

3次元多様体 $M((p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3))$ の Seifert 表示

谷口 太聖

平成 17 年 1 月 20 日

概要

[1] で定義された 3 次元多様体 $M((p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3))$ は, S^2 上に singular fiber が 3 本ある Seifert manifold である. この Seifert manifold の表示 $S(S^2, b; (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (\alpha_3, \beta_3))$ を決定する.

1 導入

§2 で, Seifert manifold の定義と, Seifert 表示 $S(S^2, b; (p_1, q_1), \dots, (p_n, q_n))$ の説明をする. §3 で, manifold $M := M((p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3))$ の定義を述べる. §4 において, manifold M の Seifert 表示を与える. これは, M が S^2 上の singular fiber 3 本の Seifert manifold であるという事と, M の基本群によって決定される.

本論文の結果を利用することによって, Seifert manifold $S(S^2, b; (p_1, q_1), \dots, (p_n, q_n))$ の DS-diagram を決定することができ, 任意の向き付け可能な Seifert manifold の state sum type の不変量, 例えば Turaev-Viro invariant [2], を, その Seifert 表示から計算することが可能になる [3].

2 Seifert manifold

2.1 Seifert manifold の定義

定義 2.1 コンパクトで向き付け可能な 3 次元多様体 M が Seifert manifold であるとは, 次の 2 つの条件を満たすことである.

1. M が互いに交わらない loop の和集合になっている
2. 任意の loop $l \subset M$ に対して, loop の和集合であるような l の regular neighborhood $N(l)$ が存在して, $N(l)$ が $V_{1,q}$, または, $V_{p,q}$ である.

ここで, $V_{\alpha,\beta}$ とは, 同相写像 $f : D^2 \ni re^{i\theta} \rightarrow re^{i(\theta + \frac{2\pi\beta}{\alpha})} \in D^2$ によって, $V_{\alpha,\beta} := D^2 \times I / (x, 0) \sim (f(x), 1)$ で定義されれる fiber 構造をもった solid torus である. また, $x \in D^2$ を D^2 の中心とすると, $\{0\} \times I / \sim$ を $V_{\alpha,\beta}$ の core という. $\alpha \neq 1$, $\alpha = 1$ のとき, $V_{\alpha,\beta}$ の core をそれぞれ, singular fiber, regular fiber という.

2.2 Seifert manifold の表示

M を Seifert manifold として, B を M の base space, $p : M \rightarrow B$ を projection とする. M はコンパクトであるから, singular fiber の数は有限個である. これらが (p_i, q_i) -type の singular fiber であるとして, s_i ($i = 1, 2, \dots, n$) と書く. はじめに, base space B が境界をもつ場合を考える.

1. $\partial B \neq \emptyset$ のとき

次のように記号を定義する.

- s_i : singular fiber ($i = 1, 2, \dots, n$)
- V_i := a regular neighborhood of s_i
- M' := $\text{cl}(M - (V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n))$
- B' := $p(M')$
- T_i : $\partial M'$ の connected component のうちで ∂V_i と貼り合わされる torus

ここで, 断面 $c : B' \rightarrow M'$ を一つ固定して, c_i を $c(B')$ と T_i の intersection, h_i を T_i 上の M' の fiber とする. M は向き付け可能なので, M の向きを一つ固定する. また, M の fiber の向きも任意に一つ固定する.

ここで, V_i が singular fiber であるので, V_i は, ある type の fibered solid torus になっている. ここで, V_i が (p_i, q_i) -type の singular fiber であるということを次の 2 つの条件で定義する.

1. 貼り合わせ写像を $f_i^* : \partial V_i \rightarrow T_i$ とすると, $\pi_1(\partial V_i) \cong \langle l_i \mid - \rangle \oplus \langle m_i \mid - \rangle$ において,

$$f_i^*([h_i]) = p_i[l_i] + q_i[m_i] \quad (1)$$

が成り立つように l_i を決める. 記号 $[x]$ は x の homotopy class を表し, 今後, 簡単のために $[x]$ を x と書くことにする. また, $p_i > 0$ となるように l_i の向きを決める. (これによって, V_i は (p_i, q_i) -type, ただし $p_i > 1$, の fibered solid torus であるとしてよい.)

2. 初めに固定した M の向きから (代数的に) 誘導される ∂V_i の向き $\Delta(\partial V_i)$ と, (l_i, m_i) の順で定まる ∂V_i の向き $\Delta(T_i)$ が一致している. (このように m_i の向きが決められていると考えてもよい.)

最後に, c_i の向きを次のように決める. 初めに決めた M の向きから, T_i の向きが誘導される. この T_i の向きと, (c_i, h_i) の順序によって決まる T_i の向きが一致するように c_i の向きを決める.

注意 1 このとき, この T_i の向きと, (h_i, c_i) の順序によって決まる T_i の向きが一致するように c_i の向きを決めてもよいが, (c_i, h_i) の順序にした理由は, Seifert の表示において負の整数がでてこないようにするためである.

貼り合わせ写像 f_i^* によって, $\pi_i(T_i) \cong \langle c_i | - \rangle \oplus \langle h_i | - \rangle$ において,

$$\begin{aligned} f_i^*(m_i) &= \alpha_i c_i + \beta_i h_i \\ f_i^*(l_i) &= \gamma_i c_i + \delta_i h_i \end{aligned}$$

とする. ただし, $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i \in \mathbb{Z}$ である. このとき,

$$\begin{pmatrix} f_i^*(m_i) \\ f_i^*(l_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_i \\ h_i \end{pmatrix} \quad (2)$$

である.

一方, $\Delta(\partial V_i) = (l_i, m_i)$, $\Delta(T_i) = (c_i, h_i)$ であり, 貼り合わせ写像は向きを逆にする (貼り合わせて得られる多様体が向き付け可能になるため) ので,

$$\begin{pmatrix} f_i^*(l_i) \\ f_i^*(m_i) \end{pmatrix} = U_f \begin{pmatrix} c_i \\ h_i \end{pmatrix}$$

において, $\det U_f = -1$ である. ここで,

$$\text{式(2)} \iff \begin{pmatrix} f_i^*(l_i) \\ f_i^*(m_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_i & \delta_i \\ \alpha_i & \beta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_i \\ h_i \end{pmatrix}$$

であるから, 次が成立する.

$$\alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i = 1 \quad (3)$$

よって,

$$\begin{pmatrix} f_i^{-1}(c_i) \\ f_i^{-1}(h_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_i & -\beta_i \\ -\gamma_i & \alpha_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_i \\ l_i \end{pmatrix}$$

が成り立ち, 次を得る.

$$f_i^{-1}(h_i) = -\gamma_i m_i + \alpha_i l_i \quad (4)$$

以上の式 (1), (3), (4) より, 次を得る.

$$\alpha_i = p_i \qquad \beta_i q_i \equiv 1 \pmod{p_i} \quad (5)$$

M の topological type は $f_i^*(m_i)$ の isotopy class で決まる. T_i は torus であるから, $f_i^*(m_i)$ の homotopy class で決まる. つまり, $f_i^*(m_i) = \alpha_i c_i + \beta_i h_i$ の係数 (α_i, β_i) によって決まる.

以上によって, M は, base space B と, 式 (5) を満たす (α_i, β_i) , $(i = 1, 2, \dots, n)$ を用いて, $S(B; (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots, (\alpha_n, \beta_n))$ と表示される.

2. $\partial B = \phi$ のとき

記号を次のように定義する.

$$\begin{aligned}
 s_i & : \text{ singular fibers } (i = 1, 2, \dots, n) \\
 s_0 & : \text{ a regular fiber} \\
 V_i & := \text{ a regular neighborhood of } s_i \text{ such that } V_i \text{ is } V_{p,q} \\
 V_0 & := \text{ a regular neighborhood of } s_i \text{ such that } V_i \text{ is } V_{1,q} \\
 M' & := \text{cl}(M - (V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n)) \\
 B' & := p(M') \\
 M'' & := \text{cl}(M' - V_0) \\
 B'' & := p(M'') \\
 M^* & := \text{cl}(M - V_0) \\
 B^* & := p(M^*)
 \end{aligned}$$

1. $\partial B \neq \phi$ の場合の考察によって, M^* の topological type は B' と式 (5) を満たす (α_i, β_i) , $(i = 1, 2, \dots, n)$ によって決まる. よって, B の topological type は M^* と V_0 の貼り合わせ map で決まる. つまり, $f_0^*(m_0) = \alpha_0 c_0 + \beta_0 h_0$ の (α_i, β_i) で決まる.

ここで, m_0, l_0, c_0, h_0 を, $1.\partial B \neq \phi$ の場合と同様に定義して, $\pi_1(T_0)$ において

$$\begin{aligned}
 f_0^*(m_0) & = \alpha_0 c_0 + \beta_0 h_0 \\
 f_0^*(l_0) & = \gamma_0 c_0 + \delta_0 h_0
 \end{aligned}$$

であるとする. このとき,

$$\begin{pmatrix} f_0^{-1}(c_0) \\ f_0^{-1}(h_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_0 & -\beta_0 \\ -\gamma_0 & \alpha_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 \\ l_0 \end{pmatrix}$$

である. よって, $f_0^{*-1}(h_0) = -\gamma_0 m_0 + \alpha_0 l_0$ である. ここで, s_0 は regular fiber であるから, ある整数 $q_0 \in \mathbb{Z}$ に対して, $\alpha_0 = 1$ かつ $-\gamma_0 = q_0$ である.

よって, $f_0^*(m_0) = \alpha_0 c_0 + \beta_0 h_0 = c_0 + \beta_0 h_0$ となる. つまり, $M = M^* \cup_{f_0^*} V_0$ の topological type は, この $\beta_0 \in \mathbb{Z}$ によって決まる. これを, M の obstruction class と呼び, b で表すことにする.

以上によって, M の topological type は, base space B と式 (5) を満たす (α_i, β_i) , $(i = 1, 2, \dots, n)$ と obstruction class b によって決まる. これを $S(S^2, b; (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_n, \beta_n))$ と書く.

注意 2 Seifert presentation $S(S^2, b; (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_n, \beta_n))$ は, 断面 $c: B' \rightarrow M'$ の取替えによって, $0 < \beta_i < \alpha_i$ とできる [4].

3 多様体 $M((p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3))$

この章では, [1] において定義された 3 次元多様体 $M((p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3))$ について説明する.

3.1 Diagrams $\Delta(p, q), \Delta(W_3)$

連分数展開の記号を次で定める.

$$[a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n] := \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$$

(p, q) を, $0 < q < p$ を満たす互いに素な自然数の組とする. このとき, 連分数展開 $q/p = [a_1, a_2, \dots, a_n, 1]$ によって得られた自然数 a_k を用いて, diagram $\Delta(p, q)$ を次で定義する.

$$\Delta(p_i, q_i) = \begin{cases} L^{a_1} R^{a_2} L^{a_3} \dots L^{a_{n-2}} R^{a_{n-1}} L^{a_n} & (n : \text{odd}) \\ L^{a_1} R^{a_2} L^{a_3} \dots R^{a_{n-2}} L^{a_{n-1}} R^{a_n} & (n : \text{even}) \end{cases}$$

ここで diagram $X_1 X_2 \dots X_n$ とは, ϕ -diagram (図 1) の外側に, X_1 -diagram, X_2 -diagram, \dots , X_n -diagram と重ね (ここで $X_i = L, R$ である. 図 2, 図 3), circles $\alpha\beta\gamma\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma^{-1}$ を除いた diagram (詳しい定義は, [1] を参照) である. また, 図 4 を, diagram $\Delta(W_3)$ とする.

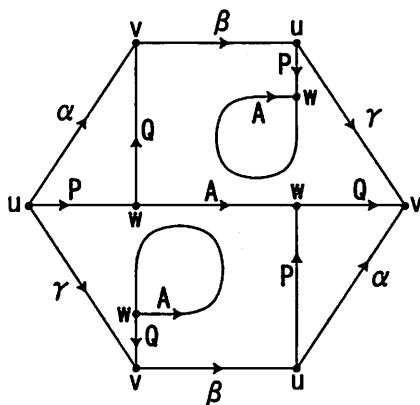


図 1: ϕ -diagram

注意 3 $\Delta(p, q), \Delta(W_3)$ は DS -diagram であり, この DS -diagram から得られる 3 次元多様体を, それぞれ, $M(p, q), M(W_3)$ と書く.

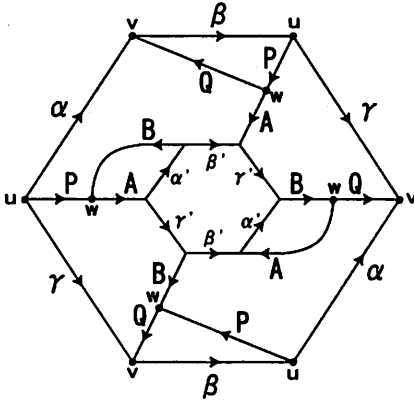


図 2: L-diagram

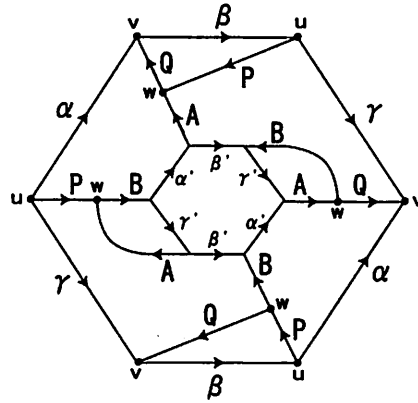


図 3: R-diagram

3.2 多様体 $M((p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3))$

$p > q$ を満たす互いに素な自然数の組 (p_i, q_i) , $(i = 1, 2, 3)$ に対して, diagram $\Delta((p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3))$ を次の手順で定義する.

Step1 $i = 1, 2, 3$ に対して, $\Delta(W_3)$ の circle $\alpha_i \beta_i \gamma_i \alpha_i^{-1} \beta_i^{-1} \gamma_i^{-1}$ と, $\Delta(p_i, q_i)$ の circle $\alpha \beta \gamma \alpha^{-1} \beta^{-1} \gamma^{-1}$ を同一視する map で貼り合わせる.

Step2 circles $\alpha_i \beta_i \gamma_i \alpha_i^{-1} \beta_i^{-1} \gamma_i^{-1}$ ($i = 1, 2, 3$) を除く.

Diagram $\Delta((p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3))$ は DS-diagram であり, この DS-diagram から得られる 3次元多様体を $M = M((p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3))$ と定義する. M には, DS-diagram から標準的に定まる fiber 構造があり, 次の命題が成立する ([1] の §5.4 を参照).

命題 3.1 $M((p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3))$ は S^2 上に 3本の (p_i, q_i) -type の singular fiber がある Seifert manifold である.

4 多様体 $M((p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3))$ の Seifert 表示

この章では $M = M((p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3))$ の Seifert 表示を決定することを目的とする. これは, M の基本群から求められる.

§4.1 では, DS-diagram Δ から, $M(\Delta)$ の基本群を求める方法を説明する. この方法を利用して, §4.2 で $M((p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3))$ の基本群を求め, §4.3 で $M((p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3))$ の Seifert 表示を与える.

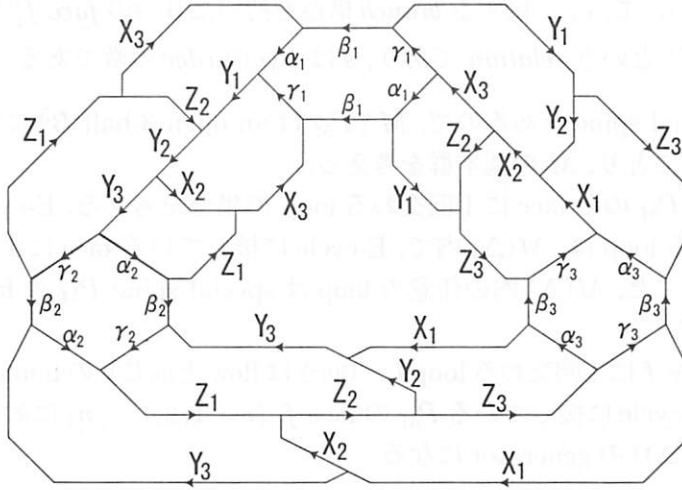


図 4: $\Delta(W_3)$ -diagram

4.1 多様体 $M(\Delta)$ の基本群

DS-diagram $\Delta = (S^2, f, G)$ が与えられたとき, Δ から得られる多様体 $M := M(\Delta)$ の基本群を求める命題を挙げる.

Δ から得られる 3 次元多様体 $M = M(\Delta)$ の標準的な flow によって M の special spine $P_M := \partial B^3/f$ の各 face に, 図 5 のような orientation を定める. また, この flow によって, 各 edge に接する 3 つの face には, 図 6 のような branch 構造が入る.

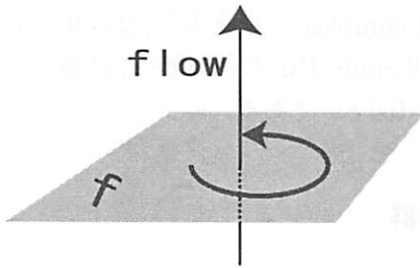


図 5: flow から決まる face の向き

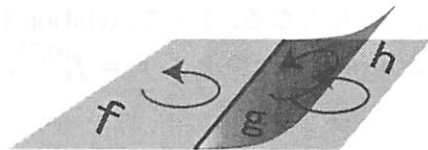


図 6: 各 edge における branch 構造

命題 4.1 DS-diagram $\Delta = (S^2, \varphi, G)$ に対して, 3 次元多様体 $M = M(\Delta)$ の基本群は次で与えられる.

$$\pi_1(M) = \langle f_1, f_2, \dots, f_n \mid r_1, r_2, \dots, r_s \rangle$$

ここで, f_i は, E -cycle に接する special spine P_M の face である. また, r_i は, special spine

P_M の各 edge e_i について, e_i に接する branch 構造を持った 3 つの face $f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, f_3^{(i)}$ に対する $e_i = f_1^{(i)-1} f_2^{(i)} f_3^{(i)}$ という relation であり, s は P_M の edge の数である.

Proof. P_M が special spine であるので, $M \setminus P_M$ は an open 3-ball B^3 に同相である. base point v を, $\text{Int}(B^3)$ にとり, M の基本群を考える.

今, special spine P_M の各 face に 1 回交わる loop の集合を考える. E-cycle に接していない face に 1 回交わる loop は, $M(\Delta)$ 内で, E-cycle に接している face に 1 回交わる loop に homotopic である. また, $M(\Delta)$ 内の任意の loop は special spine P_M の face に 1 回交わる loop の積で表される.

よって, P_M の face f に 1 回交わる loop l_f (向きは flow と同じ) の homotopy class (図 7) を $[f]$ と書くと, E-cycle に接している P_M の face f_i ($i = 1, 2, \dots, n$) に対応する homotopy class $[f_i]$ が $\pi_1(M(\Delta))$ の generator になる.

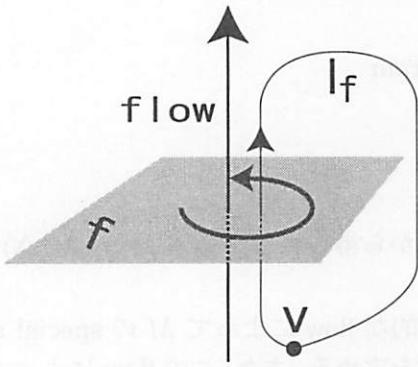


図 7: face f に対応する loop l_f

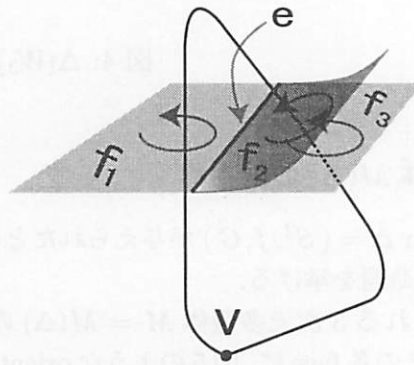


図 8: edge e に対応する relation

generators f_i の関係式は, special spine の dual cell complex で考えると, 2-cell を bound する relation の積となる. よって, relation は, special spine P_M の各 edge e_i に接する 3 つの face による relation, つまり, $r_i = f_1^{(i)-1} f_i^{(i)} f_3^{(i)}$ (図 8) である. ■

4.2 多様体 $M((p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3))$ の基本群

この章では $M((p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3))$ の π_1 を求める. はじめに, DS-diagram $\Delta(p, q)$ から得られる manifold $M(p, q) \cong D^2 \times S^1$ の H_1 の関係式を求める.

補題 4.2 p, q を, 互いに素で $q < p$ を満たす自然数とする. ここで, 自然数 a_i を, $q/p = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, 1]$ とする. このとき, DS-diagram $\Delta(p, q)$ から得られる manifold $M = M(p, q)$ のホモロジー群 $H_1(M)$ について次の式が成立する.

(a) n が奇数のとき	$F_\alpha = \Delta_n A_0$	$F_\gamma = \Delta_{n-1} A_0$
(b) n が偶数のとき	$F_\alpha = \Delta_{n-1} A_0$	$F_\gamma = \Delta_n A_0$

ここで, A_0 は, DS-diagram $\Delta(p, q)$ において, ϕ -diagram の face $AQ\gamma^{-1}PAP^{-1}\beta^{-1}Q$ に対応する loop の homology class であり, F_α, F_γ は, $\Delta(p, q)$ において, $\partial F_\alpha \cap \alpha, \partial F_\gamma \cap \gamma$ となる face に対応する loop の homology class である. また, Δ_n は, 次の式で定義する.

$$\Delta_n := \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 & & & & \\ -1 & a_2 & 1 & & & \\ & -1 & a_3 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & a_{n-2} & 1 \\ & & & & -1 & a_{n-1} & 1 \\ & & & & & -1 & a_n \end{pmatrix}$$

$$\Delta_0 := 1$$

Proof. q/p の連分数展開の長さ n に関する帰納法で証明する.

1. $n = 1$ のとき

$1/p = [p-1, 1]$ である. よって, $\Delta_{n-1} = \Delta_{1-1} = \Delta_0 = 1$ かつ $\Delta_n = |p-1| = p-1$ である. ここで, $\Delta(p, q)$ の DS-diagram の E-cycle は, 図 9 のようになる. E-cycle の性質により, P_M のすべての edge が E-cycle 上にあり, すべての face が E-cycle に接している. よって, 命題 4.1 より

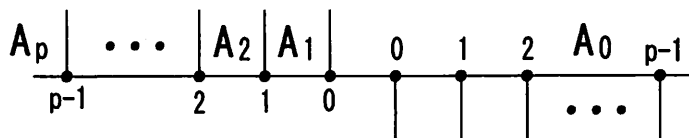


図 9: $\Delta(p, q)$ の E-cycle in case $n = 1$

$$H_1 = \left\langle A_0, A_1, \dots, A_p \left| \begin{array}{ll} A_0 = A_1 + A_0 & A_4 = A_2 + A_0 \\ A_2 = A_1 + A_0 & \vdots \\ A_3 = A_2 + A_0 & A_p = A_{p-1} + A_0 \end{array} \right. \right\rangle$$

$$= \langle A_0, A_p \mid A_p = (p-1)A_0 \rangle$$

2. $n > 1$ のとき

(a) n が奇数のとき

帰納法の仮定より, 図 10 において, $B_0 = \Delta_{n-2}A_0, C_0 = \Delta_{n-1}A_0$ が成立してい

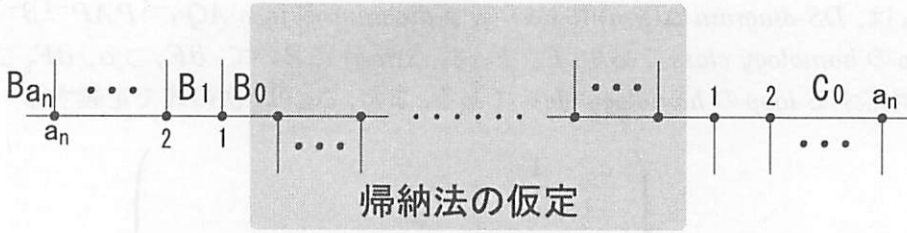


図 10: $\Delta(p, q)$ の E-cycle in case $n > 1$

る. よって,

$$\begin{aligned}
 & H_1(M(p, q)) \\
 &= \left\langle A_0, B_0, B_1, \dots, B_{a_n}, C_0 \left| \begin{array}{l} B_0 = \Delta_{n-2}A_0 \\ C_0 = \Delta_{n-1}A_0 \\ B_1 = B_0 + C_0 \end{array} \right. \begin{array}{l} B_2 = B_1 + C_0 \\ B_3 = B_2 + C_0 \\ \vdots \\ B_{a_n} = B_{a_n-1} + C_0 \end{array} \right\rangle \\
 &= \langle A_0, B_{a_n}, C_0 \mid C_0 = \Delta_{n-1}A_0, B_{a_n} = \Delta_{n-2}A_0 + a_n\Delta_{n-1}A_0 \rangle \\
 &= \langle A_0, B_{a_n}, C_0 \mid C_0 = \Delta_{n-1}A_0, B_{a_n} = (\Delta_{n-2} + a_n\Delta_{n-1})A_0 \rangle \\
 &= \langle A_0, B_{a_n}, C_0 \mid C_0 = \Delta_{n-1}A_0, B_{a_n} = \Delta_n A_0 \rangle
 \end{aligned}$$

(b) n が偶数のとき

(a) と同様に示される.

次の命題によって, $M((p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3))$ のホモロジー群が求められる.

命題 4.3

$$\begin{aligned}
 & H_1(M((p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3))) \\
 &= \left\langle A_0^{(1)}, A_0^{(2)}, A_0^{(3)} \left| \begin{array}{l} \Delta_*^{(1)} A_0^{(1)} = \Delta^{(2)} A_0^{(2)} + \Delta^{(3)} A_0^{(3)} \\ \Delta_*^{(2)} A_0^{(2)} = \Delta^{(1)} A_0^{(1)} + \Delta^{(3)} A_0^{(3)} \\ \Delta_*^{(3)} A_0^{(3)} = \Delta^{(1)} A_0^{(1)} + \Delta^{(2)} A_0^{(2)} \end{array} \right. \right\rangle
 \end{aligned}$$

ここで, $\Delta^{(i)}$ は, (p_i, q_i) に対して補題 4.2 で定義された $\Delta_n = \Delta_n^{(i)}$ を用いて,

$$\Delta^{(i)} := \begin{cases} \Delta_{n-1}^{(i)} & n \text{ が奇数,} \\ \Delta_n^{(i)} & n \text{ が偶数.} \end{cases} \quad \Delta_*^{(i)} := \begin{cases} \Delta_n^{(i)} & n \text{ が奇数,} \\ \Delta_{n-1}^{(i)} & n \text{ が偶数.} \end{cases}$$

で定義される.

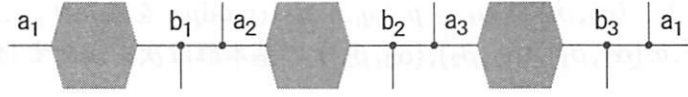


図 11: W_3 -diagram

Proof. はじめに $M = M(W_3)$ の H_1 を考える. DS-diagram $\Delta(W_3)$ が図 11 であるから,

$$H_1(M) = \left\langle a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \left| \begin{array}{l} b_2 + b_3 = a_1 \\ b_3 + b_1 = a_2 \\ b_1 + b_2 = a_3 \end{array} \right. \right\rangle$$

よって, DS-diagram $\Delta(W_3, (p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3))$ の定義 (網掛け部分に $\Delta(p_i, q_i)$ を入れる) によって, $M((p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3))$ の DS-diagram が得られて, 補題 4.2 とあわせて

$$\begin{aligned} & H_1(M((p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3))) \\ &= \left\langle a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, A_0^{(1)}, A_0^{(2)}, A_0^{(3)} \left| \begin{array}{lll} b_2 + b_3 = a_1 & a_1 = F_\alpha^{(1)} & b_1 = F_\gamma^{(1)} \\ b_3 + b_1 = a_2 & a_2 = F_\alpha^{(2)} & b_2 = F_\gamma^{(2)} \\ b_1 + b_2 = a_3 & a_3 = F_\alpha^{(3)} & b_3 = F_\gamma^{(3)} \end{array} \right. \right\rangle \\ &= \left\langle b_1, b_2, b_3, A_0^{(1)}, A_0^{(2)}, A_0^{(3)} \left| \begin{array}{ll} b_2 + b_3 = a_1 = F_\alpha^{(1)} & b_1 = \Delta^{(1)} A_0^{(1)} \\ b_3 + b_1 = a_2 = F_\alpha^{(2)} & b_2 = \Delta^{(2)} A_0^{(2)} \\ b_1 + b_2 = a_3 = F_\alpha^{(3)} & b_3 = \Delta^{(3)} A_0^{(3)} \end{array} \right. \right\rangle \end{aligned}$$

■

4.3 多様体 $M((p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3))$ の Seifert 表示

3次元多様体 $M := M((p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3))$ の Seifert presentation を考える. 命題 3.1 によって, M は 3 本の (p_i, q_i) -type の singular fiber をもつ Seifert manifold なので, $M \cong S = S(S^2, b; (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (\alpha_3, \beta_3))$, $\alpha_i = p_i$ かつ $q_i \beta_i \equiv 1 \pmod{p_i}$ である. よって, 後は obstruction class b を決めればよいことになる. これは, M と S のホモロジー群の relation matrix の行列式を比較することによって決定できる.

定理 4.4 $M = M((p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3))$ に対して, M の Seifert manifold の表示 $M \cong S(S^2, b; (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (\alpha_3, \beta_3))$ は, $\alpha_i = p_i$, $q_i \beta_i \equiv 1 \pmod{p_i}$ であり, obstruction class b は次を満たす整数 b である.

$$|\beta_1 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \beta_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_2 \beta_3 + b \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3| = \det \begin{pmatrix} -\Delta_*^{(1)} & \Delta^{(2)} & \Delta^{(3)} \\ \Delta^{(1)} & -\Delta_*^{(2)} & \Delta^{(3)} \\ \Delta^{(1)} & \Delta^{(2)} & -\Delta_*^{(3)} \end{pmatrix},$$

ここで, $\Delta^{(i)}$ と $\Delta_*^{(i)}$ は, 命題 4.3 で定義されている.

Proof. Prop 3.1 より、 (α_i, β_i) は $\alpha_i = p_i$, $q_i \beta_i \equiv 1 \pmod{p_i}$ を満たす。このとき、Seifert manifold $S = S(S^2, b; (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (\alpha_3, \beta_3))$ の基本群は次を満たす [4]。

$$H_1(S) = \left\langle c_1, c_2, c_3 \left| \begin{array}{l} c_1 + c_2 + c_3 = bh \\ \alpha_1 c_1 + \beta_1 h = 0 \\ \alpha_2 c_2 + \beta_2 h = 0 \\ \alpha_3 c_3 + \beta_3 h = 0 \end{array} \right. \right\rangle$$

よって、 $H_1(S)$ の relation matrix U_S は次のようになる

$$U_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -b \\ \alpha_1 & 0 & 0 & \beta_1 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \beta_3 \end{pmatrix}$$

よって、

$$\det U_S = \beta_1 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \beta_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_2 \beta_3 + b \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \quad (6)$$

一方、命題 4.3 より、 $M = M((p_1, q_1), (p_2, q_2), (p_3, q_3))$ の H_1 は、

$$H_1 = \left\langle a_1, a_2, a_3 \left| \begin{array}{l} \Delta^{(2)} a_2 + \Delta^{(3)} a_3 = \Delta_*^{(1)} a_1 \\ \Delta^{(3)} a_3 + \Delta^{(1)} a_1 = \Delta_*^{(2)} a_2 \\ \Delta^{(1)} a_1 + \Delta^{(2)} a_2 = \Delta_*^{(3)} a_3 \end{array} \right. \right\rangle$$

よって、 $H_1(M)$ の relation matrix U_M は

$$U_M = \begin{pmatrix} -\Delta_*^{(1)} & \Delta^{(2)} & \Delta^{(3)} \\ \Delta^{(1)} & -\Delta_*^{(2)} & \Delta^{(3)} \\ \Delta^{(1)} & \Delta^{(2)} & -\Delta_*^{(3)} \end{pmatrix},$$

よって、 b は、 $|\det U_S| = \det U_M$ の解のうち、整数となる方である。

参考文献

- [1] T.Taniguchi and K.Tsuboi and M.Yamashita, Systematic singular triangulation of all orientable Seifert manifolds, to appear Tokyo J.Math
- [2] V.G.Turaev and O.Y.Viro, State sum invariants of 3-manifolds and quantum $6j$ -symbols, Topology., **31** (1992) p.865-902
- [3] T.Taniguchi, Turaev-Viro invariant of all orientable Seifert manifolds, preprint
- [4] 森元勘治, 3次元多様体入門, 培風館