

HAKONE SEMINAR 25(2009)69-128.

The Colored Turaev-Viro invariants for (s, t) -torus knots in lens spaces $L(p, q)$

谷口太聖*

平成 22 年 1 月 29 日

古宇田悠哉氏（東北大学）との共同研究

概要

Colored Turaev-Viro 不変量 [1] は、向き付けられた閉 3 次元多様体 M と、 M に埋め込まれた向き付けられた link L の対 (M, L) に対する不変量である。本稿では、レンズ空間 $L(p, q)$ ($0 < q < p$ とする) に埋め込まれた (s, t) -type torus knot ($0 < t < s$ とする) に対する Colored Turaev-Viro 不変量を TQFT の手法により計算する。

第 1 章では、o-spine と Colored Turaev-Viro 不変量の定義を紹介し、第 2 章では、 $\phi, L, R, \bar{L}, \bar{R}$ 型 [3] の 5 つの spine を用いて、レンズ空間 $L(p, q)$ 内の (s, t) -type torus knot に対する o-spine を構成し、その Colored Turaev-Viro 不変量の計算公式を与える。

1 Colored Turaev-Viro 不変量の定義

1.1 o-spine

定義 1.1 2次元の単体的複体 P が *simple polyhedron* であるとは、 P の各点の近傍が以下のいずれかである。

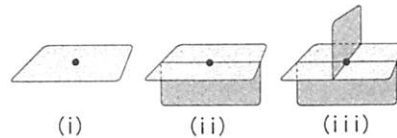


図 1: simple polyhedron の各点の近傍

定義 1.2 2次元の単体的複体 P が境界付きの *simple polyhedron* であるとは、 P の各点の近傍が以下のいずれかである。

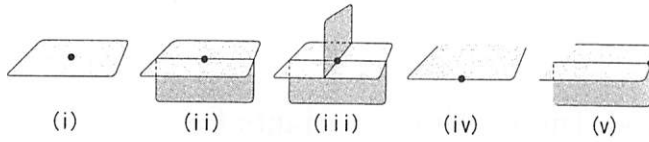


図 2: 境界付き simple polyhedron の各点の近傍

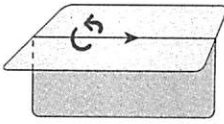


図 3: screw-orientation

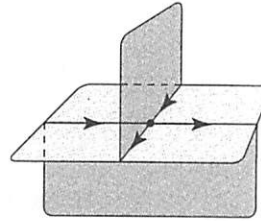


図 4: the compatibility of the screw-orientation

近傍が (iv) または (v) になっている点を P の境界という.

定義 1.3 simple polyhedron P が special であるとは, P の各 i -stratum が i -cell になっていることである.

このとき, special polyhedron P の 2-cell を face または region という.

closed 3-manifold M の subpolyhedron P が spine であるとは, $M \setminus P$ が open 3-ball に同相のときである.

special polyhedron の向きとは, 図 3 のように辺に沿った "screw-orientation" を決めることである. ただし, 各頂点においては図 4 のようになっているとする. 向き付け可能な多様体 M の special spine P に対して, M の向きを一つ決めると, M の向きと一致するような P の向きが 1 つ決まり, 逆に, P の向きを一つ決めると, P の向きと一致するような M の向きが決まる. special polyhedron P の marking とは, P のいくつかの face を選び, それらに向きを決めることである. 向き付けられた閉 3 次元多様体 M に向き付けられた link L が埋め込まれているとき, M の marked oriented special subpolyhedron P が (M, L) の o-spine であるとは, 次の 5 つの条件を満たすことである.

- (i) P の向きと M の向きが一致している;
- (ii) L と $P \setminus S(P)$ が transversely に交わっている;
- (iii) $M \setminus P$ の各 component B は open 3-ball に同相であり, $B \cap L$ は empty または unkotted arc である;

*E-mail : taniguchi@gshs.keio.ac.jp

- (iv) L の各 component は P と 1 点で交わる;
- (v) P の marked region(face) は, L が交わっている face のみであり, marked region(face) の向きは, L と M から決まる向きと一致する.

定理 1.4 (E. Pervova and C. Petronio [1]) 任意の pair (M, L) に対して, o -spine が存在する.

1.2 Colored Turaev-Viro 不変量 の定義

M を向き付けられた閉 3 次元多様体, L を M 中の向き付けられた link とする. r は 3 以上の整数で, $I = \{0, 1, 2, \dots, r-2\}$ として, ξ を I の要素による link L の coloring とする. ここで L の component を L_1, L_2, \dots, L_n とすると, $\xi(L_i)$ は L_i の color である.

向き付けられた閉 3 次元多様体 M と, M に埋め込まれた向き付けられた link L に対して, L の color ξ を一つ固定する. このとき, level r における $(M, L)_\xi$ の Colored Turaev-Viro 不変量 $CTV^{(r)}(M, L)_\xi$ は次のように定義される [1]

P を $(M, L)_\xi$ の o -spine として,

$$CTV^{(r)}(M, L)_\xi := w^{-m} \sum_{\eta \in \text{Adm}_\xi(P)} w(\eta),$$

ここで, m は L と交わらない $M \setminus P$ の ball component の数である. $\text{Adm}_\xi(P)$ とは, P の admissible coloring [4] のうち, link L の component L_i と交わっている P の面 α_i の color が $\xi(L_i)$ となっているような coloring の集合である. つまり, $\text{Adm}_\xi(P) = \{\eta \in \text{Adm}(P) \mid \eta(\alpha_i) = \xi(L_i)\}$ である. また, $w(\eta)$ とは

$$w(\eta) = \prod_{v \in V(P)} s_\eta(v) \prod_{c \in F(P)} w_{\eta(c)}$$

であり, $s_\eta(v)$ と w_i は, それぞれ関数 6j-symbol: $I^6 \rightarrow \mathbb{C}$ と weight: $I \rightarrow \mathbb{C}$ [4] である.

定理 1.5 (E. Pervova and C. Petronio [1]) $CTV(M, L)_\xi^{(r)}$ の値は o -spine P によらない.

2 Colored Turaev-Viro invariant of (s, t) -torus knots in lens space $L(p, q)$

2.1 o -spine of (s, t) -torus knot in $L(p, q)$

はじめに, [3] において与えたレンズ空間 $L(p, q)$ の special spine の構成方法を再掲する. この構成の過程で定義した solid torus V に対する ϕ 型の spine P_ϕ , $T^2 \times [0, 1]$ に対する 4 つ

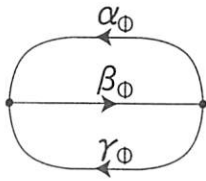


図 5: theta-curve θ_ϕ

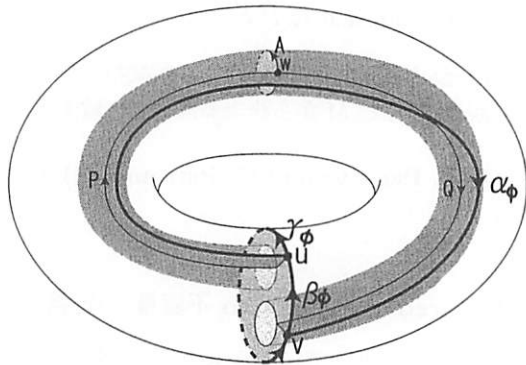


図 6: ϕ -type spine of the solid torus $V_{m,l}$

のタイプ (L, R, \bar{L}, \bar{R}) の spine $P_L, P_R, P_{\bar{L}}, P_{\bar{R}}$ についても復習をする。これらの spine を用いてレンズ空間 $L(p, q)$ 内の (s, t) -torus knot に対する o-spine を構成してゆく。

meridian m と, longitude l が 1 つ固定された solid torus を $V_{m,l}$ と書く。solid torus $V_{m,l}$ の ϕ 型の special spine P_ϕ とは図 6 に示された境界付きの spine のことであり, 以下の 2 つの性質をもつ。

1. P_ϕ の境界は図 5 の theta-curve θ_ϕ (つまり, $\partial P_\phi = \theta_\phi$) であり, $\partial V \setminus \partial P_\phi$ は open 2-disc に同相である。
2. 2 つの oriented loop $\gamma_\phi, \beta_\phi, \beta_\phi^{-1} \alpha_\phi^{-1}$ がそれぞれ, meridian m , longitude l にイソトピックである。

境界付の多様体 $T^2 \times [0, 1]$ の境界付き special spine \tilde{P}_X , $X = L, R, \bar{L}, \bar{R}$ とは次の性質を満たす。theta-curve θ_i^X ($i = 0, 1$) を図 7 のような 3 本の oriented edge $\alpha_i^X, \beta_i^X, \gamma_i^X$ からなる theta-curve とする。このとき, 埋め込み $\varphi := (\varphi_0^X, \varphi_1^X), \varphi_i^X : \theta_i^X \hookrightarrow T^2 \times \{i\}$ を次で定義

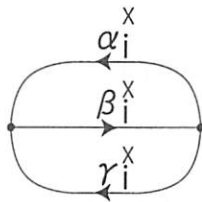


図 7: theta-curve θ_i^X

する。

- (i) $d(T^2 \times \{i\} \setminus \varphi_i^X(\theta_i^X))$ は 2-disc に同相である。

- (ii) 2つの oriented simple closed curve $m_i^X := \varphi_i^X(\alpha_i^X)\varphi_i^X(\beta_i^X)$, $l_i^X := \varphi_i^X(\beta_i^X)\varphi_i^X(\gamma_i^X)$ は, $H_1(T^2 \times \{i\})$ の基底になり, 同相写像 $f_X : T^2 \times \{0\} \rightarrow T^2 \times \{1\}$ を, $f_X(m_0^X) = m_1^X$ かつ $f_X(l_0^X) = l_1^X$ によって定義するとき, f_X から得られる準同型写像 $f_X^\# : H_1(T^2 \times \{0\}) \rightarrow H_1(T^2 \times \{1\})$ の表現行列が $([m_1^X], [l_1^X]) = ([m_0^X], [l_0^X])U_X$, $U_L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $U_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $U_{\bar{L}} = U_L^{-1}$, $U_{\bar{R}} = U_R^{-1}$ となる.

注意 2.1 この同相写像を $\times[0, 1]$ の identity によって同相写像 $\hat{f}_X : T^2 \times \{0\} \rightarrow T^2 \times \{0\}$ とみなすと,

$$\hat{f}_L([m_0^X], [l_0^X]) = ([m_0^X], [m_0^X] + [l_0^X]), \quad \hat{f}_R([m_0^X], [l_0^X]) = ([m_0^X] + [l_0^X], [l_0^X]), \quad \hat{f}_{\bar{X}} = \hat{f}_X^{-1}$$

である.

この埋め込み φ^X に対して, $T^2 \times [0, 1]$ の spine \tilde{P}_X ($X_i = L, R, \bar{L}, \bar{R}$) とは, $T^2 \times [0, 1]$ の sub polyhedron であり

$$\partial\tilde{P}_X = \varphi_0^X(\theta_0^X) \cup \varphi_1^X(\theta_1^X) \quad \text{かつ} \quad cl(T^2 \times [0, 1] \setminus \tilde{P}_X) \cong \text{3-ball}$$

となっている.

この spine \tilde{P}_X を用いて solid torus V_{m_X, l_X} の special spine P_X ($X = L, R, \bar{L}, \bar{R}$) が次のように定義される.

$$(V_{m_X, l_X}, P_X) := (V_{m, l}, P_\phi) \cup_g (T^2 \times [0, 1], P_{\tilde{X}})$$

ここで, 貼り合わせ写像 $g : \partial V_{m, l} \rightarrow T^2 \times \{0\}$ は

$$g(\alpha_\phi) = \alpha_0^X, \quad g(\beta_\phi) = \beta_0^X, \quad g(\gamma_\phi) = \gamma_0^X$$

で定義される. g で貼り合わせて得られた solid torus $V_{m_X, l_X} := V_{m, l} \cup_g (T^2 \times [0, 1])$ の meridian m_X と longitude l_X は, $\times[0, 1]$ の自然な identity 写像 id を用いて, $m_X = id(g(m))$, $l_X = id(g(l))$ で定義される. また, solid torus V_{m_X, l_X} の境界に埋め込まれた theta-curve θ_1^X の辺 $\alpha_1^X, \beta_1^X, \gamma_1^X$ は $\alpha_X, \beta_X, \gamma_X$ または α, β, γ と書く.

最後に, 有限個の文字からなる word $w = X_1 X_2 \cdots X_n$ ($X_i = L, R, \bar{L}, \bar{R}$) に対する solid torus の special spine P_w を以下のように帰納的に定義する.

$$(V_{m_{X_1 X_2 \cdots X_n}, l_{X_1 X_2 \cdots X_n}}, P_{X_1 X_2 \cdots X_n}) := (V_{m_{X_1 \cdots X_{n-1}}, l_{X_1 \cdots X_{n-1}}}, P_{X_1 \cdots X_{n-1}}) \cup_g (T^2 \times [0, 1], P_{\tilde{X}_n})$$

ここで, 貼り合わせ写像 $g : \partial V_{X_1 X_2 \cdots X_{n-1}} \rightarrow T^2 \times \{0\}$ は以下で定義される.

$$g(\alpha_1^{X_{n-1}}) = \alpha_0^{X_n}, \quad g(\alpha_1^{X_{n-1}}) = \beta_0^{X_n}, \quad g(\alpha_1^{X_{n-1}}) = \gamma_0^{X_n}$$

このとき, solid torus $V_{m_{X_1 \dots X_n}, l_{X_1 \dots X_n}}$ の meridian と longitude は $\times[0, 1]$ の自然な identity 写像 id を用いて, $m_{X_1 \dots X_n} = id(g(m_{X_1 \dots X_{n-1}}))$, $l_{X_1 \dots X_n} = id(g(l_{X_1 \dots X_{n-1}}))$ で定義される. また, solid torus $V_{m_{X_1 \dots X_n}, l_{X_1 \dots X_n}}$ の境界に埋め込まれた theta-curve $\theta_1^{X_n}$ の辺 $\alpha_1^X, \beta_1^X, \gamma_1^X$ は $\alpha_{X_1 \dots X_n}, \beta_{X_1 \dots X_n}, \gamma_{X_1 \dots X_n}$ または α, β, γ と書く. 以上のようにして, word $w = X_1 X_2 \dots X_n$ に対して solid torus V_w とその spine P_w が定義された. P_w は solid torus V_w の special spine になる ([3])

word $w = X_1 X_2 \dots X_n$ に対する solid torus の special spine P_w を用いて, レンズ空間 $L(p, q)$ の special spine を次のように構成した. p と q を互いに素な自然数 (ただし, $0 < q < p$ とする) としたとき, q/p の連分数展開から決まる L と R の有限列 $w(p, q)$ を以下のように定義する.

$$w(p, q) = \begin{cases} L^{d_1} R^{d_2} L^{d_3} \dots L^{d_{n-2}} R^{d_{n-1}} L^{d_n} & (n : \text{odd}) \\ L^{d_1} R^{d_2} L^{d_3} \dots R^{d_{n-2}} L^{d_{n-1}} R^{d_n} & (n : \text{even}) \end{cases},$$

ここで

$$\frac{q}{p} = \frac{1}{d_1 + \frac{1}{d_2 + \frac{1}{d_3 + \dots + \frac{1}{d_n + 1}}}}$$

このとき, solid torus V の special spine $P_{w(p,q)}$ と P_L に対して, $(V_{w(p,q)}, P_{w(p,q)}) \cup_g (V_L, P_L)$ によって, レンズ空間 $L(p, q) \cong V_{w(p,q)} \cup_g V_L$ に埋め込まれた special spine $P_{w(p,q)} \cup_g P_L$ が得られる ([3] 定理 4.2) .

定理 2.2 (p, q) と (s, t) を互いに素な自然数 (ただし, $0 < q < p, 0 < t < s$ とする) に対して, 2つの word $w_1 := w(s, t)$, $w_2 := \overline{Lw(p, q)}w(s, t)$ とすると, $V_{w_1} \cup_g V_{w_2}$ は レンズ空間 $L(p, q)$ に同相であり, $P_{w_1} \cup_g P_{w_2}$ は, $E := \hat{\beta}_{w_1} \cup_g \hat{\beta}_{w_2}$ を *marked region* とする $V_{w_1} \cup_g V_{w_2}$ に埋め込まれた (s, t) -torus knot の *o-spine* である. ここで, $\overline{X_1 X_2 X_3 \dots X_n} = \overline{X_n X_{n-1} X_{n-2} \dots X_1}$ であり, $\hat{\beta}_{w_i}$ とは, P_{w_i} の境界の辺 β に接する (辺 β を境界としてもつ) P_{w_i} の *face* のことである.

証明. 定義より, X から得られる同相写像 \hat{f}_X については $\hat{f}_X^{-1} = \hat{f}_X$ が成立するので, 2つの word $w_1 := w(s, t)$, $w_2 := \overline{Lw(p, q)}w(s, t)$ に対して, $V_{w_1} \cup V_{w_2} \cong V_\phi \cup V_{\overline{Lw(p, q)}} \cong V_{w(p, q)} \cup V_L \cong L(p, q)$ である. ここで, V_{w_1} の境界に埋め込まれた theta-curve について, oriented loop $\gamma_{w_1} \alpha_{w_1}^{-1}$ は solid torus $V_{w(p, q)}$ の (p, q) -torus knot であり ([3] 定理 3.6) , この loop は図 8 で示されているように β_{w_1} に接する face に一度だけ交わる loop k にアイソトピックである. また, $V_{w_1} \cup V_{w_2}$ の special spine $P_{w_1} \cup P_{w_2}$ において, face β_{w_1} は face β_{w_2} と貼り合わされて 1つの face になる. よって, レンズ空間 $L(p, q) \cong V_{w_1} \cup V_{w_2}$ に埋め込まれた $P_{w_1} \cup P_{w_2}$ は, $\beta_{w_1} \cup \beta_{w_2}$ が (s, t) -torus knot の *marked region* である *o-spine* となる. ■

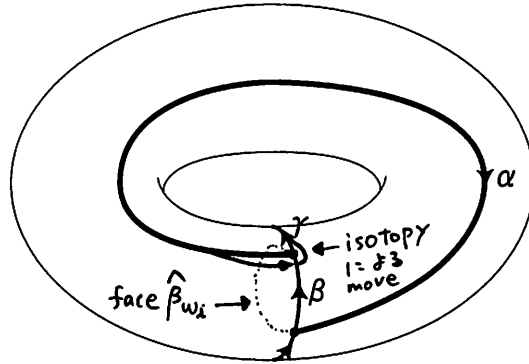


図 8: oriented loop $\gamma\alpha^{-1}$ が面 $\hat{\beta}_{w_i}$ に一点で交わる

2.2 計算公式

r を 3 以上の整数とする. このとき, 整数 $i = 0, 1, \dots, r-2$ に対して行列 M_i を以下のように定義する.

行列 M_i は $(r-1)r(r+1)/6$ 次の正方行列で, (j, j) 成分が 1 でその他は 0 であり, j とは, level が r における辞書式順序に並べた admissible coloring $(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j)$ において, $\beta_j = i$ となる j である.

次に, r を 3 以上の整数と p, q を互いに素な自然数 (ただし $0 < q < p$ とする) に対して, 行列 $M_{p,q}^{(r)}$ を定義する.

行列 $M_{p,q}^{(r)}$ は, [2] に定義されているベクトル $v_\phi^{(r)}$, 行列 $M_L^{(r)}, M_R^{(r)}$ を用いて

$$M_{p,q}^{(r)} := \begin{cases} \left(M_L^{(r)}\right)^{a_n} \cdots \left(M_R^{(r)}\right)^{a_4} \cdot \left(M_L^{(r)}\right)^{a_3} \cdot \left(M_R^{(r)}\right)^{a_2} \cdot \left(M_L^{(r)}\right)^{a_1} v_\phi & (n \text{ が奇数}), \\ \left(M_R^{(r)}\right)^{a_n} \cdots \left(M_R^{(r)}\right)^{a_4} \cdot \left(M_L^{(r)}\right)^{a_3} \cdot \left(M_R^{(r)}\right)^{a_2} \cdot \left(M_L^{(r)}\right)^{a_1} v_\phi & (n \text{ が偶数}), \end{cases}$$

ここで, a_1, a_2, \dots, a_n は $\frac{q}{p}$ の連分数展開によって決まる自然数である.

$$\frac{q}{p} := \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n + 1}}}}$$

とする.

定理 2.3 r を 3 以上の整数として, (p, q) と (r, s) を 2 組の互いに素な自然数 (ただし, $0 < q < p$ かつ $0 < s < r$) とする. このとき, 整数 $i = 0, 1, 2, \dots, r-2$ に対して, レンズ空

間 $L(p, q)$ に埋め込まれている i で coloring された (s, t) -type torus knot の level r における Colored Turaev-Viro 不変量は, 2つのベクトル $v_1 := M^{(r)}(s, t) \cdot v_\phi^{(r)}$ と $v_2 := M_i^{(r)} \cdot M_{s,t}^{(r)} \cdot (M_{p,q}^{(r)})^{-1} \cdot (M_L^{(r)})^{-1} \cdot v_\phi^{(r)}$ の内積で得られる.

証明. 定理 2.2 より, $V_{w_1} \cup_g V_{w_2}$ はレンズ空間 $L(p, q)$ に同相である. ベクトル $v_\phi^{(r)}$ と行列 $M_L^{(r)}$, $M_R^{(r)}$ から得られる線形写像 Z_ϕ , Z_L , Z_R が TQFT の公理を満たす [4] ので, 2つの word w_1, w_2 から得られるベクトル $M_{s,t}^{(r)} \cdot v_\phi^{(r)}$ と $M_{s,t}^{(r)} \cdot (M_{p,q}^{(r)})^{-1} \cdot (M_L^{(r)})^{-1} \cdot v_\phi^{(r)}$ の内積でレンズ空間 $L(p, q)$ の Turaev-Viro 不変量が得られる. このとき, special spine $P_{w_1} \cup_g P_{w_2}$ の region $\hat{\beta}_{w_1} \cup_g \hat{\beta}_{w_2}$ の color が i となる場合に制限して和をとったものが, $L(p, q)$ に埋め込まれた (s, t) -torus knot の Colored Turaev-Viro 不変量となる. これは, 2つの word w_1, w_2 から得られるベクトルのいずれか一方に, 左から行列 $M_i^{(r)}$ をかけることにより実現される. ■

2.3 ベクトル $v_\phi^{(r)}$, 行列 $M_L^{(r)}$, $M_R^{(r)}$, $M_i^{(r)}$

2.3.1 $r = 3$

$$v_\phi = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.3.2 $r = 4$

$$v_\phi = (1, -\sqrt{2}, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T,$$

where T means the transposition.

$$M_L = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

where \cdot means 0.

M_i ($i = 0, 1, 2$) はいずれも 10×10 の正方行列であり、以下に記す成分以外は全て 0 である。

M_0 は、(1, 1), (4, 4), (8, 8) 成分が 1 である。

M_1 は、(2, 2), (5, 5), (6, 6), (9, 9) 成分が 1 である。

M_2 は、(3, 3), (7, 7), (10, 10) 成分が 1 である。

2.3.3 $r = 5$

We put $a = \frac{5 - \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}}$.

$$v_\phi = (1, -1 - a^{1/2}, 1 + a^{1/2}, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T,$$

where T means the transposition.

M_i ($i = 0, 1, 2, 3$) は 20×20 の正方行列であり, 以下に記す成分以外は全て 0 である.

M_0 は, (1, 1), (5, 5), (11, 11), (17, 17) 成分が 1 である.

M_1 は, (2, 2), (6, 6), (7, 7), (12, 12), (13, 13), (18, 18) 成分が 1 である.

M_2 は, (3, 3), (8, 8), (9, 9), (14, 14), (15, 15), (19, 19) 成分が 1 である.

M_3 は, (4, 4), (10, 10), (16, 16), (20, 20) 成分が 1 である.

2.4 計算結果

mathematica を用いて, 定理 2.3 を $r = 3, 4, 5$ の場合で計算結果を 13 ページから 60 ページに掲載する.

この結果の読み方は以下の通りである. ただし, $L(0, 1)$, $L(1, 0)$ はそれぞれ $S^2 \times S^1$, S^3 を表すものとする.

$PQ[s, t, i, r]$ の次に書かれている行列は, 横を p 行目 ($p = 0, 1, 2, \dots$) 縦を q 列目 ($q = 0, 1, 2, \dots$) としたとき, (p, q) 成分がレンズ空間 $L(p, q)$ に埋め込まれている (s, t) -torus knot の Colored Turaev-Viro 不変量の値になっている.

$ST[p, q, i, r]$ の次に書かれている行列は, 横を s 行目 ($s = 0, 1, 2, \dots$) 縦を t 列目 ($t = 0, 1, 2, \dots$) としたとき, (s, t) 成分がレンズ空間 $L(p, q)$ に埋め込まれている (s, t) -torus knot の Colored Turaev-Viro 不変量の値になっている.

例えば, 行列 $PQ[2, 1, 0, 3]$ の $(0, 1)$ 成分は $S^2 \times S^1$ 内の 0-colored $(2, 1)$ -torus knot の level 3 における Colored Turaev-Viro 不変量の値である.

参考文献

- [1] E. Pervova and C. Petronio *On colored Turaev-Viro invariants for links in arbitrary 3-manifolds*, math. GT 10 Jun 2008
- [2] T. Taniguchi, *The Turaev-Viro Invariants of All Orientable Closed Seifert Fibered Manifolds*, Tokyo J. of Math., **30**(2007), 497-522
- [3] T. Taniguchi and K. Tsuboi and M. Yamashita, *Systematic singular triangulation of all Seifert manifolds*, Tokyo J. Math., **28**(2005), 539-561
- [4] V.G. Turaev and O.Y. Viro, *State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols*, Topology, **31** (1992), 865-902

ST[7,5,0,5]

$$\begin{pmatrix} \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & 1 & 1 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2}(3-\sqrt{5}) & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & 2 & \frac{1}{2}(3+\sqrt{5}) & 1 & 1 & 2 & \cdot \end{pmatrix}$$

ST[7,6,0,5]

$$\begin{pmatrix} \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{2}(3+\sqrt{5}) & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \frac{1}{2}(3-\sqrt{5}) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & 1 & 1 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \frac{1}{2}(3+\sqrt{5}) & 2 & 1 & 2 & 1 & \cdot \end{pmatrix}$$

ST[7,5,1,5]

$$\begin{pmatrix} \cdot & \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ST[7,6,1,5]

$$\begin{pmatrix} \cdot & \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{2}(-1-\sqrt{5}) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ST[7,5,2,5]

$$\begin{pmatrix} \cdot & \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}) & \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & -1 & -1 & \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}) & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}) & \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}) & 0 & \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}) & \cdot \end{pmatrix}$$

ST[7,6,2,5]

$$\begin{pmatrix} \cdot & \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & -1 & -1 & \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & 0 & \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}) & \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}) & \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & \cdot \end{pmatrix}$$

[128]

ST[7,5,3,5]

$$\begin{pmatrix} \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 2 & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -2 & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{2}(-3+\sqrt{5}) & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix}$$

ST[7,6,3,5]

$$\begin{pmatrix} \cdot & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \frac{1}{2}(-3+\sqrt{5}) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -2 & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix}$$