

HAKONE SEMINAR 22 (2006) 19-25.

DS-diagram から得られる多様体の向きについて

谷口太聖

平成 19 年 1 月 11 日

1 はじめに

[6]において, 3種類のコンパクト可付向多様体

$$\begin{aligned} V_{p,q} &: (p,q)\text{-タイプファイバードソリッドトラス} \\ J &:= (T^2 - \text{Int}(D^2)) \times S^1 \\ W(3) &:= (S^2 - \coprod_{i=1}^3 \text{Int}(D_i^2)) \times S^1 \end{aligned}$$

を貼り合わせることにより, 任意の可付向閉ザイフェルト多様体とその special spine を得る方法を与えた.

本稿では, 3種類のコンパクト可付向多様体 $V_{p,q}$, J , $W(3)$ に向きを入れ, これらを貼り合わせることにより向き付けられた閉ザイフェルト多様体を構成する方法を与える.

第2章で, DS-diagram [3]によって得られる多様体の各四面体に, flow から定まる向きを定義する. 第3章で, DS-diagram によって得られる多様体に標準的な向きを定義する. 第4章で, 向き付けられた閉ザイフェルト多様体 $DS(F_g; (p_1, q_1), \dots, (p_n, q_n))$ [6] の構成方法を与える.

本稿で得た結果と [1] で与えられた位相的量子場理論を用いて, 向き付けられた閉ザイフェルト多様体のトラエフ-ピロ-オクニアン不変量の計算公式を得ることができる.

2 多様体 M_Δ の向きについて

この章では, E-cycle 付きの DS-diagram $\Delta = (G, f, P; e)$ から得られる可付向多様体 M_Δ に対して, 2つの向きを定義する. 1つ目は, M_Δ の各四面体に対する flow から誘導される向きであり, もう1つは, 多様体 M_Δ の標準的な向きである.

2.1 多様体 M_Δ の各四面体に対する flow から誘導されるの向き

DS-diagram $\Delta = (G, f, P; e)$ が与えられたとき, E-cycle 上の頂点について, 接する辺のラベルが第1図, 第2図のタイプであるとき, それぞれ code が l または r であるといい

([2]), 頂点 v の code が l または r であることを v^l または v^r と書く. P_Δ の dual cell complex

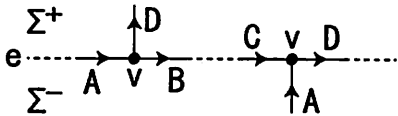


図 1: 頂点 v の code が l

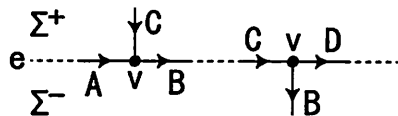


図 2: 頂点 v の code が r

P_Δ^* において, P_Δ の頂点 v の dual である四面体 T_v の code が l または r とは, v の code が l または r であることと定め, T_v^l または T_v^r と書く.

四面体分割 P_Δ^* の各四面体 T_v の向きを次のように決める. f によって境界が同一視される 3-ball $B^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ に flow $\partial/\partial z$ を定める. これによって, P_Δ に branch 構造が定まり, flow と P_Δ の頂点 v の近傍における P_Δ の面との交わりは第 3 図, 第 4 図のようになる. ここで, P_Δ^* の各四面体 T_v の辺の向きを P_Δ の面と交わる flow

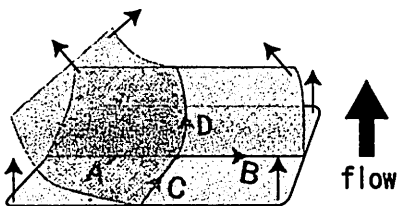


図 3: 頂点 v の code が l の場合

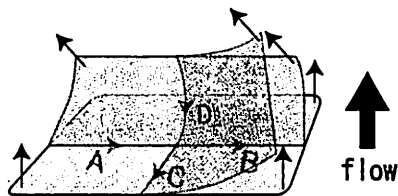


図 4: 頂点 v の code が r の場合

の向きによって決める. これは第 5 図, 第 6 図のようになる. このように決めた辺の向きに

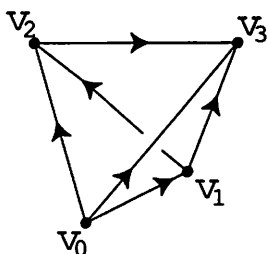


図 5: 頂点 v の code が l の場合

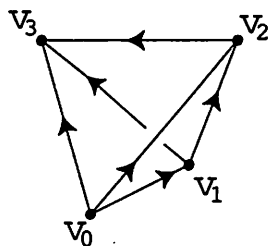


図 6: 頂点 v の code が r の場合

よって, T_v の頂点に高さ $v_0 < v_1 < v_2 < v_3$ が定まり, これを flow から誘導される M_Δ の各四面体の向きと呼び, $O_f(T_v)$ と表す.

補題 2.1 $O_f(T_v^l) \neq O_f(T_v^r)$

Proof. 第5図, 第6図より, 2つの四面体の向きは, v_2 と v_3 の頂点の高さを入れ替えることによって一致する. よって2つの四面体の向きは逆である. ■

2.2 多様体 M_Δ の標準的な向き

DS-diagram $\Delta = (G, f, P; e)$ から得られる3次元多様体 M_Δ が向き付け可能であるとき, その向きは2つ考えられる. これらを $O^+(M_\Delta)$, $O^-(M_\Delta)$ と書く. これらの向きから誘導される P_Δ^* の四面体 T_v の向きをそれぞれ $O^+(T_v)$, $O^-(T_v)$ と書く.

M_Δ が向き付け可能であることを仮定しているので, 補題2.1より, M_Δ の向きから誘導される各四面体の向きと, flowから誘導される四面体の向きが一致するのは, codeが r または l の四面体のどちらか一方である. よって, 次が成立する.

補題 2.2 (i)(ii)のどちらか一方のみが成立する.

$$(i) \quad O^+(T_v^r) = O_f(T_v^r) \text{ かつ } O^+(T_v^l) \neq O_f(T_v^l)$$

$$(ii) \quad O^+(T_v^r) \neq O_f(T_v^r) \text{ かつ } O^+(T_v^l) = O_f(T_v^l)$$

定義 2.3 補題2.2において (i) となるような M_Δ の向きを, M_Δ に定まる標準的な向きと定義して $O_{DS}(M_\Delta)$ と書く.

3 向き付けられたザイフェルト多様体 $DS(F_g; (p_1, q_1), \dots, (p_n, q_n))$ の構成方法

[6] で与えられた方法によると, 3つのタイプの多様体 $V_{p,q}$, J , $W(3)$ を適当に貼り合わせることによって任意のザイフェルト多様体を得られる. この章では, 3つのタイプの多様体 $V_{p,q}$, J , $W(3)$ に予め向きを入れておき, これらを貼り合わせて, 向きの入ったザイフェルト多様体を構成する方法を与える.

3.1 compatible な貼り合わせ写像

第7図, 第8図のタイプの境界をもつ2つのDS-diagramを考える. Δ_1 のcircle $\alpha_1\beta_1\gamma_1\overline{\alpha_1\beta_1\gamma_1}$ から Δ_2 のcircle $\alpha_2\beta_2\gamma_2\overline{\alpha_2\beta_2\gamma_2}$ への写像 φ を, α_1 と α_2 , β_1 と β_2 , γ_1 と γ_2 , $\overline{\alpha_1}$ と $\overline{\alpha_2}$, $\overline{\beta_1}$ と $\overline{\beta_2}$, $\overline{\gamma_1}$ と $\overline{\gamma_2}$ を同一視する写像と定義する. これを, DS-diagram Δ_1 と Δ_2 の貼り合わせ写像と呼ぶ. このとき, 2つのDS-diagram Δ_1 と Δ_2 を φ で貼り合わせて, circle $\varphi(\alpha_1\beta_1\gamma_1\overline{\alpha_1\beta_1\gamma_1}) = \alpha_2\beta_2\gamma_2\overline{\alpha_2\beta_2\gamma_2}$ と頂点 u と v を除いたDS-diagramを $\Delta_1 \cup_\varphi \Delta_2$ と表す. また, 2つの多様体 $M_1 := B^3/f_{\Delta_1}$ と $M_2 := B^3/f_{\Delta_2}$ を, φ から誘導される貼り合わせ写像 φ ([6] §4.1) で貼り合わせた多様体を $M_1 \cup_\varphi M_2$ と表す.

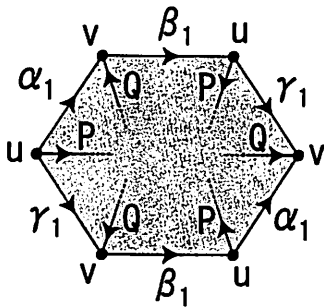


図 7: DS-diagram Δ_1

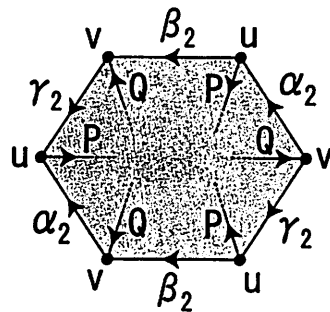


図 8: DS-diagram Δ_2

補題 3.1 $DS\text{-diagram } \Delta_1 \cup_{\bar{\varphi}} \Delta_2$ から得られる多様体と $M_1 \cup_{\varphi} M_2$ は一致する。

証明. $DS\text{-diagram } \Delta := \Delta_1 \cup_{\bar{\varphi}} \Delta_2$ で同一視する B^3 に proper に埋め込まれた 2-disc D^2 で $\partial D^2 = \bar{\varphi}(\alpha\beta\gamma\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma})$ となるものが存在する. $M_{\Delta} := B^3/f_{\Delta}$ を $T^2 = D^2/f_{\Delta}$ で切り開くと M_{Δ_1} と M_{Δ_2} になる. よって, M_{Δ} と M は一致する. ■

3.2 標準的な向きの定まったソリッドトーラスの構成方法

$X_i = L, R$ とする. このとき, word $w = X_1 X_2 X_3 \cdots X_n$ に対するソリッドトーラス V_w とは, $DS\text{-diagram } \Delta_{\phi}, \Delta_{X_1}, \Delta_{X_2}, \dots, \Delta_{X_n}$ を貼り合わせ写像 $\varphi^{(j)}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) で貼り合わせた $DS\text{-diagram } \Delta_w$ から得られる多様体である [6]. 補題 3.1 より, 写像 $\bar{\varphi}$ から誘導される貼り合わせ写像 $\varphi^{(j)}$ によって $V_w = V_{\phi} \cup_{\varphi^{(1)}} U_{X_1} \cup_{\varphi^{(2)}} U_{X_2} \cup_{\varphi^{(3)}} \cdots \cup_{\varphi^{(n)}} U_{X_n}$ である. ここで, $V_{\phi} \cong D^2 \times S^1$, $U_L \cong S^1 \times S^1 \times [0, 1]$, $U_R \cong S^1 \times S^1 \times [0, 1]$ は $\phi, L, R\text{-diagram}$ [6] から得られる多様体である.

命題 3.2 word $w = X_1 X_2 \cdots X_n$ に対して, 標準的な向きの入ったソリッドトーラス V_w は, 次の手順で得られる.

Step 1 V_{ϕ}, U_L, U_R の四面体に $flow$ から誘導される向きを入れる.

Step 2 V_{ϕ}, U_R の四面体に入っている向きを逆にする.

Step 3 貼り合わせ写像 $\varphi^{(j)}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) で貼り合わせる.

証明. $\phi, L, R\text{-diagram}$ から得られる spine P_{ϕ}, P_L, P_R には, それぞれ 1 つずつ頂点があり, P_{ϕ}, P_R の頂点の code は l であり, P_L の頂点の code は r である.

今, ソリッドトーラス V_w に標準的な向き $O_{DS}(V_w)$ を入れ, これから誘導される各四面体の向きを $O_{DS}(T_v)$ と書く. ソリッドトーラス V_w を構成する四面体は, $\phi, L, R\text{-diagram}$ から得られる四面体 $T_{v(\phi)}, T_{v(L)}, T_{v(R)}$ のいずれかであるので, 補題 2.2, 定義 2.3 より, $O_{DS}(T_{v(\phi)}) \neq O_f(T_{v(\phi)})$ かつ $O_{DS}(T_{v(L)}) = O_f(T_{v(L)})$ かつ $O_{DS}(T_{v(R)}) \neq O_f(T_{v(R)})$ である.

よって, V_ϕ と U_R の四面体の向きについては, flow から誘導された向きとは逆の向きを入れて貼り合わせることににより, 向き $O_{DS}(V_w)$ の入ったソリッドトーラス V_w が得られる.

3.3 向き付けられたレンズ空間 $V_w \cup_\varphi V_{w'}$ の構成方法

2つの word w と w' に対するソリッドトーラス V_w と $V_{w'}$ を貼り合わせて得られるレンズ空間 [6] の向きについて考える. はじめに, DS-diagram Δ に対する鏡像の DS-diagram $*\Delta$ の定義と, それに関する補題を挙げる.

定義 3.3 E -cycle 付の DS-diagram $\Delta = (G, f, P; e)$ に対して, Δ の鏡像の DS-diagram $*\Delta$ を次のように定義する.

1. グラフ G の鏡像を G' とする.
2. G' の辺で, α, β, γ 以外のラベルの付いた辺の向きを逆にしたグラフを $*G$ とする.

このグラフ $*G$ から得られる DS-diagram を Δ の鏡像の DS-diagram と呼び, $*\Delta$ と書く.

また, Δ から得られる special spine P の頂点 v , 辺 e , 面 f に対応する $*\Delta$ から得られる special spine $*P$ の頂点, 辺, 面を $*v, *e, *f$ と書く.

補題 3.4 $O_{DS}(M_\Delta) \neq O_{DS}(M_{*\Delta})$

証明. DS-diagram Δ の E -cycle 上の任意の頂点 v について, code が l ならば頂点 $*v$ の code が r であり, code が r ならば頂点 $*v$ の code が l であることを示せばよい.

第 1 図, 第 2 図の頂点の近傍の鏡像 DS-diagram は第 9 図または第 10 図である. 第 1 図

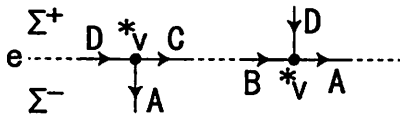


図 9: 頂点 v の code が l の場合

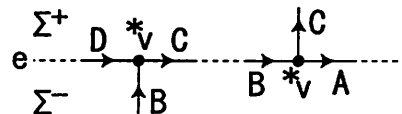


図 10: 頂点 v の code が r の場合

の頂点は l タイプであり, 第 9 図の頂点は r タイプである. 第 2 図の頂点は r タイプである. 第 10 図の頂点は l タイプである.

word $w = \phi X_1 X_2 \cdots X_n$ に対して, DS-diagram $*\Delta_w$ から得られる多様体 $V_w := B^3/f_{*\Delta_w}$ はソリッドトーラスである. なぜなら, 鏡像の DS-diagram は辺のラベルの向きを逆にするだけなので, identification map f_{Δ_w} と $f_{*\Delta_w}$ はイソトピックであるからだ.

また, ソリッドトーラス V_w の境界に埋め込まれた theta-curve θ によって, [6] と同じ方法で V_w のメリディアン, ロンディチュード, ファイバー構造を定める. ソリッドトーラス

V_w に関して得られた [6] の命題 3.1, 定理 3.2, 補題 3.9 の証明において, α, β, γ 以外の辺 X の向きを逆にしたと考えると, V_w に関して V_w と同じ事柄が証明される. よって, ∂V_w への θ の埋め込みと, $\partial V_{w'}$ への θ の埋め込みはイソトピックである.

2つのソリッドトラス V_w と $V_{w'}$ を貼り合わせ写像 φ で貼り合わせて得られるレンズ空間 $V_w \cup_{\varphi} V_{w'}$ [6] について考える.

定理 3.5 V_w に向き $O_{DS}(V_w)$ を入れ, $V_{w'}$ に向き $O_{DS}(V_{w'})$ とは逆の向きを入れて, φ で貼り合わせると, 向き付けられたレンズ空間 $V_w \cup_{\varphi} V_{w'}$ が得られる.

証明. 2つのソリッドトラス V_w と $V_{w'}$ の境界に埋め込まれた θ -curve θ はイソトピックであるから, θ から誘導される貼り合わせ写像 φ によって V_w と $V_{w'}$ を貼り合わせて得られるレンズ空間と V_w と $V_{w'}$ を貼り合わせて得られるレンズ空間は同相である.

また, 補題 3.1 より, レンズ空間 $V_w \cup_{\varphi} V_{w'}$ の DS-diagram は $\Delta_w \cup_{\varphi} \Delta_{w'}$ である. 補題 3.4 より, $O_{DS}(V_w) \neq O_{DS}(V_{w'})$ なので, V_w に標準的な向きを入れ, $V_{w'}$ には標準的な向きと逆の向きを入れて φ で貼り合わせると, 向き付けられたレンズ空間 $V_w \cup_{\varphi} V_{w'}$ が得られる. ■

3.4 向き付けられたザイフェルト多様体 $DS(F_g; (p_1, q_1), \dots, (p_n, q_n))$ の構成方法

[6] において, $W(3) := (S^2 - \coprod_{i=1}^3 \text{Int}(D_i^2)) \times S^1$ の $n - 2$ 個の copy $W(3)^{(j)}$ ($j = 3, 4, \dots, n$) を貼り合わせ写像 $\varphi^{(j)}$ ($j = 3, 4, \dots, n - 1$) で貼り合わせて多様体 $W(n) := (S^2 - \coprod_{i=1}^n \text{Int}(D_i^2)) \times S^1$ を定義した. この多様体の DS-diagram は次のように得られる. はじめに, DS-diagram $\Delta_{W(3)}$ の $n - 2$ 個の copy を $\hat{\Delta}_{W(3)}^{(j)}$ ($j = 3, 4, \dots, n$) として

$$\Delta_{W(3)}^{(j)} := \begin{cases} \hat{\Delta}_{W(3)}^{(j)} & (j \text{ is odd}), \\ \ast \hat{\Delta}_{W(3)}^{(j)} & (j \text{ is even}), \end{cases}$$

とする. また, $C_i^{(j)}$ ($i = 1, 2, 3$) を, DS-diagram $\Delta_{W(3)}^{(j)}$ の circle $\alpha_i \beta_i \gamma_i \overline{\alpha_i} \overline{\beta_i} \overline{\gamma_i}$ とする. このとき, 写像 $\tilde{\varphi}^{(j)} : C_3^{(j)} \rightarrow C_1^{(j+1)}$ を, α_3 と α_1 , β_3 と β_1 , γ_3 と γ_1 , $\overline{\alpha_3}$ と $\overline{\alpha_1}$, $\overline{\beta_3}$ と $\overline{\beta_1}$, $\overline{\gamma_3}$ と $\overline{\gamma_1}$ を同一視する貼り合わせ写像として, $n - 2$ 個の DS-diagram $\Delta_{W(3)}^{(j)}$ ($j = 3, 4, \dots, n$) を貼り合わせて得られる DS-diagram を $\Delta_{W(n)}$ と書く. このとき, $\varphi^{(j)}$ は $\tilde{\varphi}^{(j)}$ から誘導された写像であるから, 2つの多様体 $B^3/f_{\Delta_{W(n)}}$ と $W(n)$ は一致する. このことと補題 3.4 より次の定理が成立する.

定理 3.6 多様体 $W(n)$ の標準的な向きは, 多様体 $W(3)^{(j)}$ ($j = 3, 4, \dots, n$) に対して, j が奇数のときは標準的な向きを, j が偶数のときは標準的な向きとは逆の向きを入れて, 貼り合わせ写像 $\varphi^{(j)}$ ($j = 3, 4, \dots, n - 1$) で貼り合わせて得られる.

定理 3.7 $W(n)$ に標準的な向きを入れ, $\prod_{i=1}^g J, V_{p_i, q_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) に標準的な向きとは逆の向きを入れて, 貼り合わせ写像 φ で貼り合わせると, 向き付けられたザイフェルト多様体 $DS(F_{g_i}(p_1, q_1), \dots, (p_n, q_n))$ が得られる.

参考文献

- [1] M. F. Atiyah, *Topological quantum field theories*, Publ. Math. I.H.E.S. 68 (1989), 175-186
- [2] M. Endo and I. Ishii, *A new complexity for 3-manifolds*, Japanese J. Math. 31 (2005), 131-156
- [3] H. Ikeda and Y. Inoue, *Invitation to DS-diagrams*, Kobe J Math., 2 (1985) pp. 169-186
- [4] Peter Orlik, *Seifert manifolds*, Lecture Notes in Mathematics 291, Springer-Verlag
- [5] V.G.Turaev and O.Y.Viro, *State sum invariant of 3-manifolds and quantum 6j-symbols*, Topology, 31 (1992) p.865-902
- [6] T.Taniguchi and K.Tsuboi and M.Yamashita, *Systematic singular triangulation of all Seifert manifolds*, Tokyo J. Math., 28(2005), 539-561
- [7] T. Taniguchi, *Turaev-Viro invariant of Seifert manifolds*, Tokyo J. Math. に掲載予定