$v\in V,\ e,e'\in E,\ e>v,\ e'>v\quad e\neq e' \longrightarrow c(e)\neq c(e')$

Remark. k-regular graph が k-edge-colourable ならば chromatic index $=k$ 。

Notation 1. $N_k=\{1,2,\cdots,k\}$ colour set $k\in N$

2. $c: E\rightarrow N_k$ edge-colouring of $G=(V,E)$.

$E_i=c^{-1}(i)=\{e\in E \mid c(e)=i\}$ $\quad i\in N_k\quad \overline{E_i}=E-E_i$

$G_i=(V,E_i)\qquad \overline{G_i}=(V,E-E_i)$

$G_{ij}=(V,E_i\cup E_j)\qquad \overline{G_{ij}}=(V,E-E_i-E_j)$

$i,j\in N_k$

Def. $R(k)=$ a set of all k-regular graph of chromatic index k.

Def. ⟨weak frame⟩ $R(4)$ の subset Q_w を次のように定める。

$$G=(V,E)\in Q_w$$

$\Longleftrightarrow$ (1) $G \in R(4)$

(2) $\exists\, c : E \to N_4$ colouring

$\exists\, i_j : \overline{G_j} \to S_j^2 = \partial B_j^3$ embedding $j \in N_4$

(3) $\exists\, \mathcal{D} = \{D_1^2, \cdots, D_m^2\}$ a set of mutuarly disjoint 2-disks on ∂B_j^3, $m = \#|\overline{G_{jk}}|$

such that

$$(D_1^2 \cup \cdots \cup D_m^2) \cap i_j(|\overline{G_j}|) = \partial D_1 \cup \cdots \cup \partial D_m = i_j(|\overline{G_{j,k}}|)$$

$$\forall j\, \forall k \in N_4 \quad j \neq k.$$

上のような colouring c (と4つの embeddings i_j) を G の framing と呼ぶ。

Q_w の元 G ($^{\text{or}}$ (G,c)) を weak frame と呼ぶ.

Def. ⟨semi frame⟩ $Q_s = \{G \in Q_w \mid G \text{ is simple graph}\}$.

Def. ⟨frame⟩ Q_s の subset Q を次のように定める.

$$G=(V,E)\in Q$$

$\Longleftrightarrow$ (1) $G \in Q_s$

(2) $\exists\, c : E \to N_4$ edge-colouring of G

(*) dual graph of $i_j(\overline{G_j})$ is simple for some embedding i_j, $j \in N_4$

Remark

1 上の (*) は embedding に依らない. すなわち「$\overline{G_j} \subset S^2$ が, upto homeo. of S^2 で, unique であること」と同値。
(i.e. $\overline{G_j}$ は planar 3 edge-connected)
従って i_j を定めなくて colouring を framing という

Remark 2. $\overline{G_j} \cup \{e\} = (V, \overline{E_j} \cup \{e\})$ は non-planar for $\forall e \in E_j$ $j \in N_4$.

3. Q の element G (or (G, c)) を frame という。

§2. 3次元多様体の構成

$Q_w \ni G = (V, E)$ を weak frame

$$\left.\begin{array}{l} c : E \to N_4 \\ i_j : \overline{G_j} \longrightarrow \partial B_j^3 \quad j \in N_4 \end{array}\right\} G \text{ の framing}$$

$\bigcup_{j=1}^{4} \partial B_j$ に equivalence relation $\sim$ を次のように定義する。

1 $\bigcup_{j=1}^{4} i_j(|\overline{G_j}|) \ni x, y$

$x \sim y \Leftrightarrow \exists u \in |G| : i_j(u) = x,\ i_k(u) = y \quad j, k \in N_4$

2. ∂B_j^3 上と ∂B_k^3 上で $|\overline{G_{jk}}|$ の各 cycle は $(j \neq k)$ 2-disk D_a^j と D_a^k を bound する。

($D_a^j \cap i_j|\overline{G_j}| = \partial D_a^j$, $D_a^k \cap i_k|\overline{G_k}| = \partial D_a^k$)

上の 1 の relation $\sim$ について

$$\{ y \in \partial D_a^k \mid x \in \partial D_a^j,\ x \sim y \} = \partial D_a^k$$

で、∂D_a^j と ∂D_a^k の homeo を定めている。

この homeo を $D_a^j \cong D_a^k$ に拡張する。

これを $\bigcup_j \partial B_j^3$ 上に対して行なう。

これによって $\bigcup_j \partial B_j$ 上に equivalence relation $\sim$ が定まる。

$W^3 = W(G, c, i_j) = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 / \sim$ 閉多様体

$P^2 = P(G, c, i_j) = \partial B_1 \cup \partial B_2 \cup \partial B_3 \cup \partial B_4 / \sim$ fake surface

W, P は D_a^j の homeo に依存しないで定まる。

Remark 3. $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ は W の ball covering で、
$B_i \cap B_j = \partial B_i \cap \partial B_j$ は finite 2-disks. $(i \neq j)$.

Def. closed 3-manifold M^3 に対して
$W(G.c) \cong M$ となる $G \in Q_w$ $(G \in Q)$ を
M の weak frame (frame) という。

問題 1. $\forall M^3$: closed 3-manifold に対して $W(G.c.(i_j)) \cong M$ なる
weak frame $G \in Q_w$ (or frame) があるか.

2. $\left.\begin{array}{l}(G.c), (G.c') \in Q_w \\ + \ ?\end{array}\right\} \longrightarrow W(G.c) \cong W(G.c')$

3. $(G.c), (G'.c') \in Q_w$ $W(G.c) \cong W(G'.c')$ のとき
G と G' の関係は何か

§3. 3次元多様体とその (weak) frame.

Theorem 3.1 $\forall M^3$: closed 3-manifold $\rightarrow \exists G \in Q_w$, $\exists c$: colouring
$\exists i_j$ $(j=1,\cdots,4)$ such that $W(G.c, i_j) \cong M$

Theorem 3.2 $\forall M^3$: non trivial handle free closed 3-manifold
(i.e. $M^3 \not\cong S^3$, $\nexists S^2 \subset M$: nontrivial in $H_2(M)$)
$\Longrightarrow$ $\exists G = (V, E) \in Q$ $\exists c: E \rightarrow N_4$ framing s.t.
$W(G.c) \cong M$

(3.2) が ball covering を用いて証明される [ ]. S^3 と
$S^1 \times S^2$, $S^1 \times_\tau S^2$ に対し具体的に構成し、connected sum
により (3.1) が示される。

Def. (G, c), (G', c') を frame とその colouring ($\overset{\text{or}}{}$framing) とするとき $g: G \to G'$ (graph の map) が色保存 (framing-preserving) であるとは $\exists h: N_4 \to N_4$ 全単射 s.t.

$$h \cdot c(e) = c' \cdot g(e) \qquad \forall e \in E(G)$$

Def. frame $G \in Q$ の colouring (framing) が unique
$\Longleftrightarrow$
$c, c': E(G) \to N_4$ colouring (framing) に対して $i: G \to G$ (identity map) が色保存.

Def. frame $G \in Q$ が colouring-admissible (framing-admissible)
$\Longleftrightarrow$
$c, c': E(G) \to N_4$ colouring (framing) に対して $\exists g: G \to G$ (iso) が色保存 (framing-preserve).

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "g"] \arrow[d, "c"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & G' \arrow[d, "c'"] \\ N_4 \arrow[r, "h"] & N_4 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & G \arrow[dl, "c"'] \arrow[dr, "c'"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \\ N_4 \arrow[rr, "h"'] & & N_4 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "g"] \arrow[d, "c"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & G \arrow[d, "c"] \\ N_4 \arrow[r, "h"'] & N_4 \end{tikzcd}$$

保色　　一色　　容色

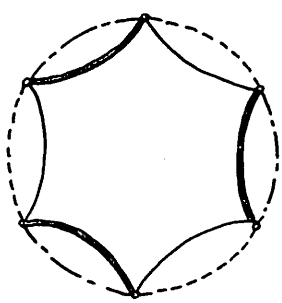
Theorem 3.3 (G, c), (G', c'): frame と framing
$f: G \to G'$ (iso) が色保存
$\Longrightarrow$ $W(G, c) \cong W(G', c')$

Theorem 3.4 G framing-admissible frame
$\Longrightarrow$ $W(G) \cong W(G\ c)$ (c framing)

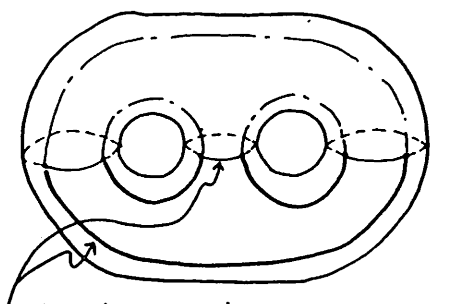
予想 1. frame は全て framing admissible.

予想 2. $\forall G \in Q$ frame $\forall c$: G の framing
$\Longrightarrow W(G,c)$: nontrivial handle free

Example 1 S^3 $\deg T_2 = 6$

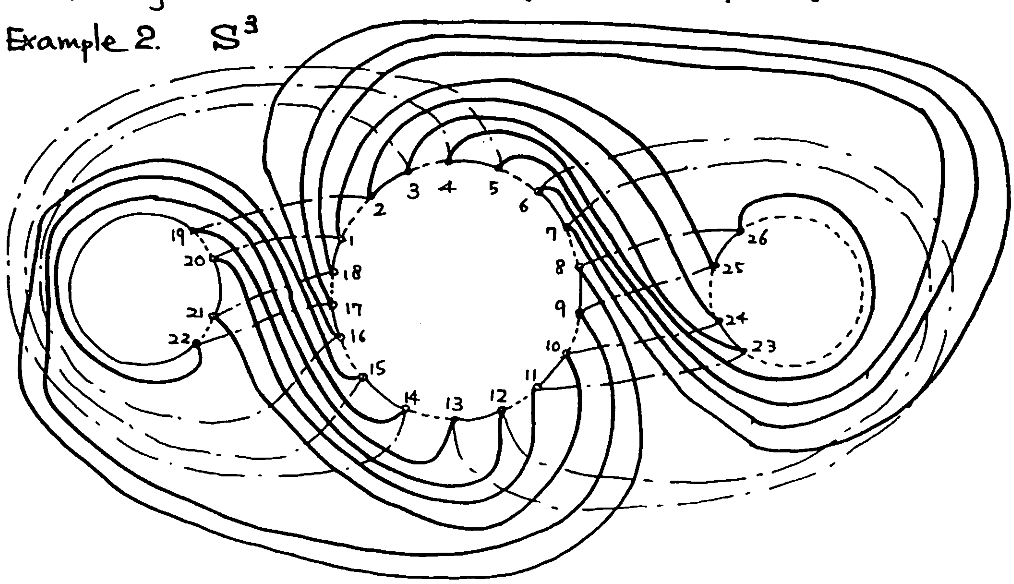


weak frame T_2 と framing.

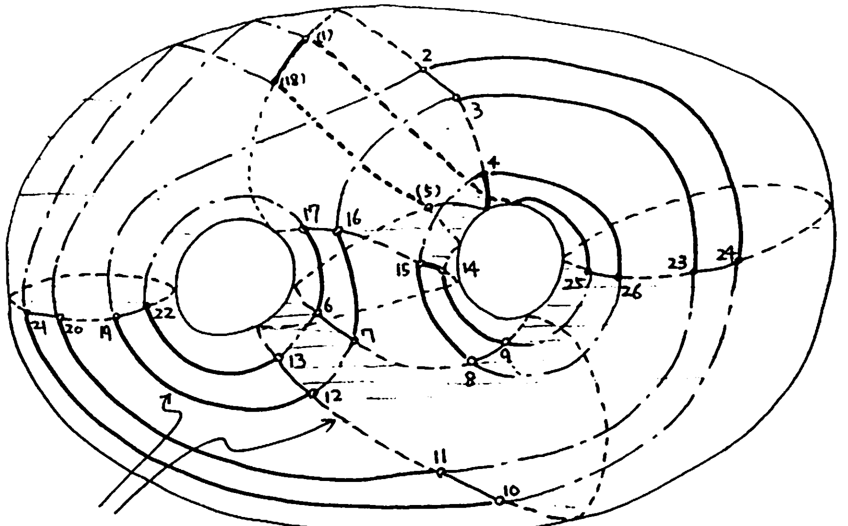


これを除く(2本のloop)と $W(T_2,c)$ の Heegaard Splitting (diagram).

Example 2. S^3



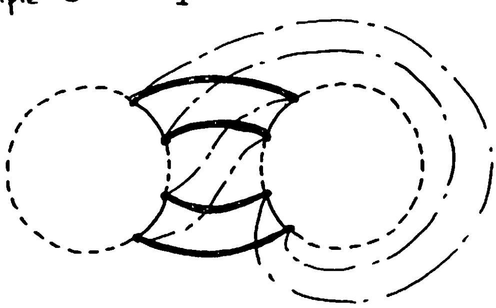
semi-frame T_2' と framing $\deg T_2' = 26$
(frame でない)



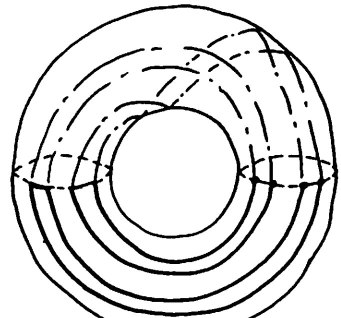
この2つの loop を除くと

$W(T_2', c)$ の Heegaard diagram

Example 3　　P^3

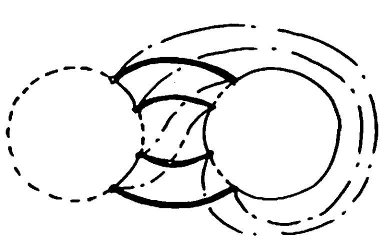


frame G と framing c

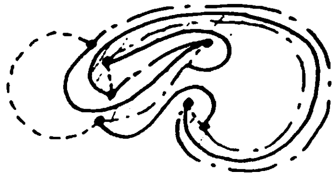


W(G, c) の Ball cov.

Example 4　　frame の colouring は必ずしも framing とならない.

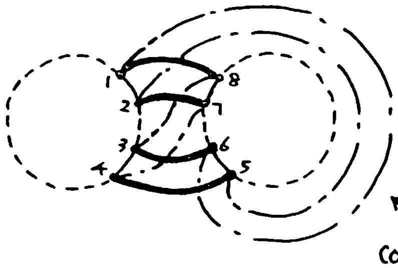


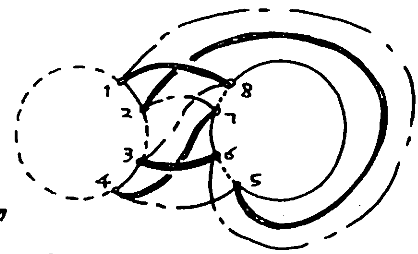
$\overline{G}_1$



$\overline{G}_1 \subset S^2$

Example 5　frame の framing (colouring) は unique でない。

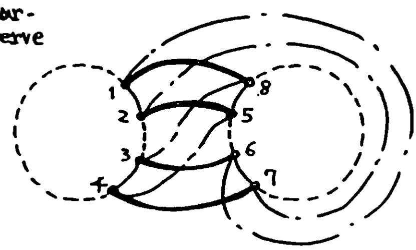




colouringが異なる。

≅

(5,7) ≅ colour-preserve



この例では framing-admissible.

Remark　これまでの報告では ここでいう frame を "Qpp-graph", "b-bone" と名付けていたが，ここでの colouring と framing の違いが明確でないので用語を変更した。

参考文献

[1] 小林一章．津久井康之 "The ball coverings of manifolds" J. Math. Soc. Japan 28(1976) 133-143.

[2] 津久井康之 "3-Manifold の Normal spine と Ball covering" 数理研講究録 524(1984)「多様体と fake surface」 p 9-20.

[3] 〃 "3-Manifold, Spines and Graphs" 同上 563(1985)「Theory of Spines of 3-manifolds」 p 84-90

[4] 〃 "On Graphs and Ball coverings of 3-Manifolds" 同上 to appear