

HAKONE SEMINAR 23 (2007) 49-66.

レンズ空間の Turaev-Viro-Ocneanu 不変量の計算公式

谷口太聖*

概要

Turaev-Viro-Ocneanu 不変量は、向き付けられた閉 3 次元多様体に対する位相不変量である。本稿では、向き付けられたレンズ空間の Turaev-Viro-Ocneanu 不変量の計算公式を与えた。

第 1 章では、Turaev-Viro-Ocneanu 不変量の定義を紹介する。第 2 章では、DS-diagram から得られる多様体に標準的な向きを定義して、[9] で与えた ϕ, L, R -diagram から構成するレンズ空間の向きについて考える。第 3 章では、[8] で得た Turaev-Viro 不変量の計算公式 (TQFT を用いる方法) と同じ手法によって、向き付けられたレンズ空間の Turaev-Viro-Ocneanu 不変量の計算公式を与える。

1 Turaev-Viro-Ocneanu 不変量

1.1 *-代数の自己準同型のなす有限系

Turaev-Viro-Ocneanu 不変量を定義するために必要な初期データを用意する (詳しくは [2][7] を参照)。

1 を持つ C 上の代数 A であって、次の条件を満たす写像 $*$: $A \rightarrow A$ を備えたものを *-代数と呼ぶ。

1. $(a + b)^* = a^* + b^*$ for $\forall a, b$
2. $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$ for $\forall a \in A, \forall \lambda \in C$
3. $a^{**} = a$ for $\forall a \in A$
4. $(ab)^* = b^* a^*$ for $\forall a, b \in A$
5. $1^* = 1$

$\text{End}(A) := \{ * \text{ を保つ } A \text{ 上の代数自己準同型全体} \}$ とおく。 $\rho, \sigma \in \text{End}(A)$ に対して、次のように定義する。

$$(\rho, \sigma) := \{ T \in A \mid T\rho(x) = \sigma(x)T \text{ for } x \in A \}$$

*E-mail : taniguchi@gshs.keio.ac.jp

第 1 章は、和久井道久先生 (関西大学) の原稿を承諾の許に使わせていただきました。

これを ρ から σ への纏絡作用素の空間と呼ぶ。また、その元を纏絡作用素と呼ぶ。 (ρ, σ) は \mathbb{C} 上のベクトル空間になる。 ρ が $\dim(\rho, \rho) = 1$ を満たすとき、 ρ は既約であると呼ばれる。 ρ が既約ならば、任意の σ に対して、 (ρ, σ) は

$$(T', T) := T^* T' \in (\rho, \rho) \cong \mathbb{C}, \quad T, T' \in (\rho, \sigma)$$

を内積とするヒルベルト空間になる。 $\rho, \sigma \in \text{End}(A)$ に対して、写像の合成 $\rho\sigma := \rho \circ \sigma$ および写像の和 $\rho + \sigma$ は $*$ を保つ A 上の代数自己準同型である。

$\rho \in \text{End}(A)$ に対し、 $R_\rho \in (id, \bar{\rho}\rho)$, $\bar{R}_\rho \in (id, \rho\bar{\rho})$, $d(\rho) > 0$ が存在して次を満たすとき、 $\bar{\rho} \in \text{End}(A)$ を ρ の共役準同型という。

1. $\dim(id, \rho\bar{\rho}) = \dim(id, \bar{\rho}\rho) = 1$
2. $\bar{R}_\rho \rho(R_\rho) = R_\rho^* \bar{\rho}(\bar{R}_\rho) = \frac{1}{d(\rho)}$
3. $R_\rho^* R_\rho = \bar{R}_\rho^* \bar{R}_\rho = 1$

このとき、 $d(\rho)$ を ρ の統計次元と呼ぶ。

定義 1.1 A を $*$ -代数とし、 $\text{End}(A)$ の有限集合 Λ を考える。以下の条件が満たされるとき、 Λ をセクターに対する作用に関して閉じている A の有限系と呼ぶ。

1. $id_A \in \Lambda$
2. 任意の $\rho, \eta \in \Lambda$ に対して、

$$\dim(\rho, \eta) = \begin{cases} 1 & \text{if } \rho = \eta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

3. 任意の $\rho \in \Lambda$ に対して、ある $\eta \in \Lambda$ が存在して、 $\rho = \bar{\eta}$ となる。
4. 任意の $\rho, \eta, \xi \in \Lambda$ に対して、 $(\xi, \rho\eta)$ の正規直交基底 $\{(T_{\rho\eta}^\xi)_i\}_{i=1}^{N_{\rho\eta}^\xi}$ が存在して、

$$\sum_{\xi \in \Lambda} \sum_{i=1}^{N_{\rho\eta}^\xi} (T_{\rho\eta}^\xi)_i (T_{\rho\eta}^\xi)_i^* = 1 \quad \text{かつ} \quad (\rho\eta)(x) = \sum_{\xi \in \Lambda} \sum_{i=1}^{N_{\rho\eta}^\xi} (T_{\rho\eta}^\xi)_i \xi(x) (T_{\rho\eta}^\xi)_i^* \quad \text{for all } x \in A$$

注意 1 $*$ -代数 A の有限系 $\Lambda \subset \text{End}(A)$ に対して、条件 3 を満たす η は一意的である。特に、 $\bar{\bar{\rho}} = \rho$ が成り立つ。

有限系 $\Lambda \subset \text{End}(A)$ の元 $\rho, \eta, \xi \in \Lambda$ に対して

$$\mathcal{H}_{\rho\eta}^\xi := (\xi, \rho\eta)$$

と定め $a, b, c, i, j, k \in \Lambda$ および $A \in \mathcal{H}_{i,c}^k, B \in \mathcal{H}_{a,b}^i, C \in \mathcal{H}_{b,c}^j, D \in \mathcal{H}_{a,j}^k$ に対して、複素数

$$\frac{1}{\sqrt{d(i)d(j)}} A^* B^* a(C) D \tag{1}$$

を図 1 によって表わす。

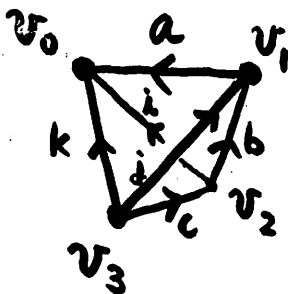


図 1: 式 (1) を表す四面体

1.2 Turaev-Viro-Ocneanu 不変量の定義

M を向きづけられた閉 3 次元多様体とし, その dual を P とする.

P の coloring とは, 2 つの写像

$$\varphi_e : \{P \text{ の face 全体} \} \rightarrow \Lambda$$

$$\varphi_f : \{P \text{ の edge 全体} \} \rightarrow \{(T_{\rho\eta}^\xi)_i \mid \rho, \eta, \xi \in \Lambda, i = 1, \dots, N_{\rho\eta}^\xi\}$$

の組であって, 次の条件 (i)(ii) が満たされるものをいう.

(i) $\varphi_e(\alpha) = \rho, \varphi_e(\beta) = \eta, \varphi_e(\gamma) = \xi$ ならば, $N_{\rho\eta}^\xi \neq 0$

(ii) (i) の状況の下で

$$\varphi_f(P \text{ の edge}) \in \{(T_{\rho\eta}^\xi)_i\}_{i=1}^{N_{\rho\eta}^\xi}$$

P の face α に対して, その向きを逆にしたものを $-\alpha$ と書く. このとき,

$$\varphi_e(-\alpha) = \overline{\varphi_e(\alpha)}$$

と約束する. また, 以後, φ_e と φ_f をともに φ と書き, 両者を記号の上で区別しないことにする.

P の coloring φ が与えられたとき, P の vertex v に対応する dual の四面体 (図 1) に式 (1) を対応させ, 四面体の向きが逆であるものには, 式 (1) の複素共役を対応させる.

このとき,

$$Z^\Lambda(M) := \frac{1}{\lambda} \sum_{\varphi : P \text{ の coloring}} d(\varphi) \prod_{v \in V(G)} W(v, \varphi)$$

とおく. ただし, $\lambda = \sum_{\rho \in \Lambda} d(\rho)^2$ であり,

$$d(\varphi) = \prod_{\alpha : P \text{ の face}} d(\varphi(\alpha))$$

である.

$Z^\Lambda(M)$ は $\mathcal{H}_{\rho\eta}^\epsilon$ の正規直交基底 $B_{\rho\eta}^\epsilon$ の選び方によらない. もし, $*$ -代数 \mathcal{A} および Λ が Longo-Rehren inclusion に由来するような「良い」ものであれば, 式 (1) が, 四面体対称性, Orthogonality Identity, Pentagon Identity を満たす. これが spine (3 角形分割の dual) の基本変形に対応しているので, $Z^\Lambda(M)$ は向きづけられた閉 3 次元多様体 M の複素数に値をもつ位相不変量である. $Z^\Lambda(M)$ を M の Turaev-Viro-Ocneanu 不変量と呼ぶ. [4][10]

1.3 E_6 に由来する Turaev-Viro-Ocneanu 不変量

E_6 -部分因子環に由来する有限系 Λ を以下のように与える. [3][7][11]

1. フュージョン規則代数

$\Lambda_{E_6} := \{id, \alpha, \rho\}$ を \mathbb{C} 上の基底にもつベクトル空間であって, 表 1 を乗積表とする基底つき代数. ただし, $\bar{id} = id$, $\bar{\alpha} = \alpha$, $\bar{\rho} = \rho$ である.

	id	α	ρ
id	id	α	ρ
α	α	id	ρ
ρ	ρ	ρ	$id + \alpha + 2\rho$

表 1: E_6 部分因子環の積

2. 纏絡作用素の空間

\mathcal{O}_4 を S_1, S_2, S_3, S_4 によって生成される Cuntz 環とする. すなわち, 以下の関係式を持つ $*$ -代数 とする:

$$\begin{aligned} S_i^* S_j &= \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4) \\ S_1 S_1^* + S_2 S_2^* + S_3 S_3^* + S_4 S_4^* &= 1. \end{aligned}$$

このとき, 各 $a, b, c \in \{id, \alpha, \rho\}$ に対して纏絡作用素の空間 $\mathcal{H}_{a,b}^c \subset \mathcal{O}_4$ は以下のように与えられる.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{id,a}^a &= \mathbb{C}1, & \mathcal{H}_{a,id}^a &= \mathbb{C}1, & \text{for } a \in \{id, \alpha, \rho\}, \\ \mathcal{H}_{\alpha,\alpha}^{id} &= \mathbb{C}1, & \mathcal{H}_{\alpha,\rho}^\rho &= \mathbb{C}1, & \mathcal{H}_{\rho,\alpha}^\rho &= \mathbb{C}U, \\ \mathcal{H}_{\rho,\rho}^{id} &= \mathbb{C}S_1, & \mathcal{H}_{\rho,\rho}^\alpha &= \mathbb{C}S_2, & \mathcal{H}_{\rho,\rho}^\rho &= \mathbb{C}S_3 \oplus \mathbb{C}S_4, \end{aligned}$$

ただし,

$$U := S_1 S_1^* - S_2 S_2^* + S_3 S_3^* + S_4 S_4^*$$

である. 上の表にない $a, b, c \in \{id, \alpha, \rho\}$ の組については, $\mathcal{H}_{a,b}^c = \{0\}$ である.

3. 統計次元は次の通り.

$$d(id) = d(\alpha) = 1, \quad d(\rho) = d = 1 + \sqrt{3}$$

4. 6j-symbol([3])

各 $a, b, c, i, j, k \in \{id, \alpha, \rho\}$ と $A \in \mathcal{H}_{i,c}^k$, $B \in \mathcal{H}_{a,b}^i$, $C \in \mathcal{H}_{b,c}^j$, $D \in \mathcal{H}_{a,j}^k$ に対して, 6j-symbol は図 1 で与えられる. ここで,

$$\alpha(S_1) = S_2, \alpha(S_2) = S_1, \alpha(S_3) = S_3, \alpha(S_4) = -S_4$$

$$\begin{aligned} \rho(S_1) &= \frac{S_1 + S_2}{d} + \frac{e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}} S_3^2 + e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}} S_4^2}{\sqrt{d}} \\ \rho(S_2) &= \left[\frac{S_1 - S_2}{d} + \frac{e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}} S_4 S_3 + e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}} S_3 S_4}{\sqrt{d}} \right] U \\ \rho(S_3) &= c_1 \left[\frac{S_1 + S_2}{\sqrt{2}} S_3^* + \frac{S_1 - S_2}{\sqrt{2}} S_4^* \right] \\ &\quad + c_2 [S_3(S_1 S_1^* + S_2 S_2^*) + S_4(S_1 S_1^* - S_2 S_2^*)] \\ &\quad + c_3 [S_3 S_3 S_3^* + S_4 S_3 S_4^*] + c_4 [S_3 S_4 S_4^* + S_4 S_4 S_3^*] \\ \rho(S_4) &= c_1 \left[\frac{S_1 + S_2}{\sqrt{2}} S_3^* - \frac{S_1 - S_2}{\sqrt{2}} S_4^* \right] \\ &\quad + c_2 \sqrt{-1} [S_3(S_1 S_1^* + S_2 S_2^*) - S_4(S_1 S_1^* - S_2 S_2^*)] \\ &\quad + c_4 \sqrt{-1} [S_3 S_3 S_3^* - S_4 S_3 S_4^*] + c_3 \sqrt{-1} [S_3 S_4 S_4^* - S_4 S_4 S_3^*] \end{aligned}$$

ただし,

$$d = 1 + \sqrt{3}, \quad c_1 = \frac{e^{-\frac{5\pi\sqrt{-1}}{6}}}{\sqrt{d}}, \quad c_2 = \frac{e^{\frac{7\pi\sqrt{-1}}{12}}}{\sqrt{2}}, \quad c_3 = -\frac{1}{d}, \quad c_4 = \frac{e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4}}}{\sqrt{2}}$$

である. また,

$$\rho(U) = S_1 S_2^* + S_2 S_1^* + \sqrt{-1} (S_3 U S_4^* - S_4 U S_3^*)$$

となる.

注意 2

$$c_1 = \frac{-\sqrt{3} - i}{2\sqrt{d}}, \quad c_2 = \frac{1 - \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})i}{4}, \quad c_3 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}, \quad c_4 = \frac{1 - i}{2},$$

$$c_2^2 = \frac{-\sqrt{3} - i}{4}, \quad c_3^2 = \frac{1 - i}{4}, \quad \frac{1 + i}{2} c_2 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{4}, \quad \frac{c_2}{\sqrt{d}} = \frac{-2 + \sqrt{3} + i}{4} \sqrt{d}$$

$$\alpha(U) = -U, \quad U^* = U$$

2 DS-diagram Δ から得られる多様体 M_Δ の標準的な向き

E-cycle 付きの DS-diagram $\Delta = (G, f, P; e)$ から得られる向き付け可能な多様体 M_Δ に対して, M_Δ の各四面体に対する flow から誘導される向き (§2.1) を用いて多様体 M_Δ の標準的な向き (§2.2) を定義する.

2.1 flow から誘導される多様体 M_Δ の各四面体の向き

DS-diagram $\Delta = (G, f, P; e)$ が与えられたとき, E-cycle 上の頂点について, 接する辺のラベルが第2図, 第3図のタイプであるとき, それぞれ code が l または r であるといい ([1]), 頂点 v の code が l または r であることを v^l または v^r と書く. P_Δ の dual cell complex P_Δ^*

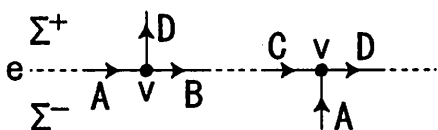


図 2: 頂点 v の code が l

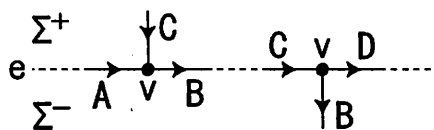


図 3: 頂点 v の code が r

において, P_Δ の頂点 v の dual である四面体 T_v の code が l または r とは, v の code が l または r であることと定め, T_v^l または T_v^r と書く.

四面体分割 P_Δ^* の各四面体 T_v の向きを次のように決める. f によって境界が同一視される 3-ball $B^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ に flow $\partial/\partial z$ を定める. これによって, P_Δ に branch 構造が定まり, P_Δ の頂点 v の近傍における flow と P_Δ の面との交わりは第4図, 第5図のようになる. ここで, P_Δ^* の各四面体 T_v の辺の向きを P_Δ の面と交わる flow の向き

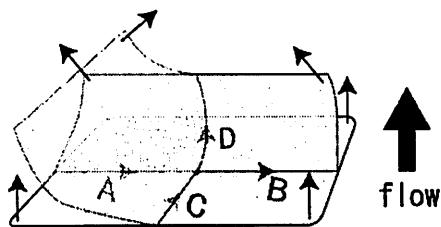


図 4: 頂点 v の code が l の場合

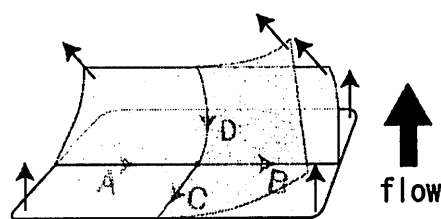
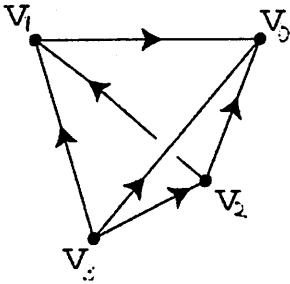
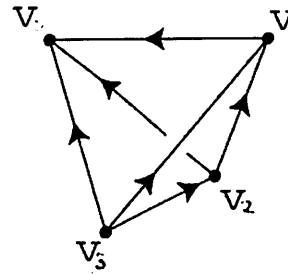


図 5: 頂点 v の code が r の場合

によって決める. これは第6図, 第7図のようになる. このように決めた辺の向きによって, T_v の頂点に高さ $v_0 < v_1 < v_2 < v_3$ が定まり, これを flow から誘導される M_Δ の各四面体の向きと呼び, $O_f(T_v)$ と表す.

命題 2.1 $O_f(T_v^r) \neq O_f(T_v^l)$

図 6: 頂点 v の code が l の場合図 7: 頂点 v の code が r の場合

Proof. 第 6 図, 第 7 図より, 2 つの四面体の向きは, v_2 と v_3 の頂点の高さを入れ替えることによって一致する. よって 2 つの四面体の向きは逆である. ■

2.2 多様体 M_Δ の標準的な向き

DS-diagram $\Delta = (G, f, P; e)$ から得られる 3 次元多様体 M_Δ が向き付け可能であるとき, その向きは 2 つ考えられる. これらを $O^+(M_\Delta)$, $O^-(M_\Delta)$ と書く. これらの向きから, P_Δ^* の各四面体に向きが誘導される. これによって決まる四面体 T_v の向きをそれぞれ $O^+(T_v)$, $O^-(T_v)$ と書く.

M_Δ が向き付け可能であることを仮定しているので, 補題 2.1 より, M_Δ の向きから誘導される各四面体の向きと, flow から誘導される四面体の向きが一致するのは, code が r または l の四面体のどちらか一方である. よって, 次が成立する.

命題 2.2 (i)(ii) のどちらか一方のみが成立する.

- (i) $O^+(T_v^r) = O_f(T_v^r)$ かつ $O^+(T_v^l) \neq O_f(T_v^l)$
- (ii) $O^+(T_v^r) \neq O_f(T_v^r)$ かつ $O^+(T_v^l) = O_f(T_v^l)$

定義 2.3 命題 2.2 において (i) となるような M_Δ の向きを, M_Δ に定まる標準的な向きとして $O_{DS}(M_\Delta)$ と書く.

注意 3 [9] に定義された ϕ, L, R -diagram から得られる solid torus $T_{w(L,R)}$ に標準的な向きを定める. このとき, ϕ, L, R -diagram の頂点の type はそれぞれ l, r, l であるので, それぞれの diagram から得られる spine の頂点に対応する四面体の向きは, $T_{w(L,R)}$ の標準的な向きと, それぞれ, 逆, 一致, 逆である.

3 レンズ空間 $L(p, q)$ の Turaev-Viro-Ocneanu 不変量

[8]において、TQFTを用いたレンズ空間の Turaev-Viro 不変量の計算公式を得た。これと同様の手法を用いて、レンズ空間の Turaev-Viro-Ocneanu 不変量の計算公式を与える。

3.1 DS-spine P_ϕ, P_L, P_R から得られる線形写像

[9]で定義された3つの special DS-spine P_ϕ, P_L, P_R 境界の連結成分は、向き付けられた theta-curve θ (図8) となっている。[8]において、レンズ空間の Turaev-Viro 不変量の計算

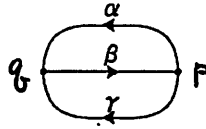


図 8: theta curve θ

公式を与えたのと同様な手法を用いるので、theta-curve θ の coloring を考える。

Turaev-Viro-Ocneanu 不変量は、四面体分割された多様体の各四面体の各辺に color を決め、さらに、四面体の面に、その面の境界となる3本の辺の color から決まる color が与えられる (§1.1)。dual cell-complex では、spine の面に color を決め、さらに、その辺に接する3枚の面の color から決まる color が与えられる。よって、spine の境界である theta-curve θ の3本の辺 α, β, γ の color a, b, c に対して、頂点 p, q にも a, b, c から決まる color が与えられる。

§1.3 で与えた $\Lambda = E_6$ の場合に成立する colorig (a, b, c, P, Q) を全て書き上げると、

$$\begin{aligned}
 (a, b, c, P, Q) = & (id, id, id, 1, 1), (id, \alpha, \alpha, 1, 1), (\alpha, id, \alpha, 1, 1) \\
 & (\alpha, \alpha, id, 1, 1), (id, \rho, \rho, 1, 1), (\rho, \rho, id, 1, 1) \\
 & (\alpha, \rho, \rho, 1, U), (\rho, \rho, \alpha, U, 1), (\rho, id, \rho, S_1, S_1) \\
 & (\rho, \alpha, \rho, S_2, S_2), (\rho, \rho, \rho, S_3, S_3), (\rho, \rho, \rho, S_3, S_4) \\
 & (\rho, \rho, \rho, S_4, S_3), (\rho, \rho, \rho, S_4, S_4)
 \end{aligned}$$

であり、これらを

$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \\ \tau_6 \\ \tau_7 \\ \tau_8 \\ \tau_9 \\ \tau_{10} \\ \tau_{11} \\ \tau_{12} \\ \tau_{13} \\ \tau_{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (id, id, id, 1, 1) \\ (id, \alpha, \alpha, 1, 1) \\ (\alpha, id, \alpha, 1, 1) \\ (\alpha, \alpha, id, 1, 1) \\ (id, \rho, \rho, 1, 1) \\ (\rho, \rho, id, 1, 1) \\ (\alpha, \rho, \rho, 1, U) \\ (\rho, \rho, \alpha, U, 1) \\ (\rho, id, \rho, S_1, S_1) \\ (\rho, \alpha, \rho, S_2, S_2) \\ (\rho, \rho, \rho, S_3, S_3) \\ (\rho, \rho, \rho, S_3, S_4) \\ (\rho, \rho, \rho, S_4, S_3) \\ (\rho, \rho, \rho, S_4, S_4) \end{pmatrix}$$

とおき, τ_i ($i = 1, 2, \dots, 14$) で張られる \mathbb{C} -ベクトル空間 $V^{E_6}(\theta)$ を考える。

定義 3.1 2つの *theta-curve* θ, θ' を境界にもつ *special DS-spine* P に対して線形写像 $Z_P^{E_6} : V^{E_6}(\theta') \rightarrow V^{E_6}(\theta)$ を次の式で定義する。

$$Z_P^{E_6}(\tau_i) := \sum_{\tau_j} Z^{E_6}(P, \tau_i(\theta) \sqcup \tau_j(\theta')) \tau_j,$$

ここで, $Z^{E_6}(P, \tau(\partial P))$ は次のように定める。 ∂P の *coloring* τ に対して

$$Z^{E_6}(P, \tau(\partial P)) = \sum_{\substack{\varphi: \text{coloring of } P \\ \text{s.t. } \varphi|_{\partial P} = \tau}} \hat{d}(\varphi) \prod_{v \in V(P-\partial P)} W(v, \varphi)$$

ここで, $W(v, \varphi)$ は p.2 の式 (1) で定義した複素数であり,

$$\hat{d}(\varphi) = \prod_{\substack{\beta: P \text{ の face} \\ \partial P \text{ と接している}}} (d(\varphi(\beta)))^{-1/2} \prod_{\alpha: P \text{ の face}} d(\varphi(\alpha))$$

とする。

この定義に従って 3 つの DS-spine P_ϕ, P_L, P_R から得られる 3 つの線形写像

$$\begin{aligned} Z_\phi^{E_6} &: \mathbb{C} \rightarrow V^{E_6}(\theta) \\ Z_L^{E_6} &: V^{E_6}(\theta) \rightarrow V^{E_6}(\theta) \\ Z_R^{E_6} &: V^{E_6}(\theta) \rightarrow V^{E_6}(\theta) \end{aligned}$$

の表現行列を求める。

3.1.1 線形写像 $Z_\phi^{E_6}$ の表現行列

P_ϕ は, empty graph と θ が境界であるとみなす. よって, 線形写像 $Z_\phi^{E_6} : \mathbb{C} \rightarrow V^{E_6}(\theta)$ の表現行列はベクトルになる.

命題 3.2 *special DS-spine* P_ϕ に対して線形写像 $Z_P^{E_6} : V^{E_6}(\phi) \rightarrow V^{E_6}(\theta)$ の表現行列 $v_\phi^{E_6}$ の第 i 成分 ϕ_i は, 第 i 成分の coloring を $\tau_i = (a, b, c, P, Q)$ とすると,

$$\phi_i = \begin{cases} \sum_k \frac{\sqrt{d(a)d(k)}}{d(b)} A^* Q^* b(P) A & (b = 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (b \neq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

証明. ϕ -diagram (図 9) においては, edge β, γ は同じ面に接している. よって, これら辺には同じ color が割り当てられなければならない. よって, $b \neq c$ のときは coloring が成立しないので値は 0 になる.

$b = c$ のときは, ϕ -diagram の頂点に対応する四面体は図 11 であり, 四面体の面 A には $\mathcal{H}_{b,b}^k$, 面 P には $\mathcal{H}_{c,b}^b$, 面 Q には $\mathcal{H}_{b,c}^b$ の color が割り当てられる. 定義に従って計算すると

$$\begin{aligned} \phi_i &= \sum_k \left(\frac{1}{\sqrt{d(a)}\sqrt{d(b)}\sqrt{d(b)}} d(a)d(b)d(k) \frac{1}{\sqrt{d(b)}\sqrt{d(b)}} A^* Q^* b(P) A \right) \\ &= \sum_k \frac{\sqrt{d(a)d(k)}}{d(b)} A^* Q^* b(P) A \end{aligned}$$

■

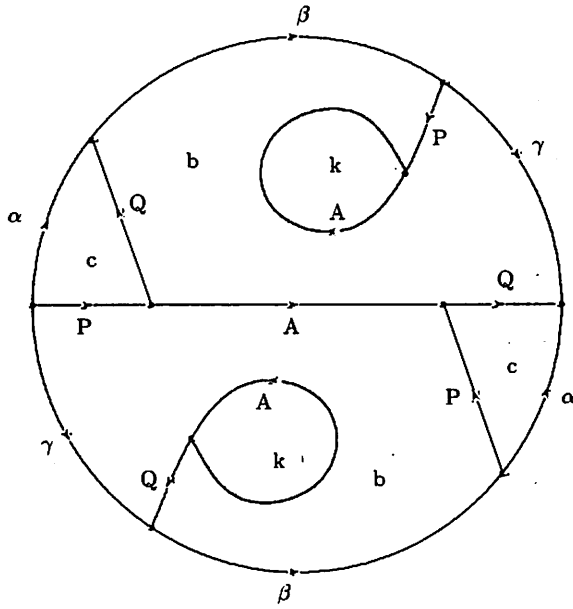


図 9: ϕ -diagram

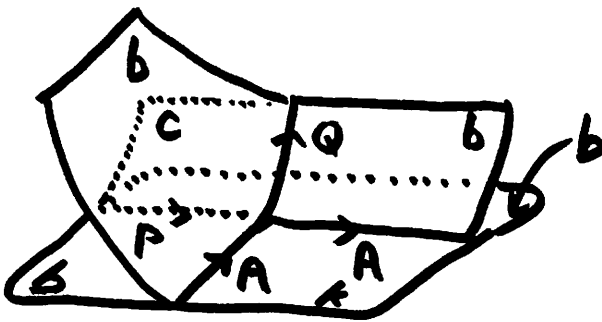


図 10: spine

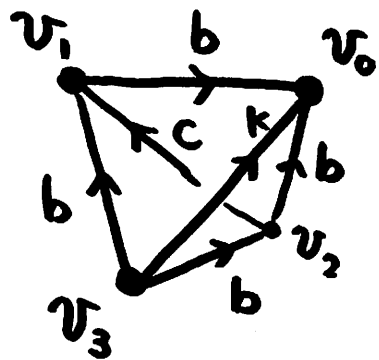


図 11: 四面体の向き

実際に表現行列 $v_\phi^{E_6}$ を求めると次のようになる。

$$v_\phi^{E_6} = (1, 1, 0, 0, 2/d + 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

3.1.2 線形写像 $Z_L^{E_6}, Z_R^{E_6}$ の表現行列

L -diagram, R -diagram はそれぞれ, 図 12, 図 15 であり, 得られる special DS-spine の境界は 2 つの theta-curve θ と θ' であり, 線形写像 $Z_X^{E_6} : V^{E_6}(\theta') \rightarrow V^{E_6}(\theta)$ の表現行列を求める。

命題 3.3 $\tau_i = (a, b, c, P, Q)$, $\tau_j = (k, b', c', A, B)$ をそれぞれ θ, θ' の coloring とする。このとき, 線形写像 $Z_L^{E_6} : V^{E_6}(\theta') \rightarrow V^{E_6}(\theta)$ の表現行列 M_L の (j, i) 成分 $L_{j,i}$ は,

$$L_{j,i} = \begin{cases} \frac{\sqrt{d(k)}\sqrt{d(b)}}{d(a)} P^* B^* c(A) Q & (b' = a \text{ かつ } c' = c \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外の場合}) \end{cases}$$

証明. L -diagram の頂点に対応する四面体は図 14 (p.13) である。四面体の面 A には $\mathcal{H}_{k,c}^a$, 面 B には $\mathcal{H}_{c,k}^a$, 面 P には $\mathcal{H}_{a,c}^b$, 面 Q には $\mathcal{H}_{c,a}^b$ の元に対応する。定義に従って計算すると

$$\begin{aligned} L_{j,i} &= d(k)d(a)d(b)d(c) \frac{1}{\sqrt{d(k)}\sqrt{d(a)}\sqrt{d(c)}\sqrt{d(a)}\sqrt{d(b)}\sqrt{d(c)}} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{\sqrt{d(a)}\sqrt{d(a)}} P^* B^* c(A) Q \right) \\ &= \frac{\sqrt{d(k)}\sqrt{d(b)}}{d(a)} P^* B^* c(A) Q \end{aligned}$$

命題 3.4 $\tau_i = (a, b, c, P, Q)$, $\tau_j = (a', b', k, B, A)$ をそれぞれ θ, θ' の coloring とする。このとき, 線形写像 $Z_R^{E_6} : V^{E_6}(\theta') \rightarrow V^{E_6}(\theta)$ の表現行列 M_R の (j, i) 成分 $R_{j,i}$ は,

$$R_{j,i} = \begin{cases} \frac{\sqrt{d(k)}\sqrt{d(b)}}{d(c)} Q^* B^* a(A) P & (a' = a \text{ かつ } b' = c \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外の場合}) \end{cases}$$

証明. 命題 3.3 と同様に証明できる。

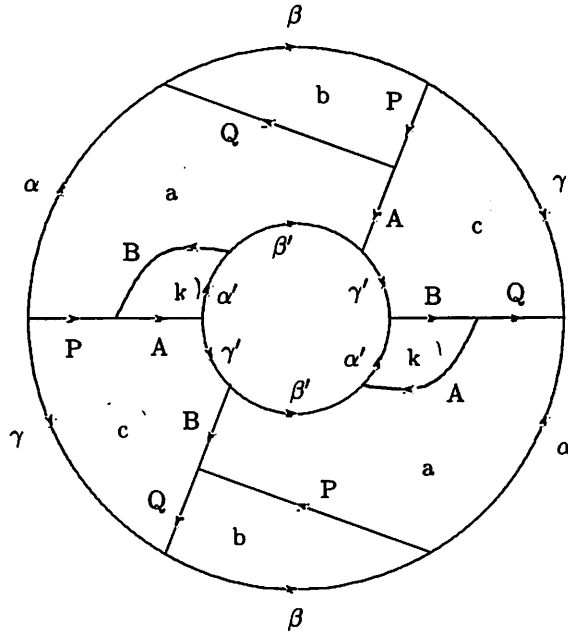


図 12: L-diagram

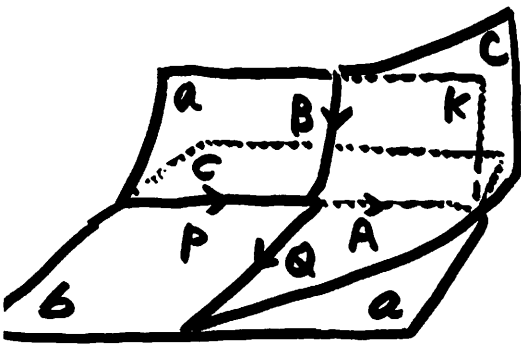


図 13: spine

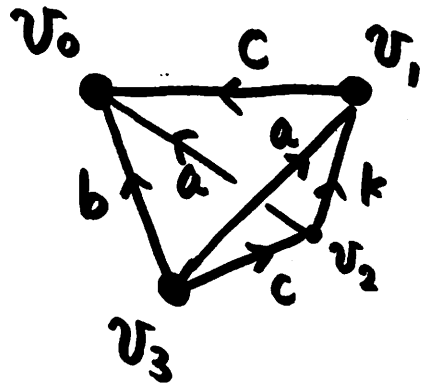


図 14: 四面体の向き

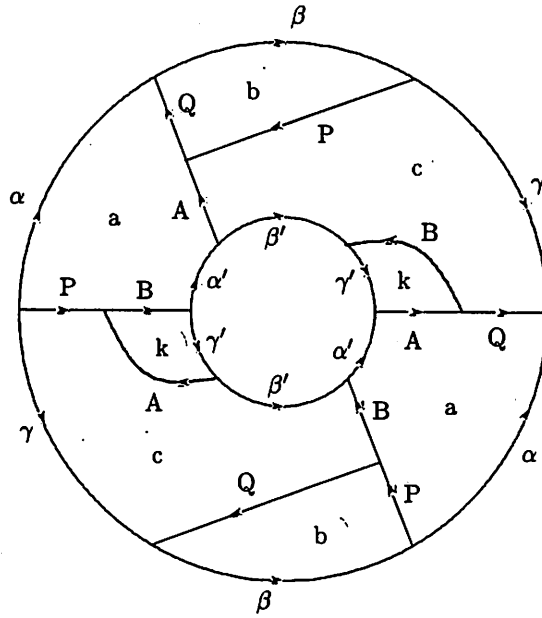


図 15: R-diagram

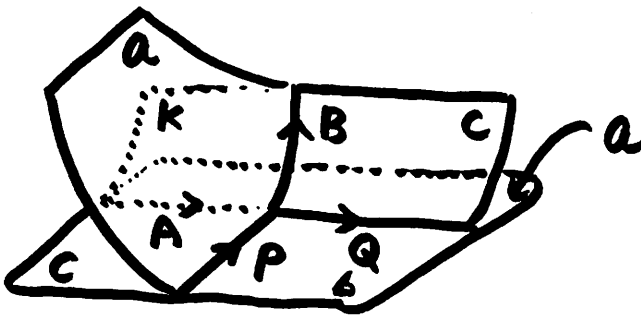


図 16: spine

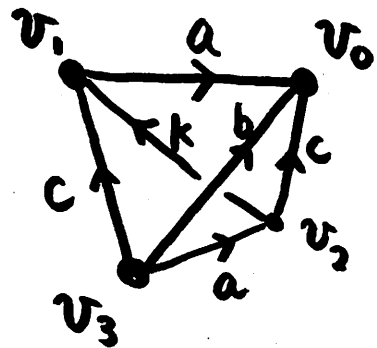


図 17: 四面体の向き

3.2 計算公式

定理 3.5 互いに素な自然数 p と q (ただし, $0 < q < p$ とする) に対して, レンズ空間 $L(p, q)$ の Turaev-Viro-Oceanu 不変量 (作用素環は E_6 とする) は 2 つのベクトル $v_{p,q}^{E_6} = (v_i)_{i=1}^n$ と $u^{E_6} = (u_i)_{i=1}^n$, の内積, つまり, $TV^{E_6}(L(p, q)) = \langle v_{p,q}^{E_6}, u^{E_6} \rangle := \sum_{i=1}^n v_i \bar{u}_i$, で得られる. ここで, \bar{u}_i は, u_i の複素共役を表し, 2 つのベクトル u と v は次のように定義される.

$$\begin{aligned} u^{E_6} &:= (M_L)^{-1} \cdot \bar{v}_\phi, \\ v_{p,q}^{E_6} &:= \begin{cases} v_\phi \cdot (M_L)^{a_1} \cdot (\overline{M_R})^{a_2} \cdot (M_L)^{a_3} \cdot (\overline{M_R})^{a_4} \cdots \cdots (M_L)^{a_n} & (n \text{ is odd}), \\ v_\phi \cdot (M_L)^{a_1} \cdot (\overline{M_R})^{a_2} \cdot (M_L)^{a_3} \cdot (\overline{M_R})^{a_4} \cdots \cdots (\overline{M_R})^{a_n} & (n \text{ is even}), \end{cases} \end{aligned}$$

ここで, \bar{v}_ϕ , $\overline{M_R}$ は, v_ϕ , M_R の成分を全て複素共役に置き換えたものであり, 自然数 $\{a_i\}$ は連分数展開 $q/p = [a_1, a_2, \dots, a_n, 1]$ で得られたものである.

$$[k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, k_n] := \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{k_n}}}}$$

証明. 内積で不変量を得られることは, 線形写像 $Z_\phi^{E_6}$, $Z_L^{E_6}$, $Z_R^{E_6}$ が TQFT の公理を満たすことが示せるので, [9] で与えた Turaev-Viro 不変量の公式と同じように証明できる.

多様体の向きについては, §2.2 で調べたように, [9] の方法で構成される solid torus の標準的な向きと flow から誘導される四面体の向きの関係は, ϕ, R -diagram に対応する四面体では逆, L -diagram に対応する四面体では一致する. よって, word $w(L, R) = X_1 X_2 X_3 \cdots X_n$ に対して, solid torus $T_{w(L,R)}$ から得られる線形写像 $Z_{T_{w(L,R)}}^{E_6} : \mathbb{C} \rightarrow V^{E_6}(\theta)$ の表現行列は

$$N_i = \begin{cases} M_{X_i} & (X_i = L \text{ のとき}) \\ \overline{M_{X_i}} & (X_i = \phi, R \text{ のとき}) \end{cases}$$

として, $N_{X_1} N_{X_2} N_{X_3} \cdots N_{X_n}$ で与えられる.

また, [9] の方法で構成されるレンズ空間は, 2 つの向き付けられた solid torus の境界を, theta-curve θ の 3 本の辺を α, β, γ 同一視する同相写像で貼り合わせる. このとき, 2 つの solid torus に入れた標準的な向きのどちらか一方を逆にして貼り合わせると, 得られるレンズ空間に同調した向きが定まる. よって, 公式における内積では, 一方のベクトル u^{E_6} の成分が複素共役になる. ■

レンズ空間 $L(p, q)$ の Turaev-Viro-Oceanu 不変量は [7] ですでに計算されているが, 定理 3.5 とは異なる手法である.

最後に, レンズ空間 $L(p, q)$ の Turaev-Viro-Oceanu 不変量を示す.

$$\begin{aligned}
S^3 &: \frac{1}{6+2\sqrt{3}} \\
L(2,1) &: \frac{1}{2} \\
L(3,1) &: \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i \\
L(3,2) &: \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i \\
L(4,1) &: \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}i \\
L(4,3) &: \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}i \\
L(5,1), L(5,2), L(5,3), L(5,4) &: \frac{1}{12}(3 + \sqrt{3}) \\
L(6,1), L(6,5) &: \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

参考文献

- [1] M. Endo and I. Ishii, *A new complexity for 3-manifolds*, Japanese J. Math. **31** (2005), 131-156
- [2] D.E.Evans and Y.Kawahigashi. 「Quantum symmetries on operator algebras」 Oxford University Press. (1998)
- [3] M.Izumi. 「Subalgebras of Infinite C^* -Algebras with Finite Watatani Indices I:Cuntz Algebras」 Commun. Math. Phys. **155** (1993) p.157-182
- [4] A.Ocneanu 「Chirality for operator algebras, in Subfactors」 (Proc. of Taniguchi symposium in 1993), ed. by H. Araki, et al., World Scientific, (1994) p.39-63.
- [5] K.Suzuki. 「 E_6 Turaev-Viro-Ocneanu invariant」 doctor thesis, University of Tokyo. (1999)
- [6] K.Suzuki, M.Wakui. 「On Turaev-Viro-Ocneanu invariant of 3-manifolds derived from the E_6 -subfactor」 Kyushu J. Math. **56** (2002) p.59-81
- [7] N. Sato, M. Wakui 「Computations of Turaev-Viro-Ocneanu invariants of 3-manifolds from subfactors」 to appear in J. Knot Theory and its Ramif.
- [8] T. Taniguchi, *Turaev-Viro invariant of Seifert manifolds*, Tokyo J. Math. に掲載予定

- [9] T.Taniguchi and K.Tsuboi and M.Yamashita, *Systematic singular triangulation of all Seifert manifolds*, Tokyo J. Math., **28**(2005), 539-561
- [10] V.G.Turaev and O.Y.Viro. 「State sum invariants of 3-manifolds and quantum $6j$ -symbols」 Topology. **31** (1992) p.865-902
- [11] 和久井道久 「コクセターグラフ E_6 の量子 $6j$ 記号から作られる 3次元多様体の Turaev-Viro-Ocneanu 不変量について」 数理解析研究所講究録 **1053** (1998) p.6-29