

Colored Turaev-Viro invariants for torus knots in Lens spaces

谷口太聖*

平成 21 年 1 月 15 日

概要

Colored Turaev-Viro 不変量 [1] は, 向き付けられた閉 3 次元多様体 M とその中の向き付けられた link L の対 (M, L) に対する不変量である. 本稿では, レンズ空間 $L(p, q)$ の中の (p, q) -type の torus knot に対する colored Turaev-Viro 不変量の計算公式を与える.

第 1 章では, colored Turaev-Viro 不変量の定義を紹介する. 第 2 章では, ϕ, L, R -diagram [3] を用いて, レンズ空間 $L(p, q)$ の中の (p, q) -type torus knot の o -spine を構成し, [2] と同じ TQFT の手法によって colored Turaev-Viro 不変量の計算公式を与える.

1 colored Turaev-Viro 不変量の定義

1.1 o -spine

定義 1.1 *Special polyhedron* P の全ての辺に向きが定められていて, P の全ての頂点の近傍で図 1 のようになるようになっているとき, P は向き付けられているという.

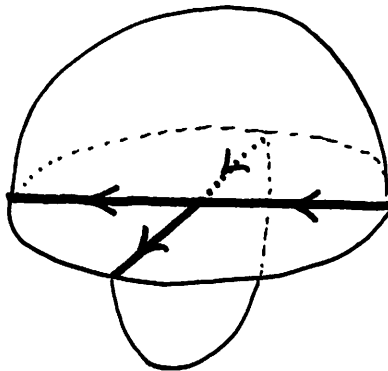


図 1

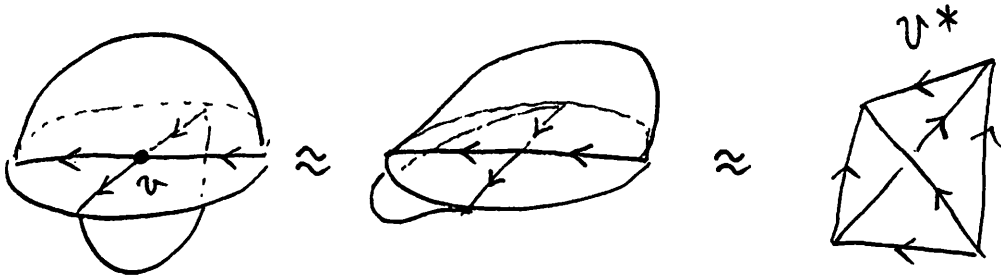
*E-mail: taniguchi@gshs.keio.ac.jp

定義 1.2 *Special polyhedron* P のいくつかの面に向きが定められているとき、 P は *marking* されているという。

向き付けられた閉 3 次元多様体 M の中に向き付けられた link L がある。このとき、 M に埋め込まれた marked oriented special polyhedron P が (M, L) の *o-spine* であるとは、次の 5 つの条件を満たすことである。

- (i) P の向きと M の向きが一致している。
- (ii) L と $P \setminus S(P)$ が transversely に交わる。
- (iii) $M \setminus P$ の各 component B は open 3-ball に同相であり、 $B \cap L$ は empty または unkotted arc である。
- (iv) L の各 component は P と 1 点で交わる。
- (v) marking された P の面で、向きが定められているのは L と交わっている面のみであり、それらの面の向きは、 L と M の向きから決まる向きと一致している。

注意 1 定義 1.2 の (i) 「 P の向きと M の向きが一致する」とは、 P の各頂点の v の近傍において、下図のように P の向きから誘導される v の dual complex の四面体 v^* の向き [5] が、 M から誘導される v^* の向きと一致していることである。



命題 1.3 (E. Pervova and C. Petronio [1]) 任意の pair (M, L) に対して、*o-spine* が存在する。

1.2 Colored Turaev-Viro 不変量 の定義

M を向き付けられた閉 3 次元多様体、 L を M の中の向き付けられた link とする。 r は 3 以上の整数で、 $I = \{0, 1, 2, \dots, r-2\}$ として、 ξ を I の要素による link L の coloring とする。ここで、 L の component を L_1, L_2, \dots, L_n とすると、 $\xi(L_i)$ は L_i の color である。

このとき, $(M, L)_\xi$ に対する colored Turaev-Viro 不変量 は次のように定義される. (M, L) の o -spine P に対して

$$CTV(M, L)_\xi = w^{-m} \sum_{\eta \in Adm_\xi(P)} w(\eta),$$

ここで,

$$w(\eta) = \prod_{v \in V(P)} s_\eta(v) \prod_{c \in F(P)} w_{\eta(c)}$$

$s_\eta(v)$ と w_i は, それぞれ関数 6j-symbol と weight[4] であり, $Adm_\xi(P) = \{\eta \in Adm(P) \mid \eta(\alpha_i) = \xi(L_i), \alpha_i \text{ と } L_i \text{ dual cell complex}\}$ で, m は L と交わらない $M \setminus P$ の ball component の数である.

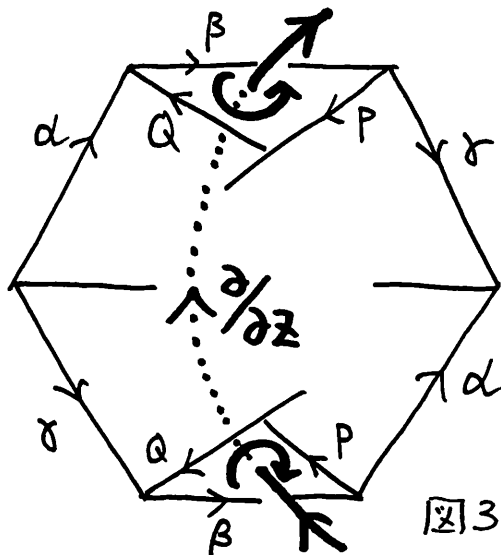
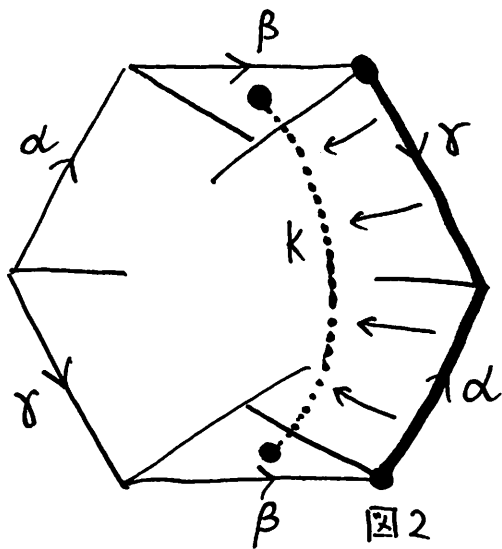
命題 1.4 (E. Pervova and C. Petronio [1]) $CTV(M, L)_\xi$ の値は o -spine P によらない.

2 Colored Turaev-Viro invariant of (p, q) -torus knots in Lens space $L(p, q)$

2.1 DS-diagram of (p, q) -torus knot in $L(p, q)$

[3] において, ϕ, L, R -diagram を用いてレンズ空間 $L(p, q)$ の special spine の構成方法を与えた. これは, p, q から決まる solid torus と DS-spine の対 $(T_{A(p,q)}, P_{A(p,q)})$ と $(T_{\bar{L}}, P_{\bar{L}})$ を貼り合わせ写像 φ [3] によって貼り合わせて構成するものだった. ([3] 定理 4.2)

solid torus $T_{A(p,q)}$ の境界に埋め込まれた loop $\gamma\alpha^{-1}$ は (p, q) -torus knot であり ([3] 定理 3.6), この loop $\gamma\alpha^{-1}$ は $P_{A(p,q)}$ の面 βPQ に一度だけ交わる loop k にアイソトピックである. (図 2) よって, この loop k は $L(p, q) \cong T_{A(p,q)} \cup T_{\bar{L}}$ の中の (p, q) -torus knot である.



以上より, $(L(p, q), (p, q)\text{-torus knot})$ の \circ -spine は次の手順で構成できる.

1. solid torus $T_{A(p, q)}$ に標準的な向き [5] を入れ, DS-spine $P_{A(p, q)}$ の向きは DS-diagram $\Delta_{A(p, q)}$ の辺の向きとする.
2. solid torus $T_{\bar{L}}$ に標準的な向きと逆の向きを入れ, DS-spine $P_{\bar{L}}$ の向きは DS-diagram $\Delta_{\bar{L}}$ の辺の向きと逆の向きとする. ($\partial\Delta_{\bar{L}}$ 以外の辺の向きを全て逆にする)
3. DS-spine $P_{A(p, q)}$ の面 βPQ の向きを, flow $\partial/\partial Z$ から決まる右ねじの向きとする. (図 3)
4. 貼り合わせ写像 φ で 2 つの solid torus を貼り合わせる.

以上により, レンズ空間 $L(p, q) \cong T_{A(p, q)} \cup T_{\bar{L}}$ 中の (p, q) -type knot k の \circ -spine $P_{A(p, q)} \cup P_{\bar{L}}$ が得られた. このとき, (p, q) -torus knot k が一度だけ交わる \circ -spine の面は, 向きの入った $P_{A(p, q)}$ の面 βPQ と $P_{\bar{L}}$ の面 βPQ を φ で貼り合わせて得られる面である.

2.2 計算公式

定理 2.1 r を 3 以上の整数, p と q を互いに素な自然数 (ただし, $0 < q < p$ とする) とする. レンズ空間 $M = L(p, q)$ 中の向き付けられた $k = (p, q)$ -type torus knot が $i \in \{0, 1, 2, \dots, r-2\}$ で coloring されている. このとき, level r における $(M, k)_i$ の colored Turaev-Viro 不変量 $CTV^{(r)}(M, k)_i$ は 2 つのベクトル $M_i \cdot v_{p, q}$ と $M_i \cdot u$ の内積で得られる.

ここで, M_i は $(r-1)r(r+1)/6 \times (r-1)r(r+1)/6$ の正方行列で, (j, j) 成分が 1 でその他は 0 である. j とは, level r における辞書式順序に並べた admissible coloring $(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j)$ において, $\beta_j = i$ となる coloring $(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j)$ の j である.

また, 2 つのベクトル $v_{p, q}$ と u は, 初期ベクトル v_ϕ と行列 $M_L, M_R/4$ を用いて以下のよう
に得られる.

$$u := (M_L)^{-1} \cdot v_\phi,$$

$$v_{p, q} := \begin{cases} (M_L)^{a_n} \dots (M_R)^{a_4} \cdot (M_L)^{a_3} \cdot (M_R)^{a_2} \cdot (M_L)^{a_1} v_\phi & (n \text{ is odd}), \\ (M_R)^{a_n} \dots (M_R)^{a_4} \cdot (M_L)^{a_3} \cdot (M_R)^{a_2} \cdot (M_L)^{a_1} v_\phi & (n \text{ is even}), \end{cases}$$

自然数 $\{a_m\}$ は連分数展開 $q/p = [a_1, a_2, \dots, a_m, 1]$ で得られたものである. ここで,

$$[k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, k_n] := \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \frac{1}{k_3 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{k_n}}}}}$$

である.

証明. ベクトル v_ϕ と行列 M_L, M_R から得られる線形写像 Z_ϕ, Z_L, Z_R が TQFT の公理を満たす [4] ので, [3] で与えた Turaev-Viro 不変量の公式と同じように colored Turaev-Viro 不変量は内積で得られるのだが, colored Turaev-Viro 不変量の定義より, o-spine の面で (p, q) -type torus knot が交わっている面の color が i のものだけの和をとるので, 2つのベクトル $u, v_{p,q}$ に行列 M_i をかけてから内積をとればよい. ■

2.3 行列

2.3.1 $r = 3$

$$v_\phi = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.3.2 $r = 4$

v_ϕ, M_L, M_R は [4] と同じ.

M_i ($i = 0, 1, 2$) はいずれも 10×10 の正方行列である.

M_0 は, $(1, 1), (4, 4), (8, 8)$ 成分が 1 であり, その他の成分は全て 0 である.

M_1 は, $(2, 2), (5, 5), (6, 6), (9, 9)$ 成分が 1 であり, その他の成分は全て 0 である.

M_2 は, $(3, 3), (7, 7), (10, 10)$ 成分が 1 であり, その他の成分は全て 0 である.

2.3.3 $r = 5$

v_ϕ, M_L, M_R は [4] と同じ.

M_i ($i = 0, 1, 2, 3$) はいずれも 20×20 の正方行列である.

M_0 は, $(1, 1), (5, 5), (11, 11), (17, 17)$ 成分が 1 であり, その他の成分は全て 0 である.

M_1 は, $(2, 2), (6, 6), (7, 7), (12, 12), (13, 13), (18, 18)$ 成分が 1 であり, その他の成分は全て 0 である.

M_2 は, $(3, 3), (8, 8), (9, 9), (14, 14), (15, 15), (19, 19)$ 成分が 1 であり, その他の成分は全て 0 である.

M_3 は, $(4, 4), (10, 10), (16, 16), (20, 20)$ 成分が 1 であり, その他の成分は全て 0 である.

2.3.4 計算結果

予想 2.2 任意の level r において、 $L(p, q)$ の Turaev-Viro 不変量と、 $L(p, q)$ の中の (p, q) -torus knot の 0-coloring colored Turaev-Viro 不変量の値は等しい。

level r における $L(p, q)$ の中の (p, q) -torus knot の i -coloring colored Turaev-Viro 不変量の値は以下の表のようになる。(mathematica を使用して内積を計算)

$r = 3 \quad i = 0$

$p \backslash q$	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	0					
3	1	1				
4	2		0			
5	1	1	1	1		
6	0				0	
7	1	1	1	1	1	1

$r = 4 \quad i = 0$

$p \backslash q$	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	a					
3	1	1				
4	2		2			
5	1	1	1	1		
6	b				b	
7	1	1	1	1	1	1

$a = 2 - \sqrt{2}$
 $b = 2 + \sqrt{2}$

$r = 3 \quad i = 1$

$p \backslash q$	1	2	3	4	5	6
1	0					
2	0					
3	0	0				
4	0		0			
5	0	0	0	0		
6	0				0	
7	0	0	0	0	0	0

$r = 4 \quad i = 1$

$p \backslash q$	1	2	3	4	5	6
1	0					
2	0					
3	0	0				
4	0		0			
5	0	0	0	0		
6	0				0	
7	0	0	0	0	0	0

$r = 4 \quad i = 2$

$p \backslash q$	1	2	3	4	5	6
1	0					
2	0					
3	0	0				
4	0		0			
5	0	0	0	0		
6	0				0	
7	0	0	0	0	0	0

$r = 5 \qquad i = 0$

	q	1	2	3	4	5	6
p		1					
1		1					
2		0					
3		a	a				
4		2	X	0			
5		b	0	0	b		
6		0	X	X	X	0	
7		a	a	a	a	a	a

$a = (3 + \sqrt{5})/2$
 $b = (5 + \sqrt{5})/2$

$r = 5 \qquad i = 1$

	q	1	2	3	4	5	6
p		1	2	3	4	5	6
1		0					
2		0					
3		0	0				
4		0	X	0			
5		0	0	0	0		
6		0	X	X	X	0	
7		0	0	0	0	0	0

$r = 5 \qquad i = 2$

	q	1	2	3	4	5	6
p		1	2	3	4	5	6
1		0					
2		0					
3		0	0				
4		0	X	0			
5		0	0	0	0		
6		0	X	X	X	0	
7		0	0	0	0	0	0

$r = 5 \qquad i = 3$

	q	1	2	3	4	5	6
p		1	2	3	4	5	6
1		0					
2		0					
3		0	0				
4		0	X	0			
5		0	0	0	0		
6		0	X	X	X	0	
7		0	0	0	0	0	0

参考文献

- [1] E. Pervova and C. Petronio *On colored Turaev-Viro invariants for links in arbitrary 3-manifolds*, math. GT 10 Jun 2008
- [2] T. Taniguchi, *The Turaev-Viro Invariants of All Orientable Closed Seifert Fibered Manifolds*, Tokyo J. of Math., **30**(2007), 497-522
- [3] T.Taniguchi and K.Tsuboi and M.Yamashita, *Systematic singular triangulation of all Seifert manifolds*, Tokyo J. Math., **28**(2005), 539-561
- [4] V.G.Turaev and O.Y.Viro. 「State sum invariants of 3 - manifolds and quantum 6j-symbols」 Topology, **31** (1992) p.865-902
- [5] T.Taniguchi, レンズ空間の *Turaev-Viro-Oceanu* 不変量の計算公式, HAKONE SEMINAR, **23**(2007), 49-66