HAKONE SEMINAR 21 (2005) 45-53.

Seifert manifold $S\left(S^2, b; (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (\alpha_3, \beta_3)\right)$ の DS 表示

谷口　太聖

平成 18 年 1 月 19 日

概要

Oritable closed Seifert manifold $S\left(S^2, b; (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (\alpha_3, \beta_3)\right)$ の DS-diagram を与える.

1　導入

本稿の目的は, base space が S^2 で singular fiber が 3 本である orientable closed Seifert manifold $S\left(S^2, b; (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (\alpha_3, \beta_3)\right)$ [Sei] の DS-diagram DS $((1,0),(1,0),(1,B),(p_1,q_1),(p_2,q_2),(p_3,q_3))$ を与えることである.

Seifert manifold の DS-diagram については [TTY] に述べられているが, 本稿で述べる方法は [TTY] での構成法とは異なる. この理由は, Seifert manifold の singular fiber に対応する DS-diagram の"カセット"$A(p,q)$ の対等性を保つためである.

§2 では, DS-diagram $\Delta :=$DS $((1,0),(1,0),(1,B),(p_1,q_1),(p_2,q_2),(p_3,q_3))$ について説明し, Δ から得られる多様体 $M(\Delta)$ の一次元ホモロジー群の表示を与える. この表示の relation matrix を用いて, §3 で, Seifert manifold $S\left(S^2, b; (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (\alpha_3, \beta_3)\right)$ の DS-diagram DS $((1,0),(1,0),(1,B),(p_1,q_1),(p_2,q_2),(p_3,q_3))$ を決定する.

2　DS-diagram $\left(S^2; (1,0),(1,0),(1,B),(p_1,q_1),(p_2,q_2),(p_3,q_3)\right)$ から得られる多様体の一次元ホモロジー群

§2.1 で, DS-diagram $\Delta :=$DS $((1,0),(1,0),(1,B),(p_1,q_1),(p_2,q_2),(p_3,q_3))$ の定義を述べる. §??では, Δ によって得られる多様体 $M(\Delta)$ の一次元ホモロジー群の表示を与える.

2.1　DS-diagram DS $((1,0),(1,0),(1,B),(p_1,q_1),(p_2,q_2),(p_3,q_3))$

[TTY] において, DS-diagram W_3 が定義された (図 1). この diagram の 3 つの circle $c_i := \alpha_i\beta_i\gamma_i\bar{\alpha}_i\bar{\beta}_i\bar{\gamma}_i (i = 1,2,3)$ を W_3 の境界と呼ぶ. ここで, W_3 の 3 つの copy $W_3^{(1)}$, $W_3^{(2)}$, $W_3^{(3)}$

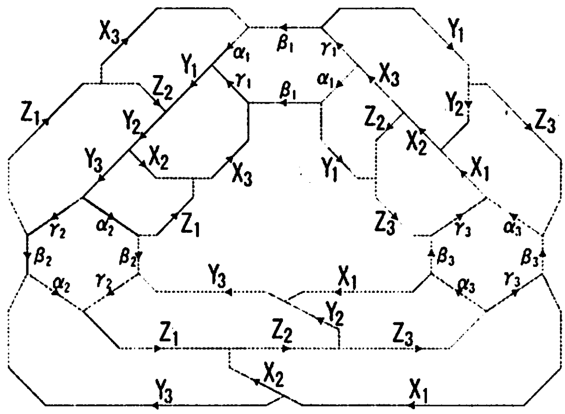

図 1: W_3-diagram

に対して, $W_3^{(i)}$ の境界 $c_1^{(i)}=\alpha_1\beta_1\gamma_1\bar{\alpha_1}\bar{\beta_1}\bar{\gamma_1}$ と W_3 の境界 $c_i=\alpha_i\beta_i\gamma_i\bar{\alpha_i}\bar{\beta_i}\bar{\gamma_i}$ を, 向きをこめた label の同一視 map で貼り合わせ, $c_1^{(i)}=c_i$ を除いた diagram を W_6 とする.

W_6 の 6 つの境界 $c_2^{(1)}$, $c_3^{(1)}$, $c_2^{(2)}$, $c_3^{(2)}$, $c_2^{(3)}$, $c_3^{(3)}$ を簡単のため, c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6 とそれぞれ書くことにする. このとき, [TTY] で定義された DS-diagram $w(b)$, $A(p,q)$ を用いて DS-diagram DS $((1,0),(1,0),(1,B),(p_1,q_1),(p_2,q_2),(p_3,q_3))$ を次のように定義する.

定義 2.1 c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6 と $w(0)$, $w(0)$, $w(B)$, $A(p_1,q_1)$, $A(p_2,q_2)$, $A(p_3,q_3)$ の境界をそれぞれ, 向きをこめたラベルで同一視する写像で貼り合わせ, 境界を除いた *diagram* を *DS*$((1,0),(1,0),(1,B),(p_1,q_1),(p_2,q_2),(p_3,q_3))$ とする.

2.2 DS-diagram DS $((1,0),(1,0),(1,B),(p_1,q_1),(p_2,q_2),(p_3,q_3))$ からえら得る多様体の一次元ホモロジー群

この節では, DS-diagram $\Delta :=$ DS $((1,0),(1,0),(1,B),(p_1,q_1),(p_2,q_2),(p_3,q_3))$ から得られる多様体 $M(\Delta)$ の一次元ホモロジー群 H_1 の表示を与える.

方法としては, 初めに, DS-diagram W_6, $w(b)$, $A(p,q)$ から得られる多様体 $M(W_6)$, V_b, $V_{p,q}$ の H_1 の表示を与える. このとき, Δ から得られる多様体は, $M(W_6)$ に V_0, V_0, V_b, V_{p_1,q_1}, V_{p_2,q_2}, V_{p_3,q_3} を貼り合わせて得られる [TTY]. よって, $M(W_6)$, V_b, $V_{p,q}$ の H_1 の表示を用いて $M(\Delta)$ の H_1 の表示を求めることができる.

2.2.1 $M(W_6)$ の一次元ホモロジー群の表示

一般に, DS-diagram Δ に対して, $M(\Delta)$ の H_1 の表示を求める手法として E-cycle に接する面を generator とする方法がある. これを用いて, [Hakone04] において, $M(W_3)$ の一次元

ホモロジー群 H_1 の表示を与えた.

補題 2.1

$$H_1\left(M(W_3)\right) \;=\; \left\langle a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2,\ b_3 \;\middle|\; \begin{array}{c} b_2+b_3=a_1 \\ b_3+b_1=a_2 \\ b_1+b_2=a_3 \end{array} \right\rangle$$

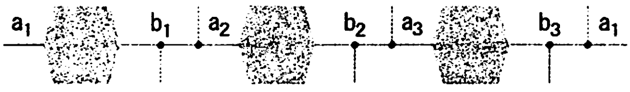

図 2: DS-diagram W_3 の E-cycle

さて, $M(W_6)$ の H_1 の表示は, generator が W_3, $W_3^{(1)}$, $W_3^{(2)}$, $W_3^{(3)}$ の generator の和であり, relation は W_3, $W_3^{(1)}$, $W_3^{(2)}$, $W_3^{(3)}$ の relation に, 貼り合わせによって同一視される face に対応する generator が等しいという relation を加えればよい. よって, 次を得る.

補題 2.2

$$H_1\left(M(W_6)\right)$$

$$= \left\langle \begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} & b_1^{(1)} & b_2^{(1)} & b_3^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} & b_1^{(2)} & b_2^{(2)} & b_3^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} & b_1^{(3)} & b_2^{(3)} & b_3^{(3)} \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{ccc} a_1=a_1^{(1)} & a_2=a_1^{(2)} & a_3=a_1^{(3)} \\ b_1=b_1^{(1)} & b_2=b_1^{(2)} & b_3=b_1^{(3)} \\ b_2+b_3=a_1 & b_3+b_1=a_2 & b_1+b_2=a_3 \\ b_2^{(1)}+b_3^{(1)}=a_1^{(1)} & b_3^{(1)}+b_1^{(1)}=a_2^{(1)} & b_1^{(1)}+b_2^{(1)}=a_3^{(1)} \\ b_2^{(2)}+b_3^{(2)}=a_1^{(2)} & b_3^{(2)}+b_1^{(2)}=a_2^{(2)} & b_1^{(2)}+b_2^{(2)}=a_3^{(2)} \\ b_2^{(3)}+b_3^{(3)}=a_1^{(3)} & b_3^{(3)}+b_1^{(3)}=a_2^{(3)} & b_1^{(3)}+b_2^{(3)}=a_3^{(3)} \end{array} \right.$$

2.2.2 $M(b)$, $M(p,q)$ の一次元ホモロジー群の表示

[TTY] で定義された DS-diagram $A(p,q)$, $w(b)$ から得られる多様体 $V_{p,q}$, V_b は solid torus である. これらの solid torus の H_1 の表示を与えるのだが, E-cycle に接する面のうち, DS-diagram の境界 $\alpha\beta\gamma\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}$ の α, γ に接する面を generator とする表示を与えたい. これは後に貼り合わせて得られる DS-diagram の H_1 の表示を求めることを想定しているからである.

次の補題は [Hakone04] に示されている.

補題 2.3 *p, q を, 互いに素で $q < p$ を満たす自然数とする. このとき, DS-diagram $A(p,q)$ から得られる solid torus $V_{p,q}$ の一次元ホモロジー群 $H_1(V_{p,q})$ は次の表示をもつ.*

$$H_1(V_{p,q}) = \langle \alpha,\ \gamma,\ x \mid \alpha = \nabla_\alpha x,\ \gamma = \nabla_\gamma x \rangle$$

ここで, ∇_α, ∇_γ は次で定義される.

1. n が奇数のとき

$$\nabla_\alpha := \nabla_n \qquad\qquad \nabla_\gamma := \nabla_{n-1}$$

2. n が偶数のとき

$$\nabla_\alpha := \nabla_{n-1} \qquad\qquad \nabla_\gamma := \nabla_n$$

$$\begin{aligned} q/p &= [a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, 1] \\ \nabla_n &:= det \begin{pmatrix} a_1 & 1 & & & & & \\ -1 & a_2 & 1 & & & & \\ & -1 & a_3 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -1 & a_{n-2} & 1 & \\ & & & & -1 & a_{n-1} & 1 \\ & & & & & -1 & a_n \end{pmatrix} \\ \nabla_0 &:= 1 \end{aligned}$$

補題 2.3 と同様に次が証明できる.

補題 2.4 *b を整数とする. このとき, DS-diagram $w(b)$ から得られる solid torus V_b の一次元ホモロジー群 $H_1(V_b)$ は次の表示をもつ.*

$$H_1(V_b) = \langle \alpha,\ \gamma,\ x \mid \alpha = -bx,\ \gamma = (b+1)x \rangle$$

2.2.3 DS-diagram DS $\left(S^2; (1,0), (1,0), (1,B), (p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3)\right)$ から得られる多様体の一次元ホモロジー群の表示

この節では, Seifert manifold $\Delta :=$ DS $\left(S^2; (1,0), (1,0), (1,B), (p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3)\right)$ から得られる Seifert manifold $M(\Delta)$ の一次元ホモロジー群 H_1 の表示を与える.

補題 2.4 より, DS 表示の 2 つの $(1,0)$ に対応する solid torus V_0 の H_1 は次の表示を持つ.

$$H_1(V_0) = \langle \alpha,\ \gamma,\ x \mid \alpha = 0 \cdot x,\ \gamma = x \rangle$$

また, DS 表示の $(1,B)$ に対応する solid torus V_B の H_1 は次の表示を持つ.

$$H_1(V_B) = \langle \alpha,\ \gamma,\ x \mid \alpha = -Bx,\ \gamma = (B+1)x \rangle$$

同様に, DS 表示の (p_i, q_i) に対応する solid torus V_{p_i,q_i} の H_1 は次の表示を持つ.

$$H_1(V_{p_i,q_i}) = \left\langle \alpha_i,\ \gamma_i,\ x_i \;\middle|\; \alpha_i = \nabla_\alpha^{(i)} x_i,\ \gamma_i = \nabla_\gamma^{(i)} x_i \right\rangle$$

よって, 貼り合わせによる relation を加えて, $M(\Delta)$ の H_1 は次の表示を持つ.

$H_1(M(\Delta))$

$$
= \left\langle
\begin{array}{ccc|ccc}
 & & & a_1 = a_1^{(1)} & a_2 = a_1^{(2)} & a_3 = a_1^{(3)} \\
 & & & b_1 = b_1^{(1)} & b_2 = b_1^{(2)} & b_3 = b_1^{(3)} \\
 & & & & & \\
a_1 & a_2 & a_3 & b_2 + b_3 = a_1 & b_3 + b_1 = a_2 & b_1 + b_2 = a_3 \\
b_1 & b_2 & b_3 & b_2^{(1)} + b_3^{(1)} = a_1^{(1)} & b_3^{(1)} + b_1^{(1)} = a_2^{(1)} & b_1^{(1)} + b_2^{(1)} = a_3^{(1)} \\
a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} & b_2^{(2)} + b_3^{(2)} = a_1^{(2)} & b_3^{(2)} + b_1^{(2)} = a_2^{(2)} & b_1^{(2)} + b_2^{(2)} = a_3^{(2)} \\
b_1^{(1)} & b_2^{(1)} & b_3^{(1)} & b_2^{(3)} + b_3^{(3)} = a_1^{(3)} & b_3^{(3)} + b_1^{(3)} = a_2^{(3)} & b_1^{(3)} + b_2^{(3)} = a_3^{(3)} \\
 & & & & & \\
a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} & \alpha_1 = 0 \cdot x_1 & \gamma_1 = x_1 & \\
b_1^{(2)} & b_2^{(2)} & b_3^{(2)} & \alpha_2 = 0 \cdot x_2 & \gamma_2 = x_2 & \\
 & & & \alpha_3 = -Bx_3 & \gamma_3 = (B+1)x_3 & \\
a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} & \alpha_4 = \nabla_\alpha^{(4)} x_4 & \gamma_4 = \nabla_\gamma^{(4)} x_4 & \\
b_1^{(3)} & b_2^{(3)} & b_3^{(3)} & \alpha_5 = \nabla_\alpha^{(5)} x_5 & \gamma_5 = \nabla_\gamma^{(5)} x_5 & \\
 & & & \alpha_6 = \nabla_\alpha^{(6)} x_6 & \gamma_6 = \nabla_\gamma^{(6)} x_6 & \\
 & & & & & \\
\alpha_1 & \gamma_1 & x_1 & a_2^{(1)} = \alpha_1 & a_3^{(1)} = \alpha_2 & \\
\alpha_2 & \gamma_2 & x_2 & b_2^{(1)} = \gamma_1 & b_3^{(1)} = \gamma_2 & \\
\alpha_3 & \gamma_3 & x_3 & & & \\
\alpha_4 & \gamma_4 & x_4 & a_2^{(2)} = \alpha_3 & a_3^{(2)} = \alpha_4 & \\
\alpha_5 & \gamma_5 & x_5 & b_2^{(2)} = \gamma_3 & b_3^{(2)} = \gamma_4 & \\
\alpha_6 & \gamma_6 & x_6 & & & \\
 & & & a_2^{(3)} = \alpha_5 & a_3^{(3)} = \alpha_6 & \\
 & & & b_2^{(3)} = \gamma_5 & b_3^{(3)} = \gamma_6 &
\end{array}
\right\rangle
$$

〔50〕

$$
= \left\langle \begin{array}{c|c}
\begin{array}{ccc}
a_1 & a_2 & a_3 \\
b_1 & b_2 & b_3 \\
\\
a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} \\
b_1^{(1)} & b_2^{(1)} & b_3^{(1)} \\
\\
a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} \\
b_1^{(2)} & b_2^{(2)} & b_3^{(2)} \\
\\
a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} \\
b_1^{(3)} & b_2^{(3)} & b_3^{(3)} \\
\\
x_1 & x_2 & x_3 \\
x_4 & x_5 & x_6
\end{array}
&
\begin{array}{ccc}
a_1 = a_1^{(1)} & a_2 = a_1^{(2)} & a_3 = a_1^{(3)} \\
b_1 = b_1^{(1)} & b_2 = b_1^{(2)} & b_3 = b_1^{(3)} \\
\\
b_2 + b_3 = a_1 & b_3 + b_1 = a_2 & b_1 + b_2 = a_3 \\
b_2^{(1)} + b_3^{(1)} = a_1^{(1)} & b_3^{(1)} + b_1^{(1)} = a_2^{(1)} & b_1^{(1)} + b_2^{(1)} = a_3^{(1)} \\
b_2^{(2)} + b_3^{(2)} = a_1^{(2)} & b_3^{(2)} + b_1^{(2)} = a_2^{(2)} & b_1^{(2)} + b_2^{(2)} = a_3^{(2)} \\
b_2^{(3)} + b_3^{(3)} = a_1^{(3)} & b_3^{(3)} + b_1^{(3)} = a_2^{(3)} & b_1^{(3)} + b_2^{(3)} = a_3^{(3)} \\
\\
a_2^{(1)} = 0 \cdot x_1 & b_2^{(1)} = x_1 & \\
a_3^{(1)} = 0 \cdot x_2 & b_3^{(1)} = x_2 & \\
a_2^{(2)} = -Bx_3 & b_2^{(2)} = (B+1)x_3 & \\
a_3^{(2)} = \nabla_\alpha^{(4)} x_4 & b_3^{(2)} = \nabla_\gamma^{(4)} x_4 & \\
a_2^{(3)} = \nabla_\alpha^{(5)} x_5 & b_2^{(3)} = \nabla_\gamma^{(5)} x_5 & \\
a_3^{(3)} = \nabla_\alpha^{(6)} x_6 & b_3^{(3)} = \nabla_\gamma^{(6)} x_6 &
\end{array}
\end{array} \right\rangle
$$

$$
= \left\langle \begin{array}{c|c}
\begin{array}{ccc}
a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} \\
b_1^{(1)} & b_2^{(1)} & b_3^{(1)} \\
\\
a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} \\
b_1^{(2)} & b_2^{(2)} & b_3^{(2)} \\
\\
a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} \\
b_1^{(3)} & b_2^{(3)} & b_3^{(3)} \\
\\
x_1 & x_2 & x_3 \\
x_4 & x_5 & x_6
\end{array}
&
\begin{array}{ccc}
b_1^{(2)} + b_1^{(3)} = a_1^{(1)} & b_1^{(3)} + b_1^{(1)} = a_1^{(2)} & b_1^{(1)} + b_1^{(2)} = a_1^{(3)} \\
\\
b_2^{(1)} + b_3^{(1)} = a_1^{(1)} & b_3^{(1)} + b_1^{(1)} = a_2^{(1)} & b_1^{(1)} + b_2^{(1)} = a_3^{(1)} \\
b_2^{(2)} + b_3^{(2)} = a_1^{(2)} & b_3^{(2)} + b_1^{(2)} = a_2^{(2)} & b_1^{(2)} + b_2^{(2)} = a_3^{(2)} \\
b_2^{(3)} + b_3^{(3)} = a_1^{(3)} & b_3^{(3)} + b_1^{(3)} = a_2^{(3)} & b_1^{(3)} + b_2^{(3)} = a_3^{(3)} \\
\\
a_2^{(1)} = 0 \cdot x_1 & b_2^{(1)} = x_1 & \\
a_3^{(1)} = 0 \cdot x_2 & b_3^{(1)} = x_2 & \\
a_2^{(2)} = -Bx_3 & b_2^{(2)} = (B+1)x_3 & \\
a_3^{(2)} = \nabla_\alpha^{(4)} x_4 & b_3^{(2)} = \nabla_\gamma^{(4)} x_4 & \\
a_2^{(3)} = \nabla_\alpha^{(5)} x_5 & b_2^{(3)} = \nabla_\gamma^{(5)} x_5 & \\
a_3^{(3)} = \nabla_\alpha^{(6)} x_6 & b_3^{(3)} = \nabla_\gamma^{(6)} x_6 &
\end{array}
\end{array} \right\rangle
$$

$$
= \left\langle \begin{array}{ccc|ccccc}
 & & & b_1^{(2)} & + & b_1^{(3)} & = & a_1^{(1)} \\
 & & & b_1^{(3)} & + & b_1^{(1)} & = & a_1^{(2)} \\
 & & & b_1^{(1)} & + & b_1^{(2)} & = & a_1^{(3)} \\
 & & & & & & & \\
a_1^{(1)} & a_1^{(2)} & a_1^{(3)} & x_1 & + & x_2 & = & a_1^{(1)} \\
b_1^{(1)} & b_1^{(2)} & b_1^{(3)} & x_2 & + & b_1^{(1)} & = & 0 \\
 & & & b_1^{(1)} & + & x_1 & = & 0 \\
x_1 & x_2 & x_3 & (B+1)x_3 & + & \nabla_\gamma^{(4)} x_4 & = & a_1^{(2)} \\
x_4 & x_5 & x_6 & \nabla_\gamma^{(4)} x_4 & + & b_1^{(2)} & = & -Bx_3 \\
 & & & b_1^{(2)} & + & (B+1)x_3 & = & \nabla_\alpha^{(4)} x_4 \\
 & & & \nabla_\gamma^{(5)} x_5 & + & \nabla_\gamma^{(6)} x_6 & = & a_1^{(3)} \\
 & & & \nabla_\gamma^{(6)} x_6 & + & b_1^{(3)} & = & \nabla_\alpha^{(5)} x_5 \\
 & & & b_1^{(3)} & + & \nabla_\gamma^{(5)} x_5 & = & \nabla_\alpha^{(6)} x_6
\end{array} \right\rangle
$$

ここで,

$$
a_1^{(1)} = a_1 \qquad a_1^{(2)} = a_2 \qquad a_1^{(3)} = a_3 \qquad b_1^{(1)} = b_1 \qquad b_1^{(2)} = b_2 \qquad b_1^{(3)} = b_3
$$

と書き直すと,

$$
= \left\langle \begin{array}{ccc|ccccc}
 & & & b_2 & + & b_3 & = & a_1 \\
 & & & b_3 & + & b_1 & = & a_2 \\
 & & & b_1 & + & b_2 & = & a_3 \\
 & & & & & & & \\
a_1 & a_2 & a_3 & x_1 & + & x_2 & = & a_1 \\
b_1 & b_2 & b_3 & x_2 & + & b_1 & = & 0 \\
 & & & b_1 & + & x_1 & = & 0 \\
x_1 & x_2 & x_3 & (B+1)x_3 & + & \nabla_\gamma^{(4)} x_4 & = & a_2 \\
x_4 & x_5 & x_6 & \nabla_\gamma^{(4)} x_4 & + & b_2 & = & -Bx_3 \\
 & & & b_2 & + & (B+1)x_3 & = & \nabla_\alpha^{(4)} x_4 \\
 & & & \nabla_\gamma^{(5)} x_5 & + & \nabla_\gamma^{(6)} x_6 & = & a_3 \\
 & & & \nabla_\gamma^{(6)} x_6 & + & b_3 & = & \nabla_\alpha^{(5)} x_5 \\
 & & & b_3 & + & \nabla_\gamma^{(5)} x_5 & = & \nabla_\alpha^{(6)} x_6
\end{array} \right\rangle
$$

3 Seifert manifold $M\left(S^2, b; (\alpha_1,\beta_1), (\alpha_2,\beta_2), (\alpha_3,\beta_3)\right)$ の DS 表示

Seifert manifold $M := S\left(S^2, b; (\alpha_1,\beta_1), (\alpha_2,\beta_2), (\alpha_3,\beta_3)\right)$ ($0 < \beta_i < \alpha_i$ としてよい) の singular fiber は (p_i, q_i)-type である. ここで, $\alpha_i = p_i$ かつ $q_i\beta_i \equiv 1 \pmod{p_i}$ である. よっ

て, DS $\left(S^2;(1,0),(1,0),(1,B),(p_1,q_1),(p_2,q_2),(p_3,q_3)\right)$ は M の DS-diagram の一つであり, obstruction class に相当する $B\in\mathbb{Z}$ が未知数である. これは, Seifert の表示から得られる M の H_1 の relation matrix の行列式と, DS-diagram の表示から得られる M の H_1 の relation matrix の行列式（B の 1 次式）が一致することから決定できる.

定理 3.1 *Seifert manifold* $M := S\left(S^2,b;(\alpha_1,\beta_1),(\alpha_2,\beta_2),(\alpha_3,\beta_3)\right)$ *の DS-diagram は* $DS\left(S^2;(1,0),(1,0),(1,B),(p_1,q_1),(p_2,q_2),(p_3,q_3)\right)$ *であり,* p_i, q_i, B *は次を満たす整数である.*

$$\alpha_i = p_i \qquad q_i\beta_i \equiv 1\ (mod\ \alpha_i) \qquad 0<q_i<p_i \qquad |det U_M| = det U_{DS}$$

$$U_M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -b \\ \alpha_1 & 0 & 0 & \beta_1 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \beta_3 \end{pmatrix}$$

$$U_{DS} = \begin{pmatrix}
-1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & -1 & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & -1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1+B & \nabla_\gamma^{(4)} & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & B & \nabla_\gamma^{(4)} & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1+B & 1-\nabla_\alpha^{(4)} & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \nabla_\gamma^{(5)} & \nabla_\gamma^{(6)} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1-\nabla_\alpha^{(5)} & \nabla_\gamma^{(6)} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \nabla_\gamma^{(5)} & 1-\nabla_\alpha^{(6)}
\end{pmatrix}$$

Proof. Seifert manifold $S = S\left(S^2,b;(\alpha_1,\beta_1),(\alpha_2,\beta_2),(\alpha_3,\beta_3)\right)$ のホモロジー群は次の表示を持つ [Mori].

$$H_1(M) = \left\langle c_1,\ c_2,\ c_3 \;\middle|\; \begin{array}{l} c_1+c_2+c_3 = bh \\ \alpha_1 c_1 + \beta_1 h = 0 \\ \alpha_2 c_2 + \beta_2 h = 0 \\ \alpha_3 c_3 + \beta_3 h = 0 \end{array} \right\rangle$$

よって, この relation matrix U_M は

$$U_M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -b \\ \alpha_1 & 0 & 0 & \beta_1 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \beta_3 \end{pmatrix}$$

である. 一方, DS-diagram DS$((1,0),(1,0),(1,B),(p_1,q_1),(p_2,q_2),(p_3,q_3))$ から得られる多様体の H_1 の relation matrix は, §2.2.3 に与えられた H_1 の表示を用いて

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6$$

の順で matrix を構成すると行列 U_{DS} となる. ∎

参考文献

[TTY] T.Taniguchi and K.Tsuboi and M.Yamashita, *Systematic singular triangulation of all orientable Seifert manifolds,* to appear Tokyo J.Math

[TV] V.G.Turaev and O.Y.Viro, *State sum invariants of 3 - manifolds and quantum 6j-symbols, Topology.,* **31** (1992) p.865-902

[T] T.Taniguchi, *Turaev-Viro invariant of all orientable Seifert manifolds,* in preprint

[Mori] 森元勘治, 3次元多様体入門, 培風館

[Hakone04] HAKOHNE SEMINAR, **24**(2004)

[Sei] P. Orlik, *Seifert manifold* , **291** Lecture Notes in Math.