

Turaev-Viro 不変量について

谷口太聖*

平成 15 年 2 月 10 日

第 1 章は, 山下正勝先生 (東洋大学),
坪井恵子先生 (埼玉獨協高校) との共同研究です.

目次

0	導入	1
1	レンズ空間の DS - diagram	2
1.1	定義	2
1.2	$[1]w(L, R)$ - diagram	3
1.2.1	$[1]w(L, R)$ - diagram は solid torus の DS - diagram である	6
1.2.2	$[1]w(L, R)$ 型 solid torus の基本群	11
1.3	$[1]w(L, R)$ 型 solid torus と q/p 型 fibered solid torus の対応	14
1.4	Lens space の DS - diagram の構成	27
2	Turaev-Viro 不変量	33
2.1	定義	33
2.2	$[1]w(L, R)$ 型 solid torus の Turaev-Viro 不変量	36
2.3	$L(p, q)$ の Turaev-Viro 不変量	45
2.4	$L(p, q)$ の Turaev-Viro 不変量の関係	46
2.4.1	$r = 3$ の場合	46
2.4.2	$r = 4$ の場合	52
3	付録	55
3.1	$T_{[1]w(L, R)}$ と $P_{[1]w(L, R)}$	55
3.2	$L(p, q)$ の Turaev-Viro 不変量を計算するプログラム	62

概要

*E-mail : taiji@math.keio.ac.jp

第1章では、レンズ空間の DS-diagram を構成する。

第2では、1章で得られた DS-diagram から レンズ空間の Turaev-Viro 不変量, を計算するアルゴリズムを示し, 特定のレンズ空間に対する Turaev-Viro 不変量には関係があることを示す。

0 導入

任意の閉3次元多様体 M に対して, $M \cong M(\Delta)$ となる DS-diagram Δ が存在することが知られている. ([Is1]) レンズ空間 $L(p, q)$ の DS-diagram については, $L(p, 1)$ の構成方法が知られている. ([Is2])

Turaev と Viro は閉3次元多様体に対して, 複素数に値をとる位相不変量を定義した. ([TV]) これを Turaev-Viro 不変量 (以後, TV 不変量と書く) という. TV 不変量については, $TV \text{ 不変量} = |\text{Reshetikhin-Turaev 不変量}|^2$ が知られている. ([Tu][Ro]) また, $L(p, q)$ の TV 不変量は, [KL][Ya] によって計算されている.

本論文では, まず, solid torus の DS-diagram の構成方法を示し, 2つの solid torus を貼り合わせて得られる $L(p, q)$ の DS-diagram が, q/p の連分数展開と関係していることを示す.

次に, boundary が3角形分割された solid torus に対する TV 不変量を, ベクトルを用いて新たに定義する. (TV 不変量は閉3次元多様体に対して定義されていた) これは, 初期ベクトル e_1 と M_L -行列, M_R -行列 で定義される. このとき, 2つの solid torus を貼り合わせて得られる $L(p, q)$ の TV 不変量, solid torus に対して定義されたベクトルの内積で計算されることを示す.

また, この方法によって, $L(p, q)$ の TV 不変量, TVO 不変量の関係は, q/p の連分数展開と関係していることが分かった.

同様に Turaev-Viro-Oceanu 不変量についても初期ベクトル e_1 と M_L -行列, M_R -行列 で定義され, $L(p, q)$ の値がベクトルの内積で計算される. 詳しくは, [?] を参照.

本論文後の見通しとして次が挙げられる. $(S^2 - (D^2 \cup D^2 \cup D^2)) \times S^1$, $(S^1 \times S^1 - D^2) \times S^1$ に対して同様に TV 不変量, を定義して, Seifert manifold の TV 不変量を計算することができる. また, solid torus の埋め戻し方を変えることによって, Dhen surgery による TV 不変量の変化を知ることができる.

1 レンズ空間の DS - diagram

1.1 定義

定義 1.1 コンパクトな多面体 F が fake surface であるとは, 任意の点 $x \in F$ に対して, 図1の (i) から (v) のいずれかと同相であるような x の F における開近傍が存在するときをいう. ただし, 各同相写像の下で, x は原点 O と対応しているものとする.

- (i) R^2
- (ii) $(R^2 \times \{0\}) \cup \{(x, y, z) \in R^3 \mid y = 0, z \geq 0\}$
- (iii) $(R^2 \times \{0\}) \cup \{(x, y, z) \in R^3 \mid y = 0, z \geq 0\} \cup \{(x, y, z) \in R^3 \mid x = 0, z \leq 0\}$
- (iv) $R^2_+ = \{(x, y) \in R^2 \mid y \geq 0\}$
- (v) $\{(x, y, 0) \in R^3 \mid x \leq 0\} \cup \{(x, y, z) \in R^3 \mid x \leq 0, y = 0, z \geq 0\}$

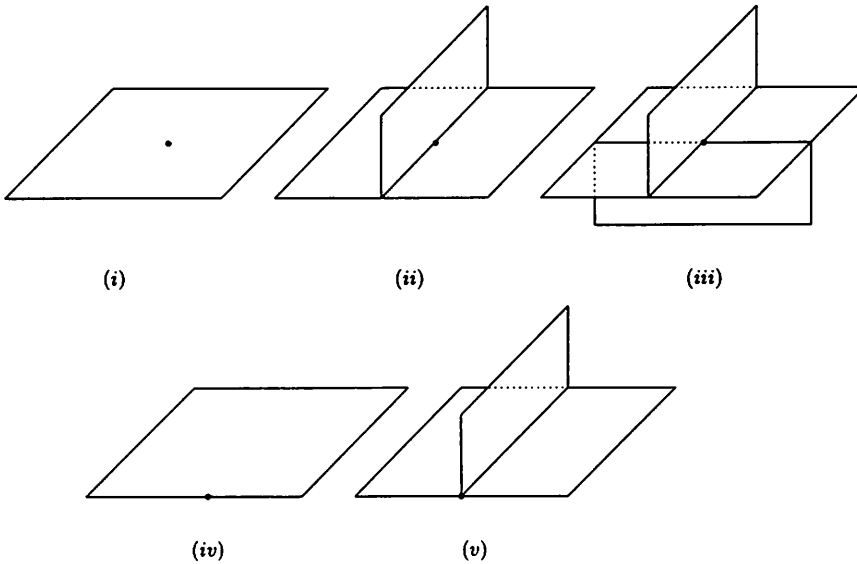


図 1: face surface の条件

定義 1.2 M^3 : compact 3-manifold とする。このとき、 M に埋め込まれた face surface F が次の条件を満たしているとき、special spine P であるという。

1. $\partial M = \phi$ のとき
 - (a) 任意の点 $x \in F$ に対して、次の (i) から (iii) のいずれかと同相であるような x の F における開近傍が存在する。
 - (b) $M - F$ が 1 つの open 3-ball となる。
2. $\partial M \neq \phi$ のとき
 - (a) 任意の点 $x \in F$ に対して、次の (i) から (v) のいずれかと同相であるような x の F における開近傍が存在する。
 - (b) $M - F$ が 1 つの open 3-ball となる。
 - (c) ∂M の各 component C について、 $C - S(F)$ は一つの open 2-disk となる。 ($S(F)$ は F の singularity)

S^2 を 2 次元球面、 G を S^2 に埋め込まれた連結な 3-regular graph、 V_G を G の頂点集合とする。このとき、 S^2 に自然な cell complex $K(G)$ の構造を入れることができる。つまり、

V_G の連結成分を 0-cell, $G - V_G$ の連結成分を 1-cell, $S^2 - G$ の連結成分を 2-cell とする. このとき, 0-cell を vertex, 1-cell を edge, 2-cell を face と呼ぶことにする.

定義 1.3 $\Delta := (S^2, G, f)$ が次の条件を満たしているとき, Δ を **DS-diagram** という.

1. f は S^2 から P 上への連続写像である. ただし, P は *cell complex* の構造を持つ多面体 P で, f は *identification map* という.
2. 写像 $f : K(G) \rightarrow K(P)$ は *cellular* で, $f|_\sigma$ は cell $\sigma \in K(G)$ から cell $K(P)$ への上への同相写像である.
3. $K(P)$ の任意の k -cell に対して, $\#f^{-1}(\lambda^2) = 2$, $\#f^{-1}(\lambda^1) = 3$, $\#f^{-1}(\lambda^0) = 4$, を満たす. ここで $\#f^{-1}(\lambda^k)$ は $f^{-1}(\lambda^k)$ の連結成分である.

注意 1 *DS-diagram* $\Delta = (S^2, G, f)$ が一つ与えられたとする. $\partial B^3 = S^2$ と考えると, *identification map* で貼り合わされた B^3/f は *compact 3-manifold* となる. この *compact 3-manifold* を *DS-diagram* から作られる *manifold* と呼び, $M(\Delta)$ と書く. $\partial B^3/f$ は $M(\Delta)$ に埋め込まれた *special spine* となる.

1.2 [1]w(L, R) - diagram

定義 1.4 [1], L, R, \bar{L}, \bar{R} -*diagram* を次のように定義する.

- 図 2 を [1]-*diagram* とする.
- 図 3 を L -*diagram* とする.
- 図 4 を \bar{L} -*diagram* とする.
- 図 5 を R -*diagram* とする.
- 図 6 を \bar{R} -*diagram* とする.

定義 1.5 操作 L, R, \bar{L}, \bar{R} を次のように定義する.

- D : *diagram* とする. D に操作 L を行った *diagram* とは, D の α, β, γ と L の α', β', γ' を同一視して得られる *diagram* である. これを DL と書く.
- D : *diagram* とする. D に操作 \bar{L} を行った *diagram* とは, D の α, β, γ と \bar{L} の α', β', γ' を同一視して得られる *diagram* である. これを $D\bar{L}$ と書く.
- D : *diagram* とする. D に操作 R を行った *diagram* とは, D の α, β, γ と R の α', β', γ' を同一視して得られる *diagram* である. これを DR と書く.
- D : *diagram* とする. D に操作 \bar{R} を行った *diagram* とは, D の α, β, γ と \bar{R} の α', β', γ' を同一視して得られる *diagram* である. これを $D\bar{R}$ と書く.

[1] に L, R, \bar{L}, \bar{R} を有限回行った *diagram* を [1]w(L, R) - *diagram* と書く.

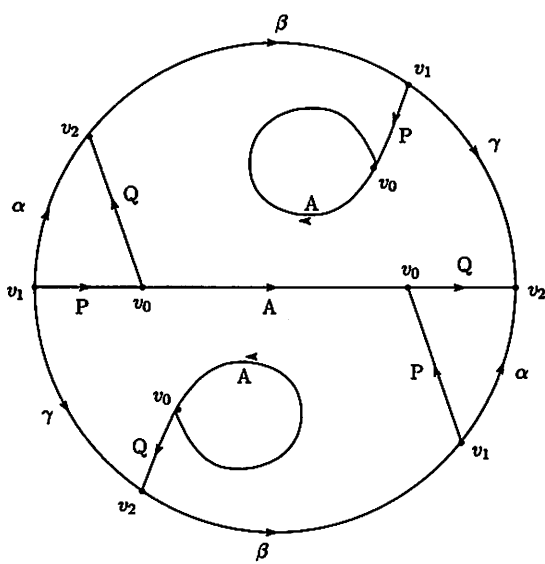


图 2: [1]-diagram

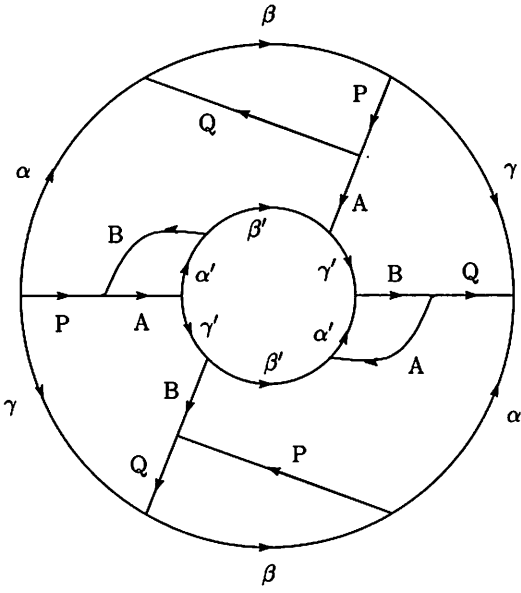


图 3: L -diagram

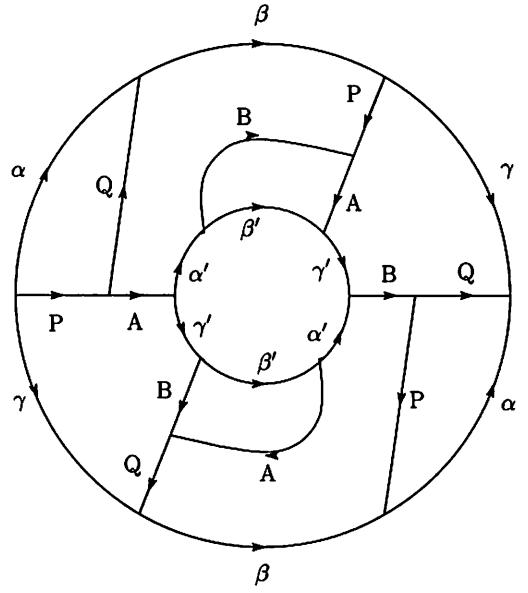


图 4: \bar{L} -diagram

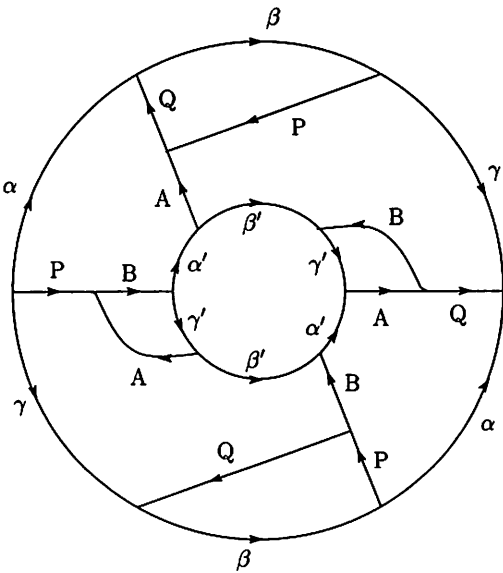


图 5: R -diagram

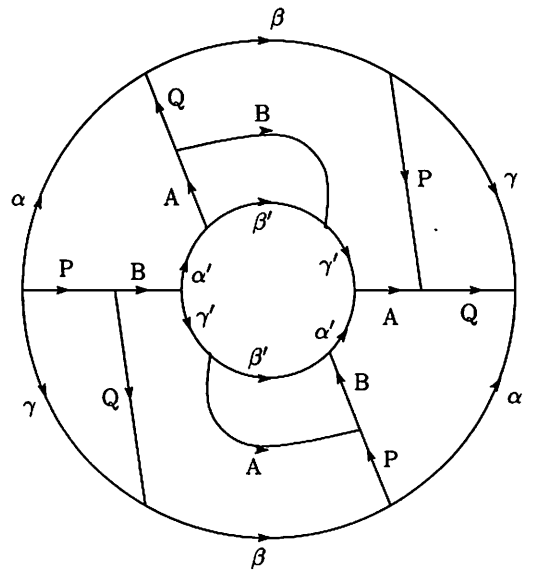


图 6: \bar{R} -diagram

1.2.1 $[1]w(L, R)$ -diagram は solid torus の DS-diagram である

命題 1.1 $[1]w(L, R)$ -diagram は DS-diagram である.

証明. G を $[1]w(L, R)$ -diagram として, S^2 に埋め込まれているとする. G から定まる identification map を f とする. $[1]w(L, R)$ -diagram は, 定義により連結な 3-regular graph である. $[1]w(L, R)$ -diagram が, DS-diagram の定義 1.3 を満たすことを示す.

1. 2-cell に向きと coloring が与えられているので, S^2 から cell complex P への identification map f が定義される.
2. L, R, \bar{L}, \bar{R} -diagram の定義により, f が cellular であり, $f|_{\sigma}$ は cell $\sigma \in K(G)$ から cell $K(P)$ への上への同相写像である.
3. L, R, \bar{L}, \bar{R} -diagram による cell complex P 頂点の近傍は図 7 である.

$[1]w(L, R)$ -diagram から作られる manifold を $M_{[1]w(L, R)} (= B^3/f)$ と書く.

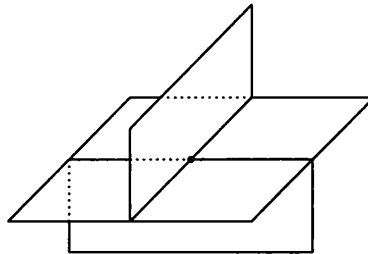


図 7: 頂点の近傍

命題 1.2 $M_{[1]}$ は S^1 に $\text{collaps}(\searrow)$ される.

証明. $M_{[1]}$ を $\partial M_{[1]}$ から collaps すると, 図 8 になる. α, β, γ が free face となっている面を collaps すると, 図 9 になる. 次に, P, Q が, v_1 の free face になっているので, 図 10 のように collaps する. 次に, A_2 が free face となっている面を collaps すると, 図 11 になる. 次に, A_1 が, v_0 の free face になっているので, 図 12 のように collaps する. よって, $M_{[1]}$ が S^1 に collaps された.

命題 1.3 次が成り立つ.

1. $M_{[1]w(L, R)} \searrow S^1 \Rightarrow M_{[1]w(L, R)L} \searrow S^1$
2. $M_{[1]w(L, R)} \searrow S^1 \Rightarrow M_{[1]w(L, R)R} \searrow S^1$
3. $M_{[1]w(L, R)} \searrow S^1 \Rightarrow M_{[1]w(L, R)\bar{L}} \searrow S^1$
4. $M_{[1]w(L, R)} \searrow S^1 \Rightarrow M_{[1]w(L, R)\bar{R}} \searrow S^1$

証明.

1. $M_{[1]w(L,R)L}$ を $\partial M_{[1]w(L,R)L}$ から collaps すると, 図 13 になる. α, β, γ が free face となっている面を collaps すると, 図 14 になる. 次に, P, Q が, v_0, v_1 の free face になっているので, 図 15 のように collaps する. 最後に, BA が free face となっている面を collaps すると, 図 16 になる. $M_{[1]w(L,R)} \searrow S^1$ が仮定されているので, $M_{[1]w(L,R)L} \searrow S^1$ であることが示された.
2. 同様.
3. 同様.
4. 同様.

命題 1.4

$$M_{[1]w(L,R)} \cong D^2 \times S^1$$

証明. $M_{[1]w(L,R)}$ の boundary は,

$$\alpha \beta \gamma \alpha^{-1} \gamma^{-1} \beta^{-1} = (\alpha) (\beta \gamma) (\alpha)^{-1} (\beta \gamma)^{-1}$$

であるから,

$$\partial M_{[1]w(L,R)} \cong S^1 \times S^1$$

である. また, L, R, \bar{L}, \bar{R} -diagram より, $M_{[1]w(L,R)}$ は orientable である. 命題 1.2, 命題 1.3 より, $M_{[1]w(L,R)} \searrow S^1$ であるから, ホワイトヘッドによる正則近傍の一意性の定理 ([Wh]) より, $M_{[1]w(L,R)}$ は solid torus である. ■

以上によって, $[1]w(L, R)$ -diagram は, solid torus の DS-diagram になる. 以後, $[1]w(L, R)$ -diagram から作られる solid torus を $[1]w(L, R)$ 型 solid torus (または, $T_{[1]w(L,R)}$) と書く. また, $[1]w(L, R)$ -diagram によって得られる $T_{[1]w(L,R)}$ に埋め込まれた special spine を $P_{[1]w(L,R)}$ と書く.

つまり, $[1]w(L, R)$ -diagram が ∂B^3 に埋め込まれているとして, $[1]w(L, R)$ -diagram から定まる identification map を f とすると, $B^3/f = T_{[1]w(L,R)}$, $\partial B^3/f = P_{[1]w(L,R)}$ である.

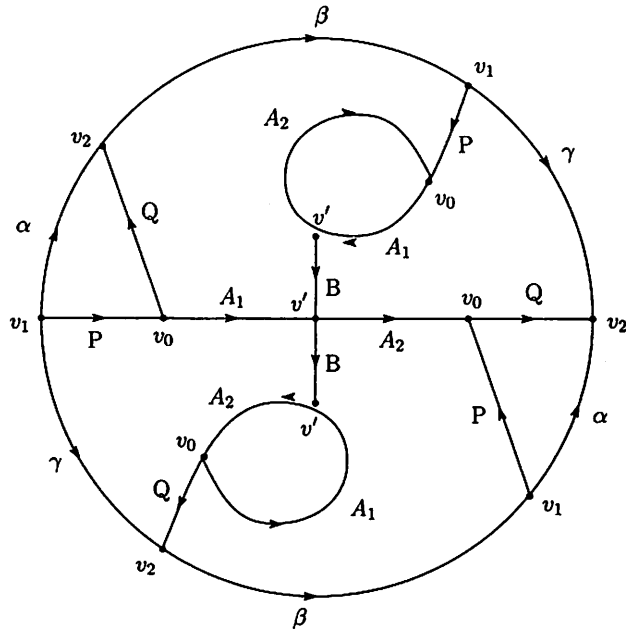


図 8: $M_{[1]}$ の collapsing 第1段階

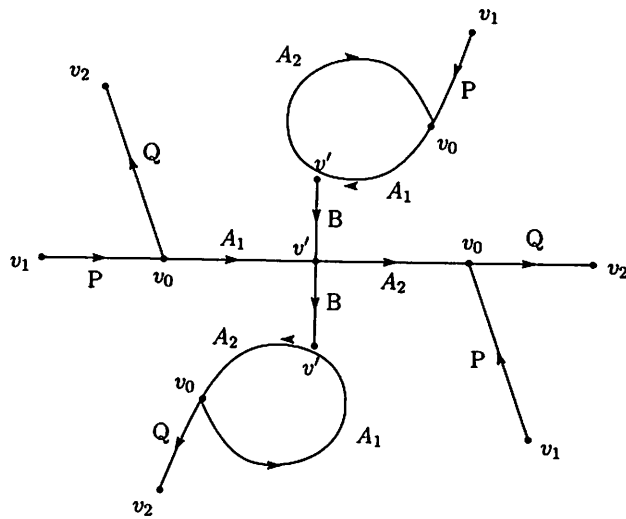


図 9: $M_{[1]}$ の collapsing 第2段階

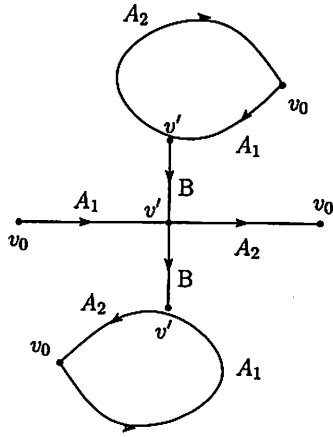


図 10: $M_{[1]}$ の collapsing 第 3 段階

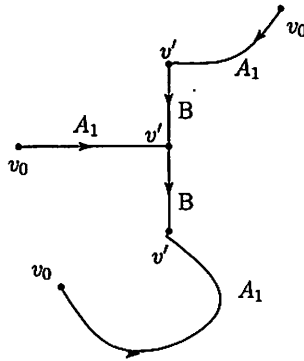


図 11: $M_{[1]}$ の collapsing 第 4 段階



図 12: $M_{[1]}$ の collapsing 第 5 段階

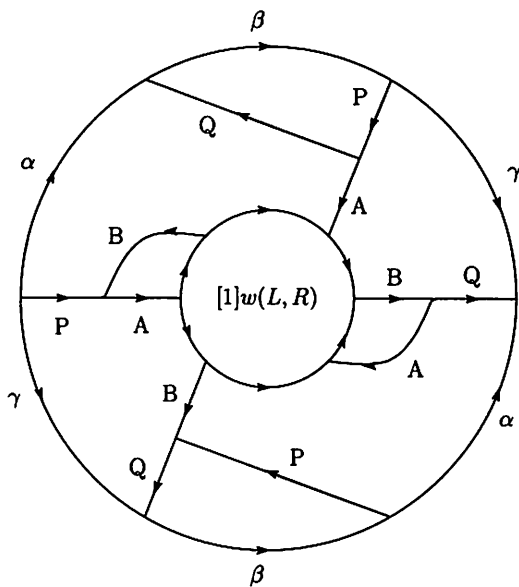


図 13: $M_{[1]w(L,R)}$ の collapsing 第 1 段階

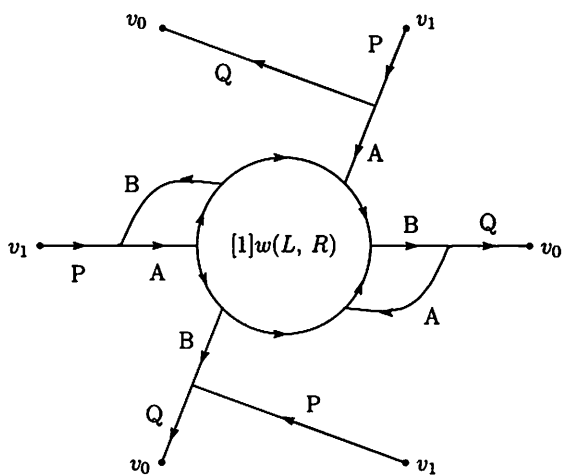


図 14: $M_{[1]w(L,R)}$ の collapsing 第 2 段階

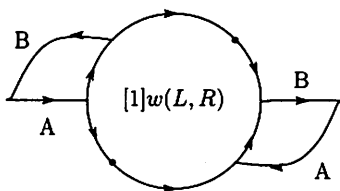


図 15: $M_{[1]w(L,R)}$ の collapsing 第 3 段階

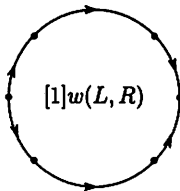


図 16: $M_{[1]w(L,R)}$ の collapsing 第 4 段階

1.2.2 $[1]w(L,R)$ 型 solid torus の基本群

$T_{[1]w(L,R)}$ に埋め込まれた simple closed curve は, special spine の条件 (b) (p.2) によって, $P_{[1]w(L,R)}$ に埋め込まれた simple closed curve に isotopic である. よって, $T_{[1]w(L,R)}$ の基本群と $P_{[1]w(L,R)}$ の基本群は同型である.

命題 1.5 $T_{[1]}$ の基本群は P を生成元とする自由可換群であり, 次が成り立つ.

$$\alpha = P$$

$$\beta = 0$$

$$\gamma = 0$$

証明. $[1]$ -diagram の maximal tree を $Q \cup \beta$ (図 2 (p.4) 参照) とする. v_0 を基点とした基本群を求める. maximal tree に含まれない $[1]$ -diagram の edge を生成元として, face を bound する loop を関係式にして計算すればよい. $\langle\langle \rangle\rangle$ は可換群を表わす.

$$\begin{aligned} \pi_1(T_{[1]}, v_0) &= \langle \alpha, \gamma, P, A \mid P^{-1}\alpha, A\gamma^{-1}PAP^{-1}, A \rangle \\ &= \langle \alpha, P, \gamma \mid P^{-1}\alpha, \gamma^{-1}PP^{-1} \rangle \\ &= \langle\langle P \mid - \rangle\rangle \end{aligned}$$

命題 1.6 $T_{[1]w(L,R)}$ の基本群は一元生成の自由可換群であり, 1, 2, 3, 4 が成り立っている.

$$\alpha', \beta', \gamma' : [1]w(L,R) \text{ の } \alpha, \beta, \gamma$$

$$\alpha, \beta, \gamma : [1]w(L,R)L, R, \bar{L}, \bar{R} \text{ の } \alpha, \beta, \gamma$$

とする.

1. $[1]w(L,R)L$ の場合

$$\alpha = \alpha'$$

$$\beta = 0$$

$$\gamma = -\alpha' + \gamma'$$

2. $[1]w(L, R)R$ の場合

$$\alpha = \alpha' - \gamma'$$

$$\beta = 0$$

$$\gamma = \gamma'$$

3. $[1]w(L, R)\bar{L}$ の場合

$$\alpha = \alpha'$$

$$\beta = 0$$

$$\gamma = \alpha' + \gamma'$$

4. $[1]w(L, R)\bar{R}$ の場合

$$\alpha = \alpha' + \gamma'$$

$$\beta = 0$$

$$\gamma = \gamma'$$

証明.

1. $[1]w(L, R)$ の基本群が、一元生成の自由可換群で次の関係があると仮定する.

$$\pi_1([1]w(L, R), v_2) = \langle\langle G \mid - \rangle\rangle$$

$$\alpha' = mG$$

$$\beta' = 0$$

$$\gamma' = lG$$

このとき、 L -diagram の maximal tree を $Q \cup P \cup A \cup \beta'$ とする (図 17). このとき、

$$\begin{aligned} \pi_1(L, v_2) &= \left\langle \begin{array}{c|c} \alpha', \gamma', B & \alpha'B, B\alpha, \beta, \gamma B^{-1}\gamma'^{-1} \\ \alpha, \beta, \gamma & \alpha'\gamma'\alpha'^{-1}\gamma'^{-1}, \alpha\beta\gamma\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma^{-1} \end{array} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{array}{c|c} \alpha', \gamma', B & \alpha'B, B\alpha, \gamma B^{-1}\gamma'^{-1} \\ \alpha, \gamma & \alpha'\gamma'\alpha'^{-1}\gamma'^{-1}, \alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1} \end{array} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{array}{c|c} \alpha', \gamma', \alpha, \gamma & \alpha'^{-1}\alpha, \gamma\alpha'\gamma'^{-1} \\ & \alpha'\gamma'\alpha'^{-1}\gamma'^{-1}, \alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1} \end{array} \right\rangle \\ &= \langle\langle \alpha', \gamma', \alpha, \gamma \mid -\alpha' + \alpha, \gamma + \alpha' - \gamma' \rangle\rangle \\ \pi_1([1]w(L, R) \cap L, v_2) &= \langle \alpha', \gamma' \mid \alpha'\gamma'\alpha'^{-1}\gamma'^{-1} \rangle \\ &= \langle\langle \alpha', \gamma' \mid - \rangle\rangle \end{aligned}$$

であるから、ザイフェルト・ファンカンペンの定理を用いて $[1]w(L, R)L$ の基本群を求めると、

$$\begin{aligned} & \pi_1([1]w(L, R) \cup L, v_2) \\ &= \langle\langle P, \alpha', \gamma', \alpha, \gamma \mid -\alpha' + \alpha, \gamma + \alpha' - \gamma', \alpha = mG, \gamma' = lG \rangle\rangle \\ &= \langle\langle P, \alpha, \gamma \mid -mG + \alpha, \gamma + mG - lG \rangle\rangle \\ &= \langle\langle P \mid - \rangle\rangle \end{aligned}$$

となり、次の関係が成立している。

$$\begin{aligned} \alpha &= mG \\ &= \alpha' \\ \gamma &= -mG + lG \\ &= -\alpha' + \gamma' \\ \beta &= 0 \end{aligned}$$

- 2. 同様.
- 3. 同様.
- 4. 同様.

命題 1.5 と合わせて、 $[1]w(L, R)L, R, \bar{L}, \bar{R}$ の基本群について、命題の主張が示された。 ■

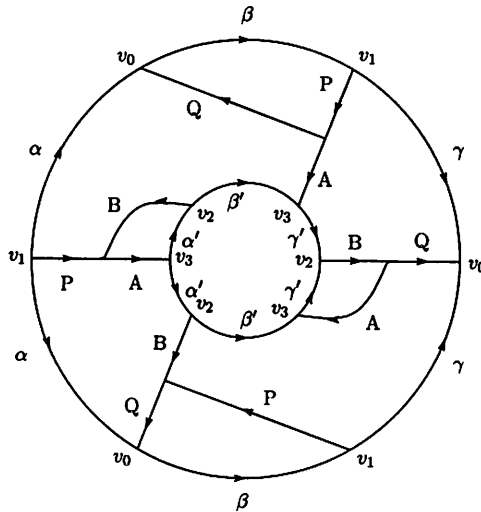


図 17: L -diagram

定理 1.7 自然数の列 $\{a_i\} := \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n\}$ が与えられたとき,

$$\begin{aligned} U(\{a_i\}) &:= \begin{pmatrix} X_\lambda & Y_\lambda & Z_\lambda \\ X_\mu & Y_\mu & Z_\mu \end{pmatrix} \\ &= \begin{cases} U_0 U_L^{a_1} U_R^{a_2} U_L^{a_3} \dots U_L^{a_{n-2}} U_R^{a_{n-1}} U_L^{a_n} & (n : \text{odd}) \\ U_0 U_L^{a_1} U_R^{a_2} U_L^{a_3} \dots U_R^{a_{n-2}} U_L^{a_{n-1}} U_R^{a_n} & (n : \text{even}) \end{cases} \end{aligned}$$

とすると,

- n が奇数のとき

$$\begin{aligned} X_\lambda &= D_{n,n+1}(a_1, \dots, a_n, 1) \\ X_\mu &= D_{n+1,n+2}(0, a_1, \dots, a_n, 1) \\ Y_\lambda &= D_{n+1,n+1}(a_1, \dots, a_n, 1) \\ Y_\mu &= D_{n+2,n+2}(0, a_1, \dots, a_n, 1) \\ Z_\lambda &= D(a_1, \dots, a_n, 1) \\ Z_\mu &= D(0, a_1, \dots, a_n, 1) \\ X_\lambda Y_\mu - X_\mu Y_\lambda &= -1 \end{aligned}$$

- n が偶数のとき

$$\begin{aligned} X_\lambda &= -D_{n+1,n+1}(a_1, \dots, a_n, 1) \\ X_\mu &= -D_{n+2,n+2}(0, a_1, \dots, a_n, 1) \\ Y_\lambda &= -D_{n,n+1}(a_1, \dots, a_n, 1) \\ Y_\mu &= -D_{n+1,n+2}(0, a_1, \dots, a_n, 1) \\ Z_\lambda &= D(a_1, \dots, a_n, 1) \\ Z_\mu &= D(0, a_1, \dots, a_n, 1) \\ X_\lambda Y_\mu - X_\mu Y_\lambda &= -1 \end{aligned}$$

証明. [MY] 参照. ■

$[1]w(L, R)$ -diagram から作られる solid torus $T_{[1]w(L,R)}$ を考える. $x := \alpha\beta$, $y := \beta\gamma$ は $\partial T_{[1]w(L,R)}$ に埋め込まれた loop であり, x と y は互いに一点で交わる loop に isotopic である. また, 命題 1.5, 命題 1.6 により, $T_{[1]w(L,R)}$ の基本群は可換であるから, $[\]$ を代表元を表すとすると,

$$\begin{aligned} x &= [\alpha + \beta] \\ y &= [\beta + \gamma] \end{aligned}$$

である。命題 1.5, 命題 1.6 により $\pi_1(T_{[1]w(L,R)})$ において, $[\beta] = 0$ であるから,

$$x = [\alpha]$$

$$y = [\gamma]$$

である。よって, $\partial T_{[1]w(L,R)}$ に埋め込まれた loop は, 一意に, $m \cdot x + n \cdot y$ ($m, n \in \mathbb{Z}$) と書ける。

命題 1.8 $T_{[1]}$ の meridian は $0 \cdot x + 1 \cdot y$ である。

証明. $T_{[1]}$ の meridian を $m \cdot x + n \cdot y$ とおくと, 命題 1.6 により,

$$\begin{aligned} 0 &= m \cdot x + n \cdot y \\ &= m \cdot [\alpha] + n \cdot [\gamma] \\ &= P \cdot m \end{aligned}$$

$P \neq 0$ より, $(m, n) = (0, 1)$ である。よって, $T_{[1]}$ の meridian は $0 \cdot x + 1 \cdot y$ である。 ■

また, $T_{[1]}$ の longitude を $m \cdot x + n \cdot y$ とおくと, meridian と 1 点で交わることから, $0 \cdot n - 1 \cdot m = \pm 1$ である。よって, $n = 0$, $m = -1$ と決める。

さらに, $z = \gamma \alpha^{-1}$ は $\partial T_{[1]}$ に埋め込まれた loop であから, z を fiber に指定すると, $T_{[1]}$ の fiber 構造 q/p が決まる。

命題 1.9 $T_{[1]}$ は $z = \gamma \alpha^{-1}$ を fiber とすると, $1/1$ 型 fibered solid torus である。

証明.

$$\begin{aligned} z &= [\gamma - \alpha] \\ &= [\gamma] - [\alpha] \\ &= y - x \\ &= y + (-x) \\ &= (-1) \cdot x + 1 \cdot y \\ &= l + m \end{aligned}$$

よって, $z = \gamma \alpha^{-1}$ は, longitude 方向に 1 回, meridian 方向に 1 回周る loop である。よって, z から決まる $T_{[1]}$ の fiber 構造は, $1/1$ 型である。 ■

命題 1.8, 命題 1.9 の結果を行列を用いて書くと次のようになる。 $()^T$ は転置を表す。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^T &= \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}^T U_0 \end{aligned}$$

次に, $[1]w(L, R)$ -diagram の α, β, γ を用いて, $T_{[1]w(L, R)}$ の meridian (m), longitude (l) を求め, $T_{[1]w(L, R)}$ に埋め込まれた loop $z = \gamma\alpha^{-1}$ から決まる fiber 構造を決定する. 命題 1.6 より次の関係が成立する.

1. L -diagram

$$\begin{aligned} x &= [\alpha] = [\alpha'] = [x'] \\ y &= +[\gamma] = [\gamma'] - [\alpha'] = [z'] \\ z &= [\gamma] - [\alpha] = -[\alpha'] + [\gamma'] - [\alpha'] \\ &= -[\alpha'] + ([\gamma'] - [\alpha']) = -[x'] + [z'] \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^T &= \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}^T U_L \end{aligned}$$

2. R -diagram

$$\begin{aligned} x &= [\alpha] = [\alpha'] - [\gamma'] = [x'] - [y'] \\ y &= [\gamma] = [\gamma'] = [y'] \\ z &= [\gamma] - [\alpha] = [\gamma'] - ([\alpha'] - [\gamma']) \\ &= 2[\gamma'] - [\alpha'] = -[x'] + 2[y'] \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^T &= \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}^T U_R \end{aligned}$$

3. \bar{L} -diagram

$$x = [\alpha] = [\alpha'] = [x']$$

$$\begin{aligned}
 y &= [\gamma] = [\alpha'] + [\gamma'] = [x'] + [y'] \\
 z &= [\gamma] - [\alpha] = [\alpha'] + [\gamma'] - [\alpha'] \\
 &= [\gamma'] = [y']
 \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^T &= \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}^T U_{\bar{L}}
 \end{aligned}$$

4. \bar{R} -diagram

$$\begin{aligned}
 x &= [\alpha] = [\alpha'] + [\gamma'] \\
 &= [\alpha'] + [\gamma'] = [x'] + [y'] \\
 y &= +[\gamma] = [\gamma'] = [y'] \\
 z &= [\gamma] - [\alpha] = [\gamma'] - ([\alpha'] + [\gamma']) \\
 &= -[\alpha'] = -[x']
 \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^T &= \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}^T U_{\bar{R}}
 \end{aligned}$$

系 1 自然数の列 $\{a_i\} = \{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n\}$ が与えられたとき,

$$\begin{cases} [1] L^{a_1} R^{a_2} L^{a_3} \dots L^{a_{n-2}} R^{a_{n-1}} L^{a_n} & (n : \text{odd}) \\ [1] L^{a_1} R^{a_2} L^{a_3} \dots R^{a_{n-2}} L^{a_{n-1}} R^{a_n} & (n : \text{even}) \end{cases}$$

型 *solid torus* の *meridian* (m), *longitude* (l) は,

$$\begin{aligned}
 m &= \begin{cases} D_{n+1, n+1}(a_1, \dots, a_n, 1) \cdot x - D_{n, n+1}(a_1, \dots, a_n, 1) \cdot y & (n : \text{odd}) \\ -D_{n, n+1}(a_1, \dots, a_n, 1) \cdot x + D_{n+1, n+1}(a_1, \dots, a_n, 1) \cdot y & (n : \text{even}) \end{cases} \\
 l &= \begin{cases} -D_{n+2, n+2}(0, a_1, \dots, a_n, 1) \cdot x + D_{n+1, n+2}(0, a_1, \dots, a_n, 1) \cdot y & (n : \text{odd}) \\ D_{n+1, n+2}(0, a_1, \dots, a_n, 1) \cdot x - D_{n+2, n+2}(0, a_1, \dots, a_n, 1) \cdot y & (n : \text{even}) \end{cases}
 \end{aligned}$$

証明. 簡単のため次のように書く.

$$\begin{aligned} D &= D(a_1, \dots, a_n, 1) \\ D^* &= D(0, a_1, \dots, a_n, 1) \end{aligned}$$

定理 1.7, 命題 1.8, 命題 1.9 より,

1. n が奇数のとき

[1] $L^{a_1} R^{a_2} L^{a_3} \dots L^{a_{n-2}} R^{a_{n-1}} L^{a_n}$ 型 solid torus の x, y, z は,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}^T U_0 U_L^{a_1} U_R^{a_2} U_L^{a_3} \dots U_L^{a_{n-2}} U_R^{a_{n-1}} U_L^{a_n}$$

である. よって

$$\begin{cases} x = D_{n,n+1} \cdot l + D_{n+1,n+2}^* \cdot m \\ y = D_{n+1,n} \cdot l + D_{n+2,n+2}^* \cdot m \end{cases} \quad (1)$$

$$D_{n,n+1} D_{n+2,n+2}^* - D_{n+1,n+2}^* D_{n+1,n+1} = -1$$

(a) meridian を求める.

$$(1) \leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{D_{n,n+1}} = l + \frac{D_{n+1,n+2}^*}{D_{n,n+1}} \cdot m \\ \frac{y}{D_{n+1,n}} = l + \frac{D_{n+2,n+2}^*}{D_{n+1,n}} \cdot m \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{x}{D_{n,n+1}} - \frac{y}{D_{n+1,n+1}} = \left(\frac{D_{n+1,n+2}^*}{D_{n,n+1}} - \frac{D_{n+2,n+2}^*}{D_{n+1,n}} \right) \cdot m$$

$$\leftrightarrow D_{n+1,n+1} \cdot x - D_{n,n+1} \cdot y = m$$

(b) longitude を求める.

$$\begin{aligned}
 (1) \leftrightarrow & \begin{cases} \frac{x}{D_{n+1,n+2}^*} = \frac{D_{n,n+1}}{D_{n+1,n+2}^*} \cdot l + m \\ \frac{y}{D_{n+2,n+2}^*} = \frac{D_{n+1,n}}{D_{n+2,n+2}^*} \cdot l + m \end{cases} \\
 \rightarrow & \frac{x}{D_{n+1,n+2}^*} - \frac{y}{D_{n+2,n+2}^*} = \left(\frac{D_{n,n+1}}{D_{n+1,n+2}^*} - \frac{D_{n+1,n}}{D_{n+2,n+2}^*} \right) \cdot l \\
 \leftrightarrow & -D_{n+2,n+2}^* \cdot x + D_{n+1,n+2}^* \cdot y = l
 \end{aligned}$$

2. n が偶数のとき

[1] $L^{a_1} R^{a_2} L^{a_3} \dots R^{a_{n-2}} L^{a_{n-1}} R^{a_n}$ 型 solid torus の x, y, z は,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}^T U_0 U_L^{a_1} U_R^{a_2} U_L^{a_3} \dots U_R^{a_{n-2}} U_L^{a_{n-1}} U_R^{a_n}$$

である. よって

$$\begin{cases} x = -D_{n+1,n+1} \cdot l - D_{n+2,n+2}^* \cdot m \\ y = -D_{n,n+1} \cdot l - D_{n+1,n+2}^* \cdot m \\ D_{n+1,n+1} D_{n+1,n+2}^* - D_{n+2,n+2}^* D_{n,n+1} = -1 \end{cases} \quad (2)$$

(a) longitude を求める.

$$\begin{aligned}
 (2) \leftrightarrow & \begin{cases} \frac{x}{D_{n+1,n+1}} = -l + \frac{-D_{n+2,n+2}^*}{D_{n+1,n+1}} \cdot m \\ \frac{y}{D_{n,n+1}} = -l + \frac{-D_{n+1,n+2}^*}{D_{n,n+1}} \cdot m \end{cases} \\
 \rightarrow & \frac{x}{D_{n+1,n+1}} - \frac{y}{D_{n,n+1}} = \left(\frac{-D_{n+2,n+2}^*}{D_{n+1,n+1}} - \frac{-D_{n+1,n+2}^*}{D_{n,n+1}} \right) \cdot m \\
 \leftrightarrow & -D_{n,n+1} \cdot x + D_{n+1,n+1} \cdot y = m
 \end{aligned}$$

(b) longitude を求める.

$$(2) \leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{D_{n+2,n+2}^*} = \frac{-D_{n+1,n+1}}{D_{n+2,n+2}^*} \cdot l - m \\ \frac{y}{D_{n+1,n+2}^*} = \frac{-D_{n,n+1}}{D_{n+1,n+2}^*} \cdot l - m \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{x}{D_{n+2,n+2}^*} - \frac{y}{D_{n+1,n+2}^*} = \left(\frac{-D_{n+1,n+1}}{D_{n+2,n+2}^*} - \frac{-D_{n,n+1}}{D_{n+1,n+2}^*} \right) \cdot l$$

$$\leftrightarrow D_{n+1,n+2}^* \cdot x - D_{n+1,n+2}^* \cdot y = l$$

連分数展開を次のように書く.

$$[k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, k_n] := \frac{1}{k_1 + \frac{1}{k_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{k_n}}}}$$

系 2 互いに素な自然数 $p, q (p > q)$ が与えられた. $\gamma\alpha^{-1} (= z)$ から定まる fiber 構造が, q/p 型となる $[1]w(L, R)$ 型 solid torus の diagram は,

$$q/p = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, 1]$$

と連分数展開したとき,

$$\begin{cases} [1] L^{a_1} R^{a_2} L^{a_3} \dots L^{a_{n-2}} R^{a_{n-1}} L^{a_n} & (n : \text{odd}) \\ [1] L^{a_1} R^{a_2} L^{a_3} \dots R^{a_{n-2}} L^{a_{n-1}} R^{a_n} & (n : \text{even}) \end{cases}$$

である.

証明.

$$q/p = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, 1]$$

と連分数展開したとき,

$$\begin{cases} [1] L^{a_1} R^{a_2} L^{a_3} \dots L^{a_{n-2}} R^{a_{n-1}} L^{a_n} & (n : \text{odd}) \\ [1] L^{a_1} R^{a_2} L^{a_3} \dots R^{a_{n-2}} L^{a_{n-1}} R^{a_n} & (n : \text{even}) \end{cases}$$

型 solid torus の fiber $\gamma\alpha^{-1}(=z)$ は, 定理 1.7 より,

$$z = \begin{cases} D(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, 1) \cdot l + D(0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, 1) \cdot m & (n : \text{odd}) \\ D(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, 1) \cdot l + D(0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, 1) \cdot m & (n : \text{even}) \end{cases}$$

になる. [?]によると,

$$[k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, k_n] = \frac{D(0, k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, k_n)}{D(k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, k_n)}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \frac{D(0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, 1)}{D(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, 1)} &= [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n] \\ &= q/p \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{cases} [1]L^{a_1} R^{a_2} L^{a_3} \dots L^{a_{n-2}} R^{a_{n-1}} L^{a_n} & (n : \text{odd}) \\ [1]L^{a_1} R^{a_2} L^{a_3} \dots R^{a_{n-2}} L^{a_{n-1}} R^{a_n} & (n : \text{even}) \end{cases}$$

型 solid torus は, $\gamma\alpha^{-1}$ を fiber に指定したとき, q/p 型 fibered solid torus となる. ■

例 1 q/p と $[1]w(L, R)$ -diagram の対応は, 表 1, 表 2 のようになる.

注意 3 $[1]L$ 型 solid torus の diagram は図 18 である. これは, solid torus の fiber type を変えないように spine の変形 (i) \leftrightarrow (ii) (図 20, 図 21) を行って図 19 にできる. 表 1 では $[1]L$ -diagram を図 19 としている. よって, $[1]L$ -diagram (図 19) に L を行う (図 22) と図 23 のようになる. これが表 1 の $[1]LL$ である.

例 2 $\partial B^3 = S^2$ に埋め込まれた $[1]w(L, R)$ -diagram の edge, vertex を同一視する写像を $f_{[1]w(L, R)}$ とする. $[1]L, LL, LLL, LLLL, LLR, LLRR$ -diagram から得られる $B^3/f_{[1]w(L, R)} (= T_{[1]w(L, R)})$ と $\partial B^3/f_{[1]w(L, R)} (= P_{[1]w(L, R)})$ は, 3.1(p.56~p.61) の表 33 から表 38 のようになる. 表 33 から表 38 の読み方は表 32(p.55) を参照.

注意 4 第??章の Turaev-Viro 不変量, 第??章の Turaev-Viro-Oceanu 不変量は, spine の変形 (i) \leftrightarrow (ii) (図 20, 図 21) で値が変わらない.

系 3 自然数 n が与えられた. $\gamma\alpha^{-1}$ から定まる fiber 構造が n 型となる $[1]w(L, R)$ 型 solid torus の diagram は $[1]R^{n-1}$ である.

証明.

[94]

$$(U_R)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -n & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから,

$$\begin{aligned} U_0(U_R)^{n-1} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -n+1 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -n+1 & 1 & n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって,

$$z = 1 \cdot l + n \cdot m$$

系 4 自然数 n が与えられた. $\gamma\alpha^{-1}$ から定まる *fiber* 構造が $-n$ 型となる $[1]w(L, R)$ 型 *solid torus* の *diagram* は $[1]\bar{R}^{n+1}$ である.

$$[1]\bar{R}^{n+1}$$

証明.

$$(U_{\bar{R}})^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ n & 1 & 1-n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから,

$$\begin{aligned} U_0(U_{\bar{R}})^{n+1} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ n+1 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ n+1 & 1 & -n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって,

$$z = 1 \cdot l + (-n) \cdot m$$

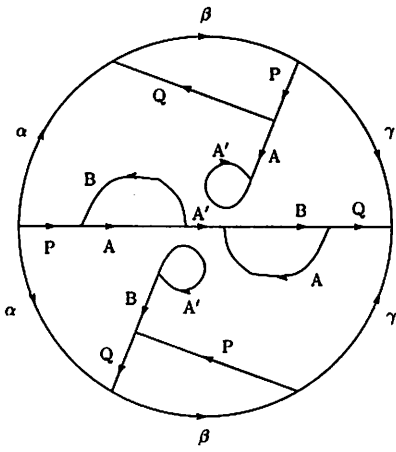


図 18: [1]L-diagram

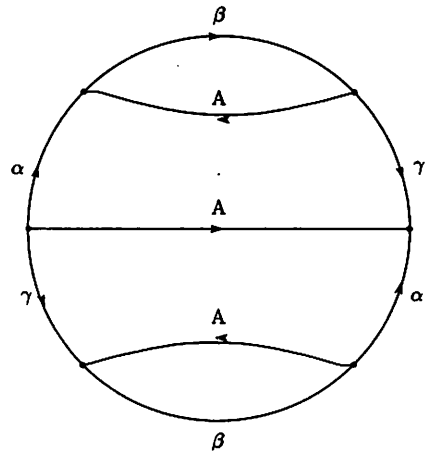


図 19: [1]L-diagram

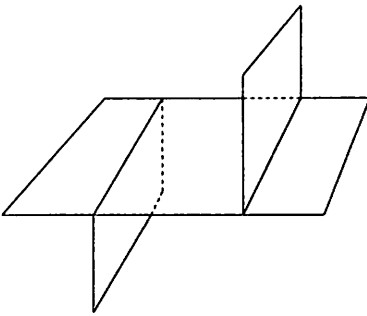


図 20: spine の変形 (i)

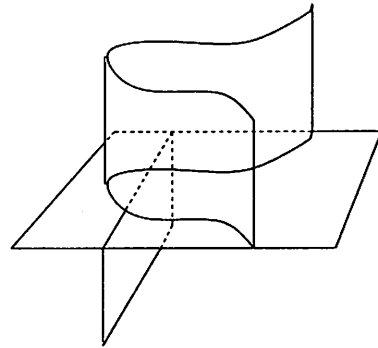


図 21: spine の変形 (ii)

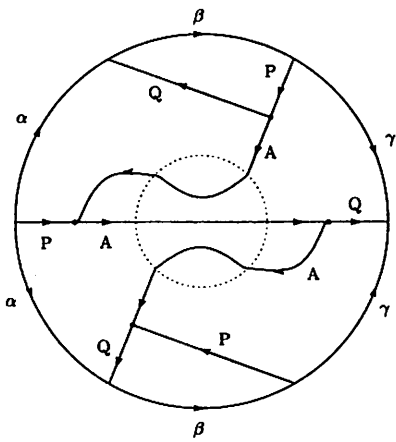


図 22: [1]LL-diagram

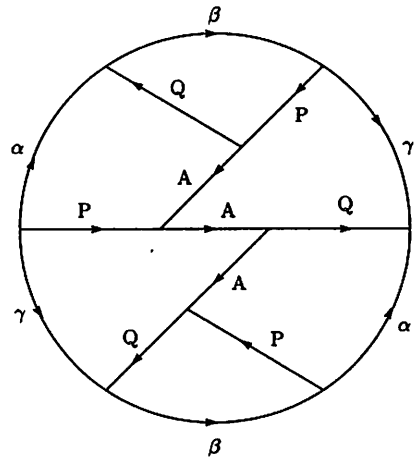
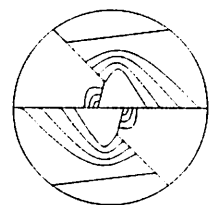
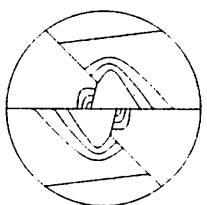
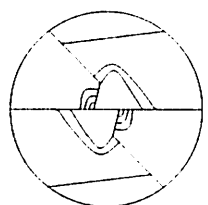
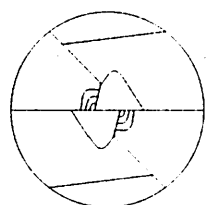
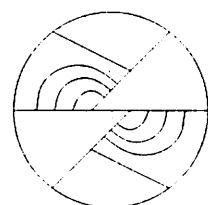
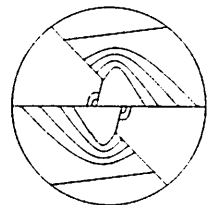
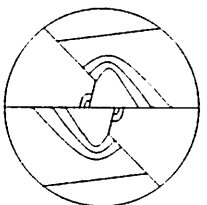
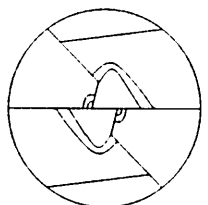
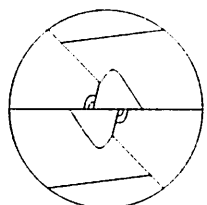
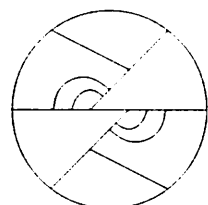
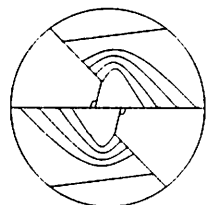
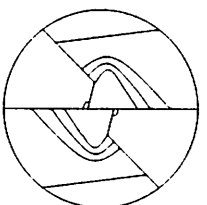
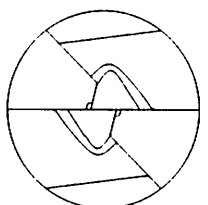
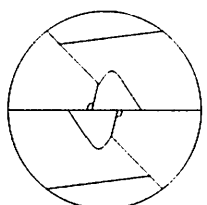
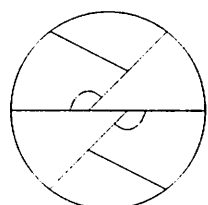
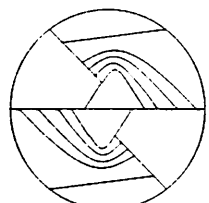
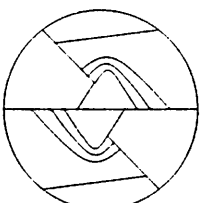
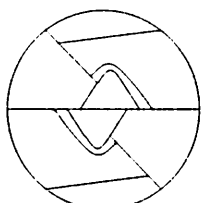
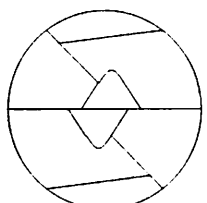
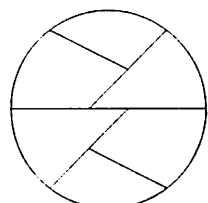


図 23: [1]LL-diagram

表 1: $[1]w(L, R) \leq q/d$

				
$[1]L L L L R R R$ $[5, 4, 1] = 5/26$	$[1]L L L L R R R$ $[5, 3, 1] = 4/21$	$[1]L L L L R R R$ $[5, 2, 1] = 3/16$	$[1]L L L L R$ $[5, 1, 1] = 2/11$	$[1]L L L L L$ $[5, 1] = 1/6$
				
$[1]L L L L R R R$ $[4, 4, 1] = 5/21$	$[1]L L L L R R R$ $[4, 3, 1] = 4/17$	$[1]L L L L R$ $[4, 2, 1] = 3/13$	$[1]L L L L R$ $[4, 1, 1] = 2/9$	$[1]L L L L L$ $[4, 1] = 1/5$
				
$[1]L L L L R R R$ $[3, 4, 1] = 5/16$	$[1]L L L L R R R$ $[3, 3, 1] = 4/13$	$[1]L L L L R$ $[3, 2, 1] = 3/10$	$[1]L L L L R$ $[3, 1, 1] = 2/7$	$[1]L L L L L$ $[3, 1] = 1/4$
				
$[1]L L L R R R R$ $[2, 4, 1] = 5/11$	$[1]L L R R R R$ $[2, 3, 1] = 4/9$	$[1]L L R R R$ $[2, 2, 1] = 3/7$	$[1]L L R R$ $[2, 1, 1] = 2/5$	$[1]L L L L L$ $[2, 1] = 1/3$

					[1]LLRRRR	5/11	
				[1]LLRRR	4/9		
						[1]LLRRRL	7/16
		[1]LLRR	3/7			[1]LLRRLR	8/19
				[1]LLRRL	5/12		
						[1]LLRRLL	7/17
		[1]LLR	2/5			[1]LLRLRR	7/18
				[1]LLRLR	5/13		
						[1]LLRLRL	8/21
		[1]LLRL	3/8			[1]LLRLLR	7/19
				[1]LLRLL	4/11		
						[1]LLRLLL	5/14
		[1]LL	1/3			[1]LLLRRR	4/13
						[1]LLLRRL	5/17
				[1]LLLRR	3/10		
						[1]LLLRLR	5/18
		[1]LLLR	2/7			[1]LLLRL	3/11
						[1]LLLRL	4/15
						[1]LLLRR	3/13
		[1]LLL	1/4			[1]LLLRL	3/14
				[1]LLLRL	2/9		
						[1]LLLLR	2/11
				[1]LLLL	1/5		
						[1]LLLLL	1/6
						[1]LLLLL	1/7

表 2: $[1]w(L, R)$ 型 solid torus と p/q の対応

1.4 Lens space の DS-diagram の構成

$x = \alpha\beta$, $y = \beta\gamma$ は $\partial T_{[1]w(L,R)}$ に埋め込まれた loop であり, isotopic に動かして互いに 1 点で交わるようにできた.

ここで, 2つの solid torus $T_{[1]w(L,R)}$ と $T_{[1]w'(L,R)}$ の貼り合わせ写像が, $\partial T_{[1]w(L,R)}$ の α, β, γ と $\partial T_{[1]w'(L,R)}$ の α', β', γ' を同一視する写像から定義できる. なぜなら, $[1]w(L,R)$ -diagram が DS-diagram であることから, special spine の定義 (c) (p.2) により, $\partial T_{[1]w(L,R)}$ の α, β, γ と $\partial T_{[1]w'(L,R)}$ の α', β', γ' を同一視する写像が $\partial T_{[1]w(L,R)}$ から, $\partial T_{[1]w'(L,R)}$ への同相写像 φ に拡張できるからである.

$T_{[1]w(L,R)}$ と $T_{[1]w'(L,R)}$ を φ で貼り合わせて得られるレンズ空間を, $T_{[1]w(L,R)} \cup T_{[1]w'(L,R)}$ と書く.

命題 1.10

$$T_{[1]w(L,R)} \text{ の meridian} : m = ax + by \quad (3)$$

$$T_{[1]w(L,R)} \text{ の longitude} : l = cx + dy \quad (4)$$

$$T_{[1]w'(L,R)} \text{ の meridian} : m' = a'x' + b'y' \quad (5)$$

$$T_{[1]w'(L,R)} \text{ の longitude} : l' = c'x' + d'y' \quad (6)$$

このとき,

$$T_{[1]w(L,R)} \cup T_{[1]w'(L,R)} \cong L(ba' - ab', ad' - bc')$$

証明.

$$(3), (4) \leftrightarrow \begin{cases} x = dm - bl \\ y = -cm + al \end{cases}$$

$$(5), (6) \leftrightarrow \begin{cases} x' = d'm' - b'l' \\ y' = -c'm' + a'l' \end{cases}$$

である. ここで, α, β, γ と α', β', γ' を同一視するので, $x = x', y = y'$ である. よって,

$$\begin{cases} dm - bl = d'm' - b'l' \\ -cm + al = -c'm' + a'l' \end{cases}$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} adm - abl = ad'm' - ab'l' \\ b(-c)m + bal = b(-c')m' + ba'l' \end{cases}$$

$$\rightarrow (ad - bc)m = (ad' - bc')m' + (ba' - ab')l'$$

$$\leftrightarrow m = (ad' - bc')m' + (ba' - ab')l'$$

よって、得られるレンズ空間は $L(ba' - ab', ad' - bc')$ である。 ■

例 3 $T_{[1]L}$ と $T_{[1]w(L,R)}$ を貼り合わせて得られるレンズ空間 $L(p,q)$ は表 3 のようになる。なぜなら、系 1(p.18) より、 $[1]L$ の *meridian* は $x+y$ であり、命題 1.10 より、

$$T_{[1]L} \cup T_{[1]w(L,R)} \cong L(a' - b', d' - c')$$

であるから。

例 4 $T_{[1]LL}$ と $T_{[1]w(L,R)}$ を貼り合わせて得られるレンズ空間 $L(p,q)$ は表 4 のようになる。なぜなら、系 1(p.18) より、 $[1]LL$ の *meridian* は $2x+y$ であり、命題 1.10 より、

$$T_{[1]LL} \cup T_{[1]w(L,R)} \cong L(a' - 2b', 2d' - c')$$

であるから。

系 5 互いに素な自然数 $p, q (p > q)$ に対して、

$$q/p = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, -1]$$

と連分数展開したとき、

$$L(p, q) \cong \begin{cases} [1]L \cup [1]L^{a_1} R^{a_2} L^{a_3} \dots L^{a_{n-2}} R^{a_{n-1}} L^{a_n} & (n : \text{odd}) \\ [1]L \cup [1]L^{a_1} R^{a_2} L^{a_3} \dots R^{a_{n-2}} L^{a_{n-1}} R^{a_n} & (n : \text{even}) \end{cases}$$

証明. 簡単のため、次のように書く。

$$\begin{aligned} D &:= D(a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, 1) \\ D^* &:= D(0, a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, 1) \end{aligned}$$

1. n が奇数のとき

系 1(p.18) より、 $[1]L$ 型 solid torus の *meridian*(m), *longitude*(l) は次のようになる。

$$\begin{aligned} m &= x + y \\ l &= x \end{aligned}$$

$[1]L^{a_1} R^{a_2} L^{a_3} \dots L^{a_{n-2}} R^{a_{n-1}} L^{a_n}$ 型 solid torus の *meridian*, *longitude* は次のようになる。

$$\begin{aligned} m &= D_{n+1, n+1} \cdot x - D_{n, n+1} \cdot y \\ l &= -D_{n+2, n+2}^* \cdot x + D_{n+1, n+2}^* \cdot y \end{aligned}$$

命題 1.10 より、

$$\begin{aligned} [1]L \cup [1]L^{a_1} R^{a_2} L^{a_3} \dots L^{a_{n-2}} R^{a_{n-1}} L^{a_n} \\ \cong L(D_{n+1, n+1} + D_{n, n+1}, D_{n+1, n+2}^* + D_{n+2, n+2}^*) \end{aligned}$$

2. n が偶数数のとき

系 1(p.18) より, [1]L 型 solid torus の meridian, longitude は次のようになる.

$$m = x + y$$

$$l = x$$

[1] $L^{a_1} R^{a_2} L^{a_3} \dots R^{a_{n-2}} L^{a_{n-1}} R^{a_n}$ 型 solid torus の meridian, longitude は次のようになる.

$$m = D_{n,n+1} \cdot x - D_{n+1,n+1} \cdot y$$

$$l = D_{n+2,n+2}^* \cdot x - D_{n+1,n+2}^* \cdot y$$

命題 1.10 より,

$$\begin{aligned} & [1]L \cup [1]L^{a_1} R^{a_2} L^{a_3} \dots R^{a_{n-2}} L^{a_{n-1}} R^{a_n} \\ & \cong L(-D_{n,n+1} - D_{n+1,n+1}, -D_{n+2,n+2}^* - D_{n+1,n+2}^*) \\ & \cong L(D_{n,n+1} + D_{n+1,n+1}, D_{n+2,n+2}^* + D_{n+1,n+2}^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & D_{n,n+1} + D_{n+1,n+1} \\ & = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & & & & \\ -1 & a_2 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & a_{n-2} & 1 & \\ & & & -1 & a_{n-1} & 1 \\ & & & & -1 & a_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & 1 & & & & \\ -1 & a_2 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & a_{n-2} & 1 & \\ & & & -1 & a_{n-1} & 1 \\ & & & & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ & = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & & & & \\ -1 & a_2 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & a_{n-2} & 1 & \\ & & & -1 & a_{n-1} & 1 \\ & & & & -1 & a_n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & 1 & & & & \\ -1 & a_2 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & a_{n-2} & 1 & \\ & & & -1 & a_{n-1} & 1 \\ & & & & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ & = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & & & & \\ -1 & a_2 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & a_{n-1} & 1 & \\ & & & -1 & a_n & 1 \\ & & & & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} a_1 & 1 & & & & \\ -1 & a_2 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1 & a_{n-1} & 1 & \\ & & & -1 & a_n - 2 & 1 \\ & & & & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= D(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n - 2, 1) \\
&= D(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, -1)
\end{aligned}$$

同様にして次が成立する.

$$\begin{aligned}
D_{n+2,n+2}^* + D_{n+1,n+2}^* &= D(0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n - 2, 1) \\
&= D(0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, -1)
\end{aligned}$$

よって,

$$\frac{D_{n+2,n+2}^* + D_{n+1,n+2}^*}{D_{n,n+1} + D_{n+1,n+1}^*} = \frac{D(0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, -1)}{D(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, -1)} = \frac{q}{p}$$

$D_{n+2,n+2}^* + D_{n+1,n+2}^*, D_{n,n+1} + D_{n+1,n+1}^* \in \mathbb{Z}$ であるから,

$$(D_{n+2,n+2}^* + D_{n+1,n+2}^*, D_{n,n+1} + D_{n+1,n+1}^*) = (p, q), (-p, -q)$$

である. よって,

$$L(D_{n,n+1} + D_{n+1,n+1}^*, D_{n+2,n+2}^* + D_{n+1,n+2}^*) \cong L(p, q)$$

■

表 3: $T_{1L} \cup T_{1L}^{[1]w(L,R)}$

$L(7,3)$	$[1]LLRRR$	$L(5,2)$	$[1]LLRRR$	$L(3,1)$	$[1]LLRR$
$L(2,1)$	$[1]LLRRRL$	$L(2,1)$	$[1]LLRRRL$	$L(2,1)$	$[1]LLRR$
$L(3,1)$	$[1]LLRRLL$	$L(3,1)$	$[1]LLRR$	S^3	$[1]LLR$
$L(5,2)$	$[1]LLRRRL$	$L(3,1)$	$[1]LLRR$	$L(2,1)$	$[1]LLRL$
$L(7,3)$	$[1]LLRRLL$	$L(5,2)$	$[1]LLRLL$	S^3	$[1]LL$
$L(8,3)$	$[1]LLRRR$	$L(4,1)$	$[1]LLRR$	$L(3,1)$	$[1]LLR$
$L(3,1)$	$[1]LLRRRL$	$L(4,1)$	$[1]LLRR$	S^3	$[1]LLR$
$L(5,2)$	$[1]LLRRRL$	$L(3,1)$	$[1]LLRRL$	$L(2,1)$	$[1]LLRL$
$L(8,3)$	$[1]LLRRR$	$L(3,1)$	$[1]LLRRL$	S^3	$[1]LLR$
$L(5,2)$	$[1]LLRRRL$	$L(4,1)$	$[1]LLRR$	$L(2,1)$	$[1]LLRL$
$L(3,1)$	$[1]LLRRRL$	$L(3,1)$	$[1]LLRRL$	S^3	$[1]LLR$
$L(7,2)$	$[1]LLRRRR$	$L(3,1)$	$[1]LLRRL$	$L(2,1)$	$[1]LLRL$
$L(3,1)$	$[1]LLRRRL$	$L(4,1)$	$[1]LLRR$	$L(3,1)$	$[1]LLR$
$L(4,1)$	$[1]LLRRRL$	$L(3,1)$	$[1]LLRRL$	S^3	$[1]LLR$
$L(5,1)$	$[1]LLRRRR$	S^3	$[1]LLRR$	$L(3,1)$	$[1]LLR$
$L(4,1)$	$[1]LLRRRL$	$L(4,1)$	$[1]LLRR$	$L(3,1)$	$[1]LLR$
S^3	$[1]LLRRRL$	$L(4,1)$	$[1]LLRR$	$L(3,1)$	$[1]LLR$
$L(5,1)$	$[1]LLRRLL$	$L(4,1)$	$[1]LLRR$	$L(3,1)$	$[1]LLR$

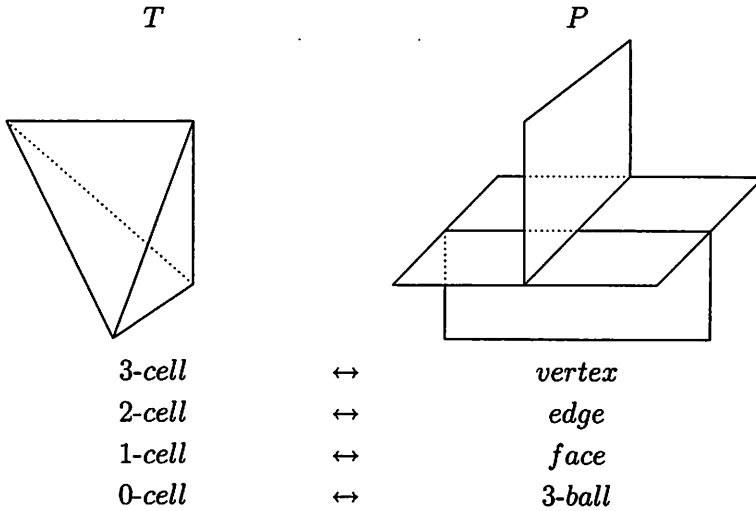
表 4: $T_{[1]LL} \cup T_{[1]w(L,R)}$

$L(4,1)$	$[1]LLLL$				
$L(7,1)$	$[1]LLLR$	$L(3,1)$	$[1]LLLL$		
S	$[1]LLLR$		$L(2,1)$	$[1]LLLL$	
$L(14,3)$	$[1]LLLR$	$L(6,1)$	$[1]LLLR$		S
$L(3,1)$	$[1]LLRL$	S	$[1]LLRL$		$[1]LL$
$L(15,4)$	$[1]LLRL$		$L(5,1)$	$[1]LLRL$	
$L(4,1)$	$[1]LLRR$	$L(11,3)$	$[1]LLRR$		
$L(17,5)$	$[1]LLRR$				$S \times S$
$L(5,2)$	$[1]LLRLL$	$L(2,1)$	$[1]LLRLL$		
$L(14,5)$	$[1]LLRLL$		S	$[1]LLRLL$	
$L(3,1)$	$[1]LLRRL$	$L(11,4)$	$[1]LLRRL$		
$L(21,8)$	$[1]LLRRL$				$L(4,1)$
$L(2,1)$	$[1]LLRRL$	$L(3,1)$	$[1]LLRRL$		
$L(17,7)$	$[1]LLRRL$		$L(8,3)$	$[1]LLRRL$	
$L(5,2)$	$[1]LLRRLL$	$L(12,5)$	$[1]LLRRLL$		
$L(16,7)$	$[1]LLRRRR$				

2 Turaev-Viro 不変量

2.1 定義

M を閉 3 次元多様体とする. M の 3 角形分割 T に対して, 次のように対応させた 2 次元複体を T の dual P という.



定義 2.1 閉 3 次元多様体 M が与えられた. その 3 角形分割 T を一つ決める. 自然数 $r (r \geq 3)$ を固定し, P の face (T の 1-cell) に, $\{0, 1, 2, \dots, r-2\}$ の coloring σ を行う. このとき, 次の量が triangulation T によらず位相不変量となる. $[TV][?]$

$$TV_{M^3} = \sum_{\sigma} \prod_{v,e,f} \frac{TET(v|\sigma) \Delta_{\sigma(f)}^{\chi(f)}}{\theta(e|\sigma)^{\chi(e)}}$$

定義式は, P の vertex(v), edge(e), face(f) について決まる TET , θ , Δ による値を, P の全ての v, e, f について積をとり, 以下の条件を満たす coloring σ について和をとるという意味である.

• σ

- 次の条件を満たす P の face から, $\{0, 1, 2, \dots, r-2\}$ への写像.
- T の 0-cell に接する 3 本の 1-cell (P の face) の coloring a, b, c が次の条件を満たす. (この条件を r -admissible と呼ぶ)

1. $a + b + c \equiv 0 \pmod{2}$
2. $-a + b + c \geq 0$

3. $a - b + c \geq 0$
4. $a + b - c \geq 0$
5. $a + b + c \leq 2r - 4$

- $\Delta_\sigma(f)$

- coloring σ に対して, P の face に与えられる量
- P の face が $n (\in \{0, 1, 2, \dots, r-2\})$ で coloring されているとき, 次の漸化式によって決まる値

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1} &= d\Delta_n - \Delta_{n-1} \\ \Delta_0 &= 0 \\ \Delta_{-1} &= 1 \end{aligned} \quad \begin{aligned} d &= -A^2 - A^{-2} \\ A &= e^{i\pi/2r} \end{aligned}$$

- $\chi(f)$

- f のオイラー数

- $\theta(e|\sigma)$

- coloring σ に対して, P の edge に与えられる量
- P の edge に接している 3 つの face の coloring a, b, c から決まる値

$$\begin{aligned} \theta(a, b, c) &= \frac{(-1)^{m+n+p} [m+n+p+1]! [n]! [m]! [p]!}{[m+n]! [n+p]! [p+m]!} \\ m &= \frac{1}{2}(a+b-c) \\ n &= \frac{1}{2}(-a+b+c) \\ p &= \frac{1}{2}(a-b+c) \\ [n] &= (-1)^{n-1} \Delta_{n-1} \\ [n]! &:= [n][n-1] \cdots [2][1] \end{aligned}$$

- $\chi(e)$

- e のオイラー数

- $TET(v|\sigma)$

- coloring σ に対して, P の vertex に与えられる量
- P の vertex の dual である tetrahedron に対して決まる値

$$\begin{aligned}
 &= TET \begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \end{bmatrix} \\
 &= \frac{\tau!}{\epsilon!} \sum_{m \leq s \leq M} \frac{(-1)^s [s+1]!}{\prod_i [s - a_i]! \prod_j [b_j - s]!}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau! &= \prod_{i,j} [b_j - a_i]! & b_1 &= \frac{1}{2}(b + d + e + f) \\
 \epsilon! &= [a]![b]![c]![d]![e]![f]! & b_2 &= \frac{1}{2}(a + c + e + f) \\
 a_1 &= \frac{1}{2}(a + d + e) & b_3 &= \frac{1}{2}(a + b + c + d) \\
 a_2 &= \frac{1}{2}(b + c + e) & m &= \max\{a_i\} \\
 a_3 &= \frac{1}{2}(a + b + f) & M &= \min\{b_i\} \\
 a_4 &= \frac{1}{2}(c + d + f)
 \end{aligned}$$

T の四面体に 6-j symbol (式 (7)) と呼ばれる次の量を与える。これが四面体対称性, Orthogonality Identity (式 (8)), Pentagon Identity (式 (9)) を満たす。式 (8) は, spine (3 三角形分割の dual) の基本変形 (i) \leftrightarrow (ii) (図 24, 図 25) に対応し, 式 (9) は (iii) \leftrightarrow (iv) (図 26, 図 27) に対応しているので位相不変量となる。

$$\frac{TET \begin{bmatrix} a & b & i \\ c & d & j \end{bmatrix} \Delta_i}{\theta(a, d, i)\theta(b, c, i)} = \left\{ \begin{matrix} a & b & i \\ c & d & j \end{matrix} \right\} \quad (7)$$

$$\sum_i \left\{ \begin{matrix} a & b & i \\ c & d & j \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} d & a & k \\ b & c & i \end{matrix} \right\} = \delta_{kj} \quad (8)$$

$$\sum_{m=0}^{r-1} \left\{ \begin{matrix} a & i & m \\ d & e & j \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} b & c & l \\ d & m & i \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} b & l & k \\ e & a & m \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} b & c & k \\ j & a & i \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k & c & l \\ d & e & j \end{matrix} \right\} \quad (9)$$

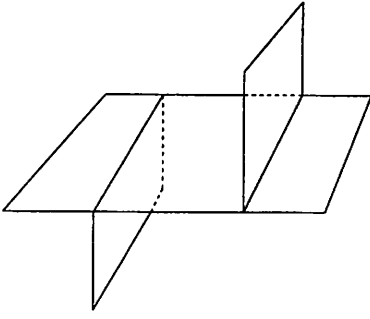


図 24: spine の変形 (i)

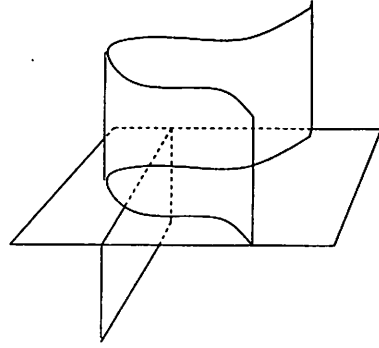


図 25: spine の変形 (ii)

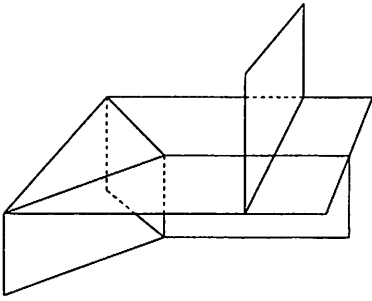


図 26: spine の変形 (iii)

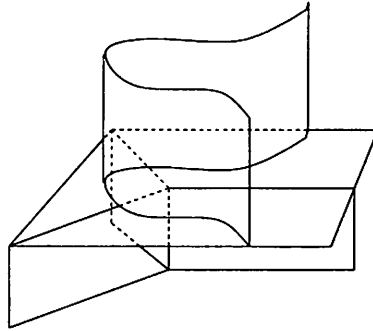


図 27: spine の変形 (iv)

2.2 $[1]w(L, R)$ 型 solid torus の Turaev-Viro 不変量

定義 2.2 自然数 $r (r \geq 3)$ を決めて, α, β, γ で bound されている $P_{[1]w(L,R)}$ の face の coloring をそれぞれ a, b, c , と固定したとき, $T_{[1]w(L,R)}$ の Turaev-Viro 不変量を $TV_{[1]w(L,R),r}(a, b, c)$ と書く. さらに,

$$\widetilde{TV}_{[1]w(L,R),r}(a, b, c) := TV_{[1]w(L,R),r}(a, b, c)\theta(a, b, c)$$

と定義する.

命題 2.1

$$\widetilde{TV}_{[1],r}(c, b, b) = \sum_k \frac{TET \begin{bmatrix} b & k & b \\ b & c & b \end{bmatrix} \Delta_k \Delta_b \Delta_c}{\theta(k, b, b) \theta(c, b, b)} \quad (10)$$

証明. [1]-diagram は図 28 であり, v_0 の近傍は図 29 である. よって, $P_{[1]}$ には, 頂点 v_0 , 面 k , 面 b , 面 c , 辺 A , 辺 P , 辺 Q があり, これらに対する値は次のようになる.

頂点 v_0	...	TET	$\begin{bmatrix} b & k & b \\ b & c & b \end{bmatrix}$
面 k	...		Δ_k
面 b	...		Δ_b
面 c	...		Δ_c
辺 A	...		$\theta(k, b, b)$
辺 P	...		$\theta(c, b, b)$
辺 Q	...		$\theta(c, b, b)$

よって,

$$\begin{aligned} \widetilde{TV}_{[1],r}(c, b, b) &= \sum_k \frac{TET \begin{bmatrix} b & k & b \\ b & c & b \end{bmatrix} \Delta_k \Delta_b \Delta_c}{\theta(k, b, b) \theta(c, b, b) \theta(c, b, b)} \theta(c, b, b) \\ &= \sum_k \frac{TET \begin{bmatrix} b & k & b \\ b & c & b \end{bmatrix} \Delta_k \Delta_b \Delta_c}{\theta(k, b, b) \theta(c, b, b)} \end{aligned}$$

命題 2.2

$$\begin{aligned} &\widetilde{TV}_{[1]w(L,R)L,r}(a, b, c) \\ &= \sum_k \widetilde{TV}_{[1]w(L,R),r}(k, a, c) \times \frac{TET \begin{bmatrix} k & c & a \\ b & c & a \end{bmatrix} \Delta_b}{\theta(a, k, c) \theta(a, b, c)} \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &\widetilde{TV}_{[1]w(L,R)R,r}(a, b, c) \\ &= \sum_k \widetilde{TV}_{[1]w(L,R),r}(a, c, k) \times \frac{TET \begin{bmatrix} k & c & a \\ b & c & a \end{bmatrix} \Delta_b}{\theta(a, k, c) \theta(a, b, c)} \end{aligned} \tag{12}$$

証明. (11) を示す.

[1] $w(L, R)L$ -diagram は図 30 であり, 頂点 v_1 の近傍は図 31 である. 辺 A (つまり, [1] $w(L, R)$ -diagram の 辺 P) は, $\widetilde{TV}_{[1]w(L,R),r}(k, a, c)$ の値に含まれているので, L を行ったことに

よって頂点 v_1 , 面 b , 辺 B , 辺 P , 辺 Q が増えた. これらに対する値は次のようになる.

$$\begin{aligned} \text{頂点 } v_1 &\cdots TET \begin{bmatrix} k & c & a \\ b & c & a \end{bmatrix} \\ \text{面 } b &\cdots \Delta_b \\ \text{辺 } B &\cdots \theta(a, k, c) \\ \text{辺 } P &\cdots \theta(a, b, c) \\ \text{辺 } Q &\cdots \theta(a, b, c) \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} &\widetilde{TV}_{[1]w(L,R)L,\tau}(a, b, c) \\ &= \sum_k \widetilde{TV}_{[1]w(L,R),\tau}(k, a, c) \times \frac{TET \begin{bmatrix} k & c & a \\ b & c & a \end{bmatrix} \Delta_b}{\theta(a, k, c) \theta(a, b, c) \theta(a, b, c)} \theta(a, b, c) \\ &= \sum_k \widetilde{TV}_{[1]w(L,R),\tau}(k, a, c) \times \frac{TET \begin{bmatrix} k & c & a \\ b & c & a \end{bmatrix} \Delta_b}{\theta(a, k, c) \theta(a, b, c)} \end{aligned}$$

(12) も同様に示せる.

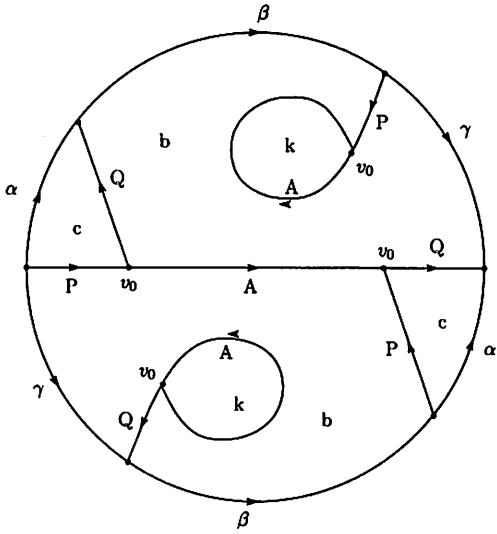


図 28: [1]-diagram

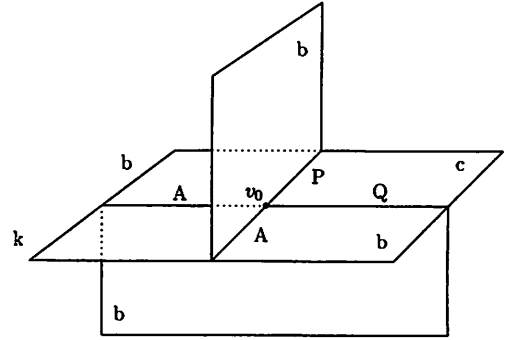


図 29: v_0 の近傍

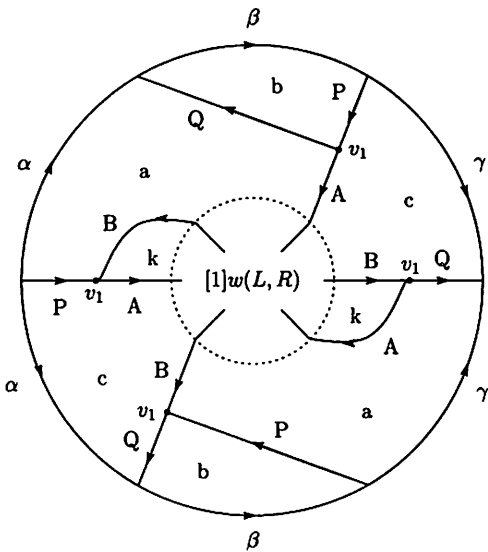


図 30: $[1]w(L, R)L$ -diagram

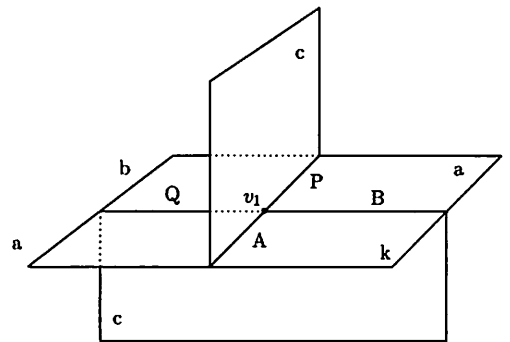


図 31: v_1 の近傍

命題 2.1, 命題 2.2 を, $r = 3$ の場合で計算する.

$\widetilde{TV}_{[1]w(L,R)L,3}(a, b, c)$ は admissible の条件 (p.33) により,

$$(a, b, c) = (0, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)$$

の場合のみ値を持つ.

- 命題 2.1 について

$$\widetilde{TV}_{[1]w(L,R),3}(0, 0, 0) = 1$$

$$\widetilde{TV}_{[1]w(L,R),3}(0, 1, 1) = 1$$

$$\widetilde{TV}_{[1]w(L,R),3}(1, 0, 1) = 0$$

$$\widetilde{TV}_{[1]w(L,R),3}(1, 1, 0) = 0$$

- 命題 2.2 について

$$\widetilde{TV}_{[1]w(L,R)L,3}(0, 0, 0) = \widetilde{TV}_{[1]w(L,R),3}(0, 0, 0) \times A(0, 0, 0, 0)$$

$$\widetilde{TV}_{[1]w(L,R)L,3}(0, 1, 1) = \widetilde{TV}_{[1]w(L,R),3}(1, 0, 1) \times A(0, 1, 1, 1)$$

$$\widetilde{TV}_{[1]w(L,R)L,3}(1, 0, 1) = \widetilde{TV}_{[1]w(L,R),3}(0, 1, 1) \times A(1, 0, 1, 1)$$

$$\widetilde{TV}_{[1]w(L,R)L,3}(1, 1, 0) = \widetilde{TV}_{[1]w(L,R),3}(1, 1, 0) \times A(1, 1, 0, 1)$$

となる. ここで

$$A(a, b, c, k) := \frac{TE T \begin{bmatrix} k & c & a \\ b & c & a \end{bmatrix} \Delta_b}{\theta(a, b, c) \theta(a, k, c)}$$

と書いた.

$\widetilde{TV}_{[1]w(L,R),3}(a, b, c)$ の値を成分とするベクトル (式 (13)) を, $\mathbf{T}_{[1]w(L,R)}$ の Turaev-Viro 不変量 ($r = 3$ のとき) と定義する. $()^T$ は転置を意味する.

$$\widetilde{TV}_{[1]w(L,R),3} := \begin{pmatrix} \widetilde{TV}_{[1]w(L,R),3}(0, 0, 0) \\ \widetilde{TV}_{[1]w(L,R),3}(0, 1, 1) \\ \widetilde{TV}_{[1]w(L,R),3}(1, 0, 1) \\ \widetilde{TV}_{[1]w(L,R),3}(1, 1, 0) \end{pmatrix}^T \quad (13)$$

以上の計算より,

$$\widetilde{TV}_{[1],3} = \begin{pmatrix} \widetilde{TV}_{[1]}(0,0,0) \\ \widetilde{TV}_{[1]}(0,1,1) \\ \widetilde{TV}_{[1]}(1,0,1) \\ \widetilde{TV}_{[1]}(1,1,0) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T$$

であり, $\widetilde{TV}_{[1],3}$ を \mathbf{e}_1 と書くことにする. また,

$$\begin{pmatrix} \widetilde{TV}_{[1]w(L,R)L,3}(0,0,0) \\ \widetilde{TV}_{[1]w(L,R)L,3}(0,1,1) \\ \widetilde{TV}_{[1]w(L,R)L,3}(1,0,1) \\ \widetilde{TV}_{[1]w(L,R)L,3}(1,1,0) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \widetilde{TV}_{[1]w(L,R),3}(0,0,0) \\ \widetilde{TV}_{[1]w(L,R),3}(0,1,1) \\ \widetilde{TV}_{[1]w(L,R),3}(1,0,1) \\ \widetilde{TV}_{[1]w(L,R),3}(1,1,0) \end{pmatrix}^T \cdot M_L$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{TV}_{[1]w(L,R)R,3}(0,0,0) \\ \widetilde{TV}_{[1]w(L,R)R,3}(0,1,1) \\ \widetilde{TV}_{[1]w(L,R)R,3}(1,0,1) \\ \widetilde{TV}_{[1]w(L,R)R,3}(1,1,0) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \widetilde{TV}_{[1]w(L,R),3}(0,0,0) \\ \widetilde{TV}_{[1]w(L,R),3}(0,1,1) \\ \widetilde{TV}_{[1]w(L,R),3}(1,0,1) \\ \widetilde{TV}_{[1]w(L,R),3}(1,1,0) \end{pmatrix}^T \cdot M_R$$

を満たす行列を M_L , M_R と定義すると,

$$M_L = \begin{pmatrix} A_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_R = \begin{pmatrix} A_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_3 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ここで,

$$\begin{aligned} A_0 &:= A(0,0,0,0) & A_1 &:= A(0,1,1,1) \\ A_2 &:= A(1,0,1,1) & A_3 &:= A(1,1,0,1) \end{aligned}$$

と書いた. また, 行列 H を次のように定義する.

$$H := \begin{pmatrix} H_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

同様にして $r = 4$ のとき, e_1, M_L, M_R, H を次のように定義する.

$$\begin{aligned}
 e_1 &:= \begin{pmatrix} \widetilde{TV}_{[1,4]}(0,0,0) \\ \widetilde{TV}_{[1,4]}(0,1,1) \\ \widetilde{TV}_{[1,4]}(1,0,1) \\ \widetilde{TV}_{[1,4]}(1,1,0) \\ \widetilde{TV}_{[1,4]}(2,1,1) \\ \widetilde{TV}_{[1,4]}(1,2,1) \\ \widetilde{TV}_{[1,4]}(1,1,2) \\ \widetilde{TV}_{[1,4]}(0,2,2) \\ \widetilde{TV}_{[1,4]}(2,0,2) \\ \widetilde{TV}_{[1,4]}(2,2,0) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^T \\
 M_L &:= \begin{pmatrix} A_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 & 0 & C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_4 & 0 & 0 & C_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_R &:= \begin{pmatrix} A_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 & 0 & C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_4 & 0 & 0 & C_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_2 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 H &:= \begin{pmatrix} H_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_9 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$H_0 = \frac{1}{\Delta_0 \Delta_0 \Delta_0}$$

$$H_3 = \frac{1}{\Delta_1 \Delta_1 \Delta_0}$$

$$H_6 = \frac{1}{\Delta_1 \Delta_1 \Delta_2}$$

$$H_9 = \frac{1}{\Delta_2 \Delta_2 \Delta_0}$$

$$H_1 = \frac{1}{\Delta_0 \Delta_1 \Delta_1}$$

$$H_4 = \frac{1}{\Delta_2 \Delta_1 \Delta_1}$$

$$H_7 = \frac{1}{\Delta_0 \Delta_2 \Delta_2}$$

$$H_2 = \frac{1}{\Delta_1 \Delta_0 \Delta_1}$$

$$H_5 = \frac{1}{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_1}$$

$$H_8 = \frac{1}{\Delta_2 \Delta_0 \Delta_2}$$

$$A_0 = 1$$

$$A_3 = 1$$

$$B_1 = 1$$

$$B_4 = \frac{1}{\Delta_2}$$

$$C_1 = -\frac{1}{\Delta_2}$$

$$C_4 = -\frac{1}{\Delta_1}$$

$$A_1 = 1$$

$$A_4 = \frac{1}{\Delta_1}$$

$$B_2 = \frac{1}{\Delta_2}$$

$$C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$$

$$A_2 = \frac{1}{\Delta_1}$$

$$B_3 = \frac{1}{\Delta_2}$$

$$C_3 = -\frac{1}{\Delta_2}$$

(a,b,c)	k=0	k=1	k=2
(0,0,0)	A_0	0	0
(0,1,1)	0	A_1	0
(1,0,1)	A_2	0	A_4
(1,1,0)	0	A_3	0
(0,2,2)	0	0	B_1
(2,0,2)	B_2	0	
(2,2,0)	0	0	B_3
(2,1,1)	0	C_1	0
(1,2,1)	C_2	0	C_4
(1,1,2)	0	C_3	0

表 5: $A(a, b, c, k)$ の値

	Δ_0	Δ_1	Δ_2
$r = 3$	1	-1	
$r = 4$	1	$-\sqrt{2}$	1

表 6: Δ_i の値

2.3 $L(p, q)$ の Turaev-Viro 不変量

$T_{[1]w(L,R)}$ と $T_{[1]w'(L,R)}$ を貼り合わせて得られるレンズ空間の Turaev-Viro 不変量を $TV_{[1]w(L,R) \cup [1]w'(L,R)}$ と書く.

定理 2.3 自然数 $r (r \geq 3)$ に対して, 初期ベクトル e_1 , 行列 M_L, M_R, H が定まり, $T_{[1]w(L,R)}$ と $T_{[1]w'(L,R)}$ を貼り合わせて得られるレンズ空間の Turaev-Viro 不変量は次のようになる.

$$TV_{[1]w(L,R) \cup [1]w'(L,R)} = \langle e_1 w(M_R, M_L), e_1 w'(M_R, M_L) \cdot H \rangle_r$$

\cdot : 行列の積
 \langle, \rangle : 内積

証明. $r = 3$ の場合を示す.

$\widetilde{TV}_{[1]w(L,R),3}$ は, e_1, M_L, M_R の定義により, $[1]$ に e_1 , L に M_L , R に M_R , を対応させた行列の積を求めればよい. つまり,

$$\widetilde{TV}_{[1]w(L,R),3} = e_1 w(M_L, M_R)$$

である.

次に $L(p, q) \cong T_{[1]w(L,R)} \cup T_{[1]w'(L,R)}$ の Turaev-Viro 不変量を求める.

定義より, 共通の coloring の $TV_{[1]w(L,R)}(a, b, c)$ の値をかけて, 和をとればよい. ただし, 辺については, $\widetilde{TV}_{[1]w(L,R)}(a, b, c)$ の定義により, $P_{[1]w(L,R)}$ において, 辺 P または 辺 Q の一方しか数えていないので, $P_{[1]w(L,R)} \cup P_{[1]w'(L,R)}$ において, すべての辺を一度だけ数えたことになる. 面については, $P_{[1]w(L,R)}, P_{[1]w'(L,R)}$ で面 a, b, c を一度づつ数えているので, $\Delta_a \Delta_b \Delta_c$ で割る. これは, 行列 H をかけることに対応する.

よって, レンズ空間 $T_{[1]w(L,R)} \cup T_{[1]w'(L,R)}$ の Turaev-Viro 不変量は内積を用いて次のようになる.

$$TV_{[1]w(L,R) \cup [1]w'(L,R)} = \left\langle \begin{pmatrix} \widetilde{TV}_{[1]w(L,R),3}(0,0,0) \\ \widetilde{TV}_{[1]w(L,R),3}(0,1,1) \\ \widetilde{TV}_{[1]w(L,R),3}(1,0,1) \\ \widetilde{TV}_{[1]w(L,R),3}(1,1,0) \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} \widetilde{TV}_{[1]w'(L,R),3}(0,0,0) \\ \widetilde{TV}_{[1]w'(L,R),3}(0,1,1) \\ \widetilde{TV}_{[1]w'(L,R),3}(1,0,1) \\ \widetilde{TV}_{[1]w'(L,R),3}(1,1,0) \end{pmatrix}^T \cdot H \right\rangle$$

$$H = \begin{pmatrix} H_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_3 \end{pmatrix} \quad H_0 = \frac{1}{\Delta_0 \Delta_0 \Delta_0} \quad H_1 = \frac{1}{\Delta_0 \Delta_1 \Delta_1}$$

$$H_2 = \frac{1}{\Delta_1 \Delta_0 \Delta_1} \quad H_3 = \frac{1}{\Delta_1 \Delta_1 \Delta_0}$$

一般の r も同様に示せる. ■

系 5 (p.28), 定理 2.3 から, $L(p, q)$ の Turaev-Viro 不変量を求めるアルゴリズムが得られる. これを Mathematica によるプログラムで実現したものが?? (p.62, p.63) である. このプログラムを用いて計算を実行した.

• $r = 3$ のとき

$mod\ 4$	$TV_{L(p,1),3}$	$mod\ 4$	$TV_{L(p,1),3}$
$p \equiv 0$	2	$p \equiv 1$	1
$p \equiv 2$	0	$p \equiv 3$	1

• $r = 4$ のとき

$mod\ 16$	$TV_{L(p,1),4}$	$mod\ 16$	$TV_{L(p,1),4}$
$p \equiv 0$	4	$p \equiv 1$	1
$p \equiv 2$	$2 - \sqrt{2}$	$p \equiv 3$	1
$p \equiv 4$	2	$p \equiv 5$	1
$p \equiv 6$	$2 + \sqrt{2}$	$p \equiv 7$	1
$p \equiv 8$	0	$p \equiv 9$	1
$p \equiv 10$	$2 + \sqrt{2}$	$p \equiv 11$	1
$p \equiv 12$	2	$p \equiv 13$	1
$p \equiv 14$	$2 - \sqrt{2}$	$p \equiv 15$	1

注意 5 $S^2 \times S^1 := L(0, 1)$, $S^3 := L(1, 1)$ とする

2.4 $L(p, q)$ の Turaev-Viro 不変量の関係

2.4.1 $r = 3$ の場合

命題 2.4 $w'(L, R) = w'_1 w'_2$ に対して, レンズ空間

$$\begin{aligned} & T_{[1]w(L,R)} \cup T_{[1]w'(L,R)} \\ & T_{[1]w(L,R)} \cup T_{[1]w'_1 L^4 w'_2} \\ & T_{[1]w(L,R)} \cup T_{[1]w'_1 R^4 w'_2} \end{aligned}$$

の Turaev-Viro 不変量 ($r = 3$) の値は等しい. つまり,

$$\begin{aligned} TV_{[1]w(L,R) \cup [1]w'(L,R),3} &= TV_{[1]w(L,R) \cup [1]w'_1 L^4 w'_2,3} \\ &= TV_{[1]w(L,R) \cup [1]w'_1 R^4 w'_2,3} \end{aligned}$$

[118]

証明. $r = 3$ のとき $\Delta_1 = -1$ であるから,

$$M_L M_L M_L M_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Delta_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Delta_1^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$M_R M_R M_R M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Delta_1^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\Delta_1^2} \end{pmatrix} = E$$

よって,

$$\begin{aligned} TV_{[1]w(L,R) \cup [1]w'(L,R)} &= \langle e_1 w(M_L, M_R), e_1 w'(M_L, M_R) H \rangle \\ &= \langle e_1 w(M_L, M_R), e_1 w'_1 M_L^4 w'_2 H \rangle \\ &= \langle e_1 w(M_L, M_R), e_1 w'_1 M_R^4 w'_2 H \rangle \end{aligned}$$

命題 2.5 $w'(L, R) = w'_1 w'_2$ に対して, レンズ空間

$$\begin{aligned} T_{[1]w(L,R)} \cup T_{[1]w'_1 LLRRw'_2} \\ T_{[1]w(L,R)} \cup T_{[1]w'_1 RLLw'_2} \end{aligned}$$

の *Turaev-Viro* 不変量 ($r = 3$) の値は等しい. つまり,

$$TV_{[1]w(L,R) \cup [1]w'_1 LLRRw'_2, 3} = TV_{[1]w(L,R) \cup [1]w'_1 RLLw'_2, 3}$$

証明.

$$M_L M_L M_R M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_R M_R M_L M_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

よって,

$$\begin{aligned}
 & TV_{[1]w(L,R) \cup [1]w'_1 L L R R w'_2} \\
 &= \langle e_1 w(M_L, M_R), e_1 w'_1 M_L M_L M_R M_R w'_2 H \rangle \\
 &= \langle e_1 w(M_L, M_R), e_1 w'_1 M_R M_R M_L M_L w'_2 H \rangle \\
 &= TV_{[1]w(L,R) \cup [1]w'_1 R R L L w'_2}
 \end{aligned}$$

■

命題 2.4 において, $w(L, R) = L$ とすると次が得られる.

系 6 互いに素な自然数 $p, q (p > q)$ が与えられ,

$$q/p = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, -1]$$

と連分数展開する.

このとき, 任意の自然数 $k (1 \leq k \leq n)$ と, 任意の自然数 $a_k^1, a_k^2 (a_k^1 + a_k^2 = a_k)$ に対して, $L(p, q), L(p', q'), L(p'', q'')$ の *Turaev-Viro* 不変量 ($r = 3$) は等しい.

$$\begin{aligned}
 q'/p' &= [a_1, a_2, \dots, a_k^1, 4, a_k^2, \dots, a_{n-1}, a_n, -1] \\
 q''/p'' &= [a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k + 4, a_{k+1}, \dots, a_{n-1}, a_n, -1]
 \end{aligned}$$

証明.

$$q/p = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, -1]$$

であるから, 系 5 (p.28) より,

$$L(p, q) \cong \begin{cases} [1]L \cup [1]L^{a_1} R^{a_2} L^{a_3} \dots L^{a_{n-2}} R^{a_{n-1}} L^{a_n} & (n : \text{odd}) \\ [1]L \cup [1]L^{a_1} R^{a_2} L^{a_3} \dots R^{a_{n-2}} L^{a_{n-1}} R^{a_n} & (n : \text{even}) \end{cases}$$

であり, 定理 2.3 (p.45) より,

$$TV_{L(p,q)} = \begin{cases} \langle e_1 M_L, e_1 M_L^{a_1} M_R^{a_2} M_L^{a_3} \dots M_L^{a_{n-2}} M_R^{a_{n-1}} M_L^{a_n} H \rangle & (n : \text{odd}) \\ \langle e_1 M_L, e_1 M_L^{a_1} M_R^{a_2} M_L^{a_3} \dots M_R^{a_{n-2}} M_L^{a_{n-1}} M_R^{a_n} H \rangle & (n : \text{even}) \end{cases}$$

である. $w'(L, R) = w'_1 w'_2$ に対して, $w'_1 w'_2$ から $w'_1 M_L^4 w'_2$ の置き換えは次の 4 通りの場合がある.

1. $\dots M_L \cdot M_L M_L M_L M_L \cdot M_L \dots$ のとき
 $[a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k + 4, a_{k+1}, \dots, a_{n-1}, a_n, -1]$ となる.
2. $\dots M_L \cdot M_L M_L M_L M_L \cdot M_R \dots$ のとき
 $[a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k + 4, a_{k+1}, \dots, a_{n-1}, a_n, -1]$ となる.

3. $\cdots M_R \cdot M_L M_L M_L M_L \cdot M_L \cdots$ のとき

$[a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k + 4, a_{k+1}, \dots, a_{n-1}, a_n, -1]$ となる.

4. $\cdots M_R \cdot M_L M_L M_L M_L \cdot M_R \cdots$ のとき

$[a_1, a_2, \dots, a_k^1, 4, a_k^2, \dots, a_{n-1}, a_n, -1]$ となる.

よって, $L(p, q), L(p', q'), L(p'', q'')$, の値は等しい. ■

命題 2.5 において, $w(L, R) = L$ とすると次が得られる.

系 7 互いに素な自然数 $p, q (p > q)$ が与えられ,

$$q/p = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, -1]$$

と連分数展開する.

このとき, 任意の自然数 $k (1 \leq k \leq n)$ と, 任意の自然数 $a_k^1, a_k^2 (a_k^1 + a_k^2 = a_k)$ に対して, $L(p', q'), L(p'', q''), L(p''', q'''), L(p''', q''')$ の *Turaev-Viro* 不変量 ($r = 3$) は等しい.

$$q'/p' = [a_1, a_2, \dots, a_k, 2, 2, a_{k+1}, \dots, a_{n-1}, a_n, -1]$$

$$q''/p'' = [a_1, a_2, \dots, a_k + 2, a_{k+1} + 2, \dots, a_{n-1}, a_n, -1]$$

$$q'''/p''' = [a_1, a_2, \dots, a_k^1, 2, a_k^2 + 2, a_{k+1}, \dots, a_{n-1}, a_n, -1]$$

$$q''''/p'''' = [a_1, a_2, \dots, a_k^1 + 2, 2, a_k^2, a_{k+1}, \dots, a_{n-1}, a_n, -1]$$

証明.

$$q/p = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, -1]$$

であるから, 系 5 (p.28) より,

$$L(p, q) \cong \begin{cases} [1]L \cup [1]L^{a_1} R^{a_2} L^{a_3} \cdots L^{a_{n-2}} R^{a_{n-1}} L^{a_n} & (n : \text{odd}) \\ [1]L \cup [1]L^{a_1} R^{a_2} L^{a_3} \cdots R^{a_{n-2}} L^{a_{n-1}} R^{a_n} & (n : \text{even}). \end{cases}$$

であり, 定理 2.3 より,

$$TV_{L(p,q)} = \begin{cases} \langle e_1 M_L, e_1 M_L^{a_1} M_R^{a_2} M_L^{a_3} \cdots M_L^{a_{n-2}} M_R^{a_{n-1}} M_L^{a_n} H \rangle & (n : \text{odd}) \\ \langle e_1 M_L, e_1 M_L^{a_1} M_R^{a_2} M_L^{a_3} \cdots M_R^{a_{n-2}} M_L^{a_{n-1}} M_R^{a_n} H \rangle & (n : \text{even}) \end{cases}$$

である. $w'(L, R) = w'_1 w'_2$ に対して, $w'_1 w'_2$ から $w'_1 M_L^2 M_R^2 w'_2$ の置き換えは次の 4 通りの場合がある.

1. $\cdots M_L \cdot M_L^2 M_R^2 \cdot M_L \cdots$ のとき

$[a_1, a_2, \dots, a_k^1 + 2, 2, a_k^2, a_{k+1}, \dots, a_{n-1}, a_n, -1]$ となる.

2. $\cdots M_L \cdot M_L^2 M_R^2 \cdot M_R \cdots$ のとき
 $[a_1, a_2, \dots, a_k + 2, a_{k+1} + 2, \dots, a_{n-1}, a_n, -1]$ となる
3. $\cdots M_R \cdot M_L^2 M_R^2 \cdot M_L \cdots$ のとき
 $[a_1, a_2, \dots, a_k, 2, 2, a_{k+1}, \dots, a_{n-1}, a_n, -1]$ となる
4. $\cdots M_R \cdot M_L^2 M_R^2 \cdot M_R \cdots$ のとき
 $[a_1, a_2, \dots, a_k^1, 2, a_k^2 + 2, a_{k+1}, \dots, a_{n-1}, a_n, -1]$ となる

よって、 $L(p', q')$, $L(p'', q'')$, $L(p''', q''')$, $L(p'''' , q'''')$ の値は等しい。 $w'_1 w'_2$ から $w'_1 M_R^2 M_L^2 w'_2$ の置き換えの場合も同様。 ■

例 5 系 6, 系 7 から得られる Turaev-Viro ($r = 3$) 不変量の関係

- $S^2 \times S^1$ と等しいもの。

$S^2 \times S^1$ は $L(0, 1)$ と考える。 $1/0 = [1, -1]$ であるから、

- $[1, 4, -1] = 3/4$ より, $L(4, 3)$
- $[5, -1] = 1/4$ より, $L(4, 1)$
- $[5, 4, -1] = 3/16$ より, $L(16, 3)$
 - * $[3, 2, 2, 2, -1] = 7/24$ より, $L(24, 7)$
 - * $[3, 4, 2, -1] = 5/16$ より, $L(16, 5)$
 - * $[1, 2, 4, 2, -1] = 11/16$ より, $L(16, 11)$
 - * $[1, 2, 2, 2, 2, -1] = 17/24$ より, $L(24, 17)$
- $[9, -1] = 1/8$ より, $L(8, 1)$

- S^3 と等しいもの

S^3 は $L(1, 1)$ と考える。 $1/1 = [2, -1]$ であるから、

- $[2, 4, -1] = 3/7$ より, $L(7, 3)$
- $[6, -1] = 1/5$ より, $L(5, 1)$
- $[6, 4, -1] = 3/19$ より, $L(19, 3)$
 - * $[4, 2, 2, 2, -1] = 7/31$ より, $L(31, 7)$
 - * $[4, 4, 2, -1] = 5/21$ より, $L(21, 5)$
 - * $[2, 2, 4, 2, -1] = 11/27$ より, $L(27, 11)$
 - * $[2, 2, 2, 2, 2, -1] = 17/41$ より, $L(41, 17)$

$$- [10, -1] = 1/9 \text{ より, } \boxed{L(9,1)}$$

- $\boxed{L(2,1)}$ と等しいもの

$1/2 = [3, -1]$ であるから,

$$- [3, 4, -1] = 3/10 \text{ より, } \boxed{L(10,3)}$$

$$* [1, 2, 2, 2, -1] = 7/10 \text{ より, } \boxed{L(10,7)}$$

$$* [1, 4, 2, -1] = 5/6 \text{ より, } \boxed{L(6,5)}$$

$$- [7, -1] = 1/6 \text{ より, } \boxed{L(6,1)}$$

$$- [7, 4, -1] = 3/22 \text{ より, } \boxed{L(22,3)}$$

$$* [5, 2, 2, 2, -1] = 7/38 \text{ より, } \boxed{L(38,7)}$$

$$* [5, 4, 2, -1] = 5/26 \text{ より, } \boxed{L(26,5)}$$

$$* [3, 2, 4, 2, -1] = 11/38 \text{ より, } \boxed{L(38,11)}$$

$$* [3, 2, 2, 2, 2, -1] = 17/58 \text{ より, } \boxed{L(58,17)}$$

$$- [11, -1] = 1/10 \text{ より, } \boxed{L(10,1)}$$

- $\boxed{L(3,1)}$ と等しいもの

$1/3 = [4, -1]$ であるから,

$$- [4, 4, -1] = 3/13 \text{ より, } \boxed{L(13,3)}$$

$$* [2, 2, 2, 2, -1] = 7/17 \text{ より, } \boxed{L(17,7)}$$

$$* [2, 4, 2, -1] = 5/11 \text{ より, } \boxed{L(11,5)}$$

$$- [8, -1] = 1/7 \text{ より, } \boxed{L(7,1)}$$

$$- [8, 4, -1] = 3/25 \text{ より, } \boxed{L(25,3)}$$

$$* [6, 2, 2, 2, -1] = 7/45 \text{ より, } \boxed{L(45,7)}$$

$$* [6, 4, 2, -1] = 5/31 \text{ より, } \boxed{L(31,5)}$$

$$* [4, 2, 4, 2, -1] = 11/49 \text{ より, } \boxed{L(49,11)}$$

$$* [4, 2, 2, 2, 2, -1] = 17/75 \text{ より, } \boxed{L(75,17)}$$

$$- [12, -1] = 1/11 \text{ より, } \boxed{L(11,1)}$$

2.4.2 $r = 4$ の場合

命題 2.6 $w'(L, R) = w'_1 w'_2$ に対して, レンズ空間

$$\begin{aligned} & T_{[1]w(L,R)} \cup T_{[1]w'(L,R)} \\ & T_{[1]w(L,R)} \cup T_{[1]w'_1 L^{16} w'_2} \\ & T_{[1]w(L,R)} \cup T_{[1]w'_1 R^{16} w'_2} \end{aligned}$$

の Turaev-Viro 不変量 ($r = 4$) の値は等しい. つまり,

$$\begin{aligned} TV_{[1]w(L,R) \cup [1]w'(L,R),4} &= TV_{[1]w(L,R) \cup [1]w'_1 L^{16} w'_2,4} \\ &= TV_{[1]w(L,R) \cup [1]w'_1 R^{16} w'_2,4} \end{aligned}$$

証明.

$$M_L^{16} = M_R^{16} = E$$

であるから,

$$\begin{aligned} & TV_{[1]w(L,R) \cup [1]w'(L,R)} \\ &= \langle e_1 w(M_L, M_R), e_1 w'(M_L, M_R) H \rangle \\ &= \langle e_1 w(M_L, M_R), e_1 w'_1 M_L^{16} w'_2 H \rangle \\ &= \langle e_1 w(M_L, M_R), e_1 w'_1 M_R^{16} w'_2 H \rangle \end{aligned}$$

命題 2.7 $w'(L, R) = w'_1 w'_2$ に対して, レンズ空間

$$\begin{aligned} & T_{[1]w(L,R)} \cup T_{[1]w'_1 LLRRw'_2} \\ & T_{[1]w(L,R)} \cup T_{[1]w'_1 RLLw'_2} \end{aligned}$$

の Turaev-Viro 不変量 ($r = 4$) の値は等しい. つまり,

$$TV_{[1]w(L,R) \cup [1]w'_1 LLRRw'_2,4} = TV_{[1]w(L,R) \cup [1]w'_1 RLLw'_2,4}$$

証明.

$$M_L M_L M_R M_R = M_R M_R M_L M_L =$$

(124)

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって,

$$\begin{aligned} & TV_{[1]w(L,R) \cup [1]w'_1 LLRRw'_2} \\ &= \langle e_1 w(M_L, M_R), e_1 w'_1 M_L M_L M_R M_R w'_2 H \rangle \\ &= \langle e_1 w(M_L, M_R), e_1 w'_1 M_R M_R M_L M_L w'_2 H \rangle \\ &= TV_{[1]w(L,R) \cup [1]w'_1 RRLLw'_2} \end{aligned}$$

命題 2.6 において, $w(L, R) = L$ とすると次が得られる.

系 8 互いに素な自然数 $p, q (p > q)$ が与えられ,

$$p/q = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, -1]$$

と連分数展開する.

このとき, 任意の自然数 $k (1 \leq k \leq n)$ と, 任意の自然数 $a_k^1, a_k^2 (a_k^1 + a_k^2 = a_k)$ に対して, $L(p, q), L(p', q'), L(p'', q'')$ の Turaev-Viro 不変量 ($r = 4$) は等しい.

$$\begin{aligned} p'/q' &= [a_1, a_2, \dots, a_k^1, 16, a_k^2, \dots, a_{n-1}, a_n, -1] \\ p''/q'' &= [a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k + 16, a_{k+1}, \dots, a_{n-1}, a_n, -1] \end{aligned}$$

証明. 系 6 (p.48) と同様.

命題 2.7 において, $w(L, R) = L$ とすると次が得られる.

系 9 互いに素な自然数 $p, q (p > q)$ が与えられ,

$$p/q = [a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, -1]$$

と連分数展開する.

このとき, 任意の自然数 $k (1 \leq k \leq n)$ と, 任意の自然数 $a_k^1, a_k^2 (a_k^1 + a_k^2 = a_k)$ に対して, $L(p', q'), L(p'', q''), L(p''', q'''), L(p''', q''')$ の *Turaev-Viro* 不変量 ($r = 4$) は等しい.

$$\begin{aligned} p'/q' &= [a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2, 2, a_k, \dots, a_{n-1}, a_n, -1] \\ p''/q'' &= [a_1, a_2, \dots, a_k + 2, a_{k+1} + 2, \dots, a_{n-1}, a_n, -1] \\ p'''/q''' &= [a_1, a_2, \dots, a_k^1, 2, a_k^2 + 2, a_{k+1}, \dots, a_{n-1}, a_n, -1] \\ p''''/q'''' &= [a_1, a_2, \dots, a_k^1 + 2, 2, a_k^2, a_{k+1}, \dots, a_{n-1}, a_n, -1] \end{aligned}$$

証明. 系 7 と同様. ■

例 6 系 8, 系 9 から得られる *Turaev-Viro* 不変量 ($r = 4$) の関係

等号は不変量の値が等しいという意味である.

つまり, 「 $L(p, q) = L(p', q')$ 」 := 「 $TV_{L(p,q),4} = TV_{L(p',q'),4}$ 」

$$\begin{aligned} S^2 \times S^1 &= L(16, 1) = L(32, 1) = L(16, 15) = L(32, 31) \\ S^3 &= L(17, 1) = L(33, 1) = L(31, 15) = L(63, 31) \\ L(2, 1) &= L(18, 1) = L(34, 1) = L(46, 15) = L(94, 31) \\ L(3, 1) &= L(19, 1) = L(35, 1) = L(61, 15) = L(125, 31) \end{aligned}$$

3 付録

3.1 $T_{[1]w(L,R)}$ と $P_{[1]w(L,R)}$

図 32: 図 33~図 38 の読み方

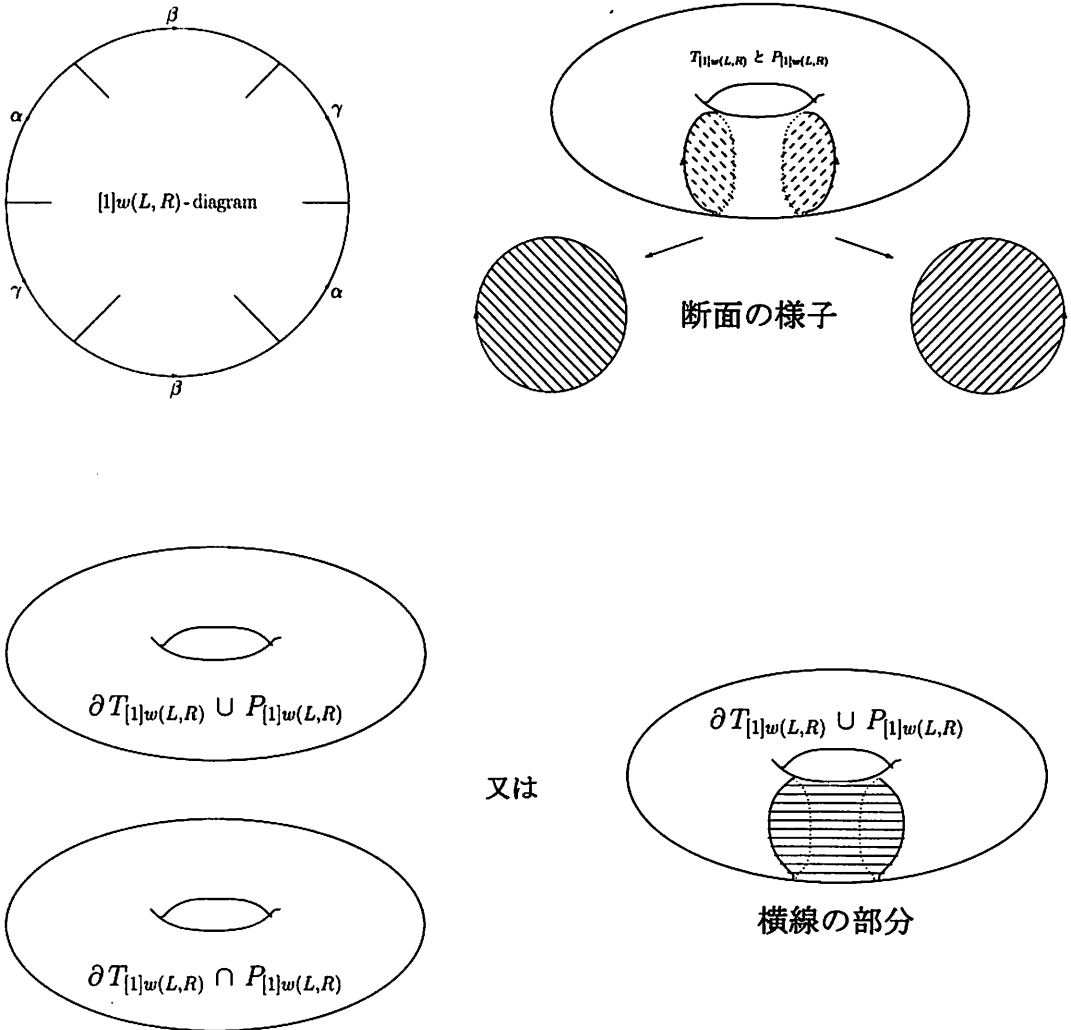


图 33: [1]L

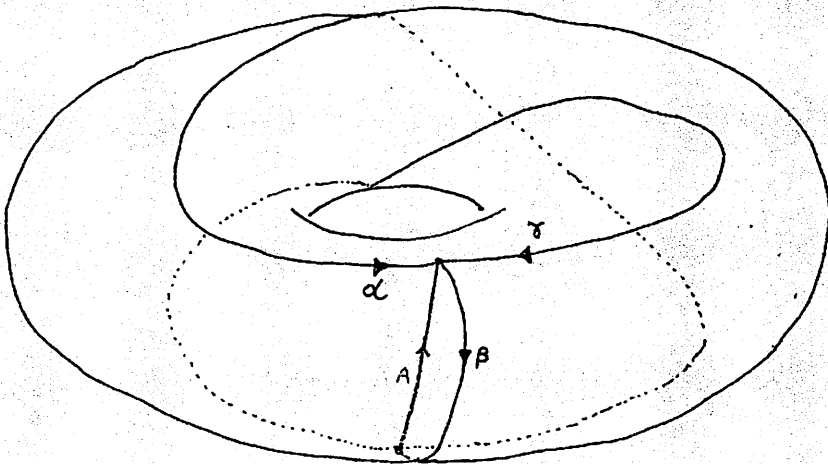
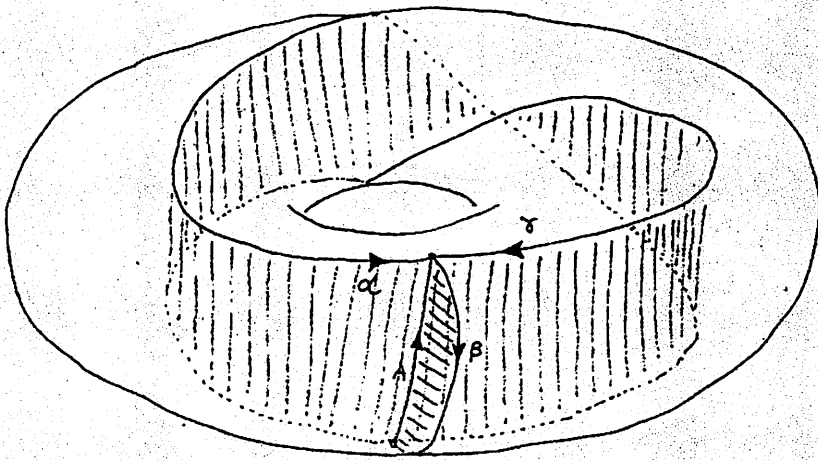
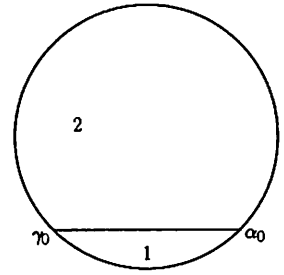
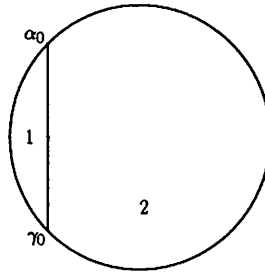
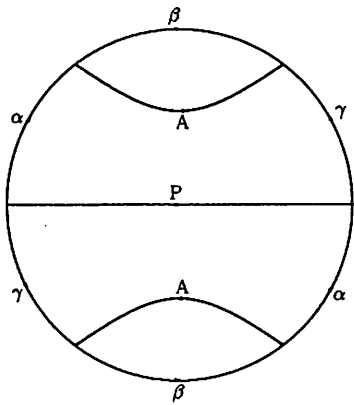


图 34: [1]LL

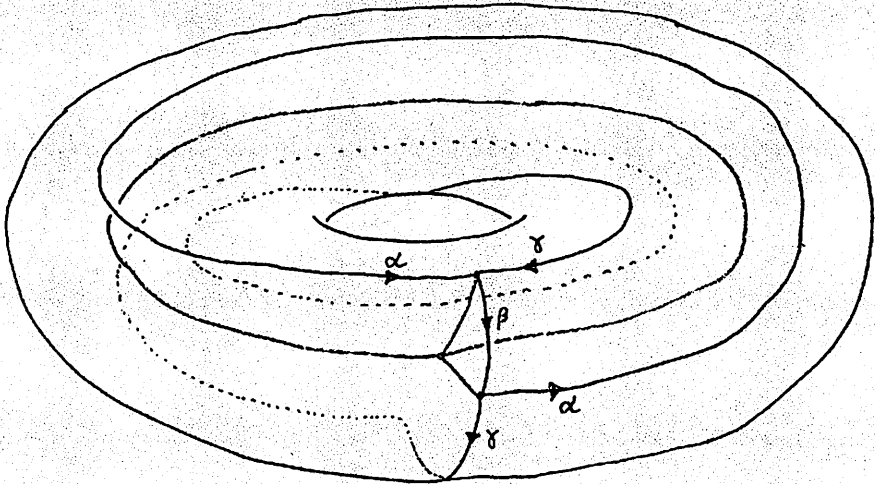
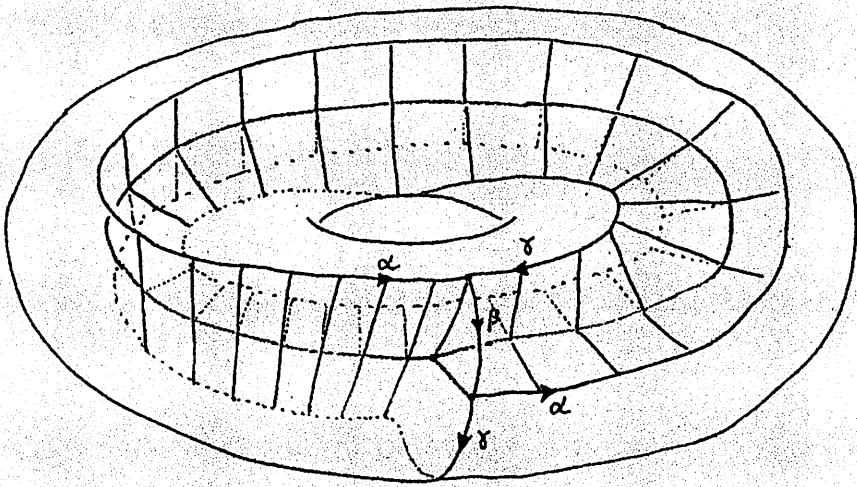
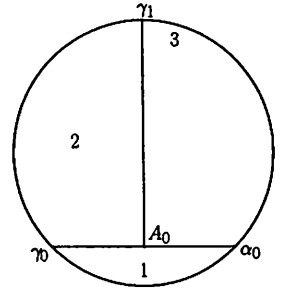
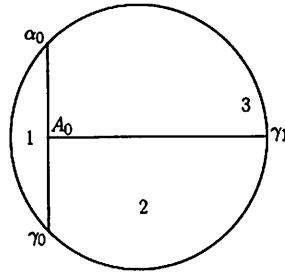
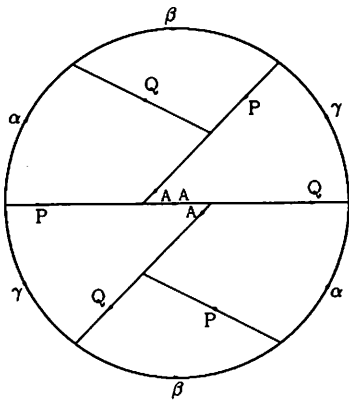


图 35: [1]LLL

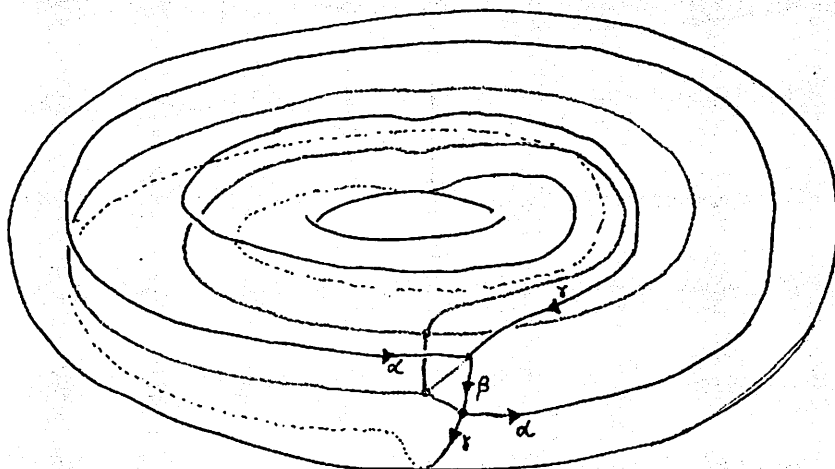
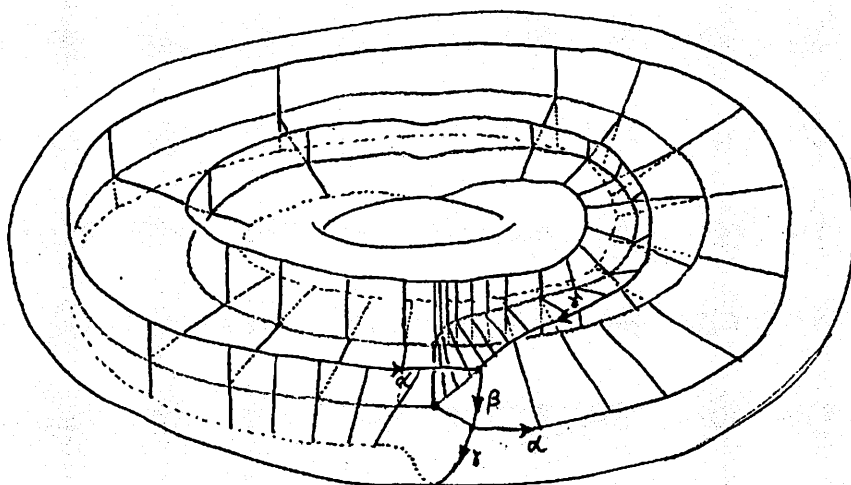
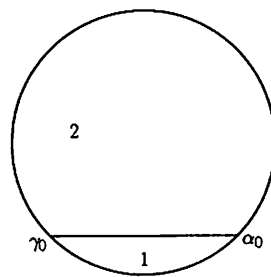
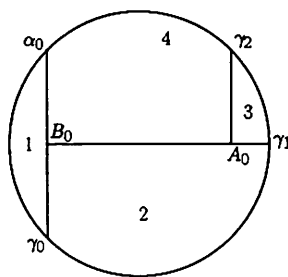
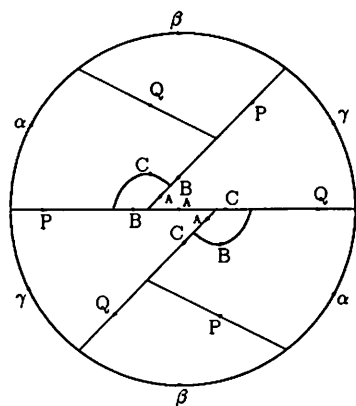


图 36: [1]LLLL

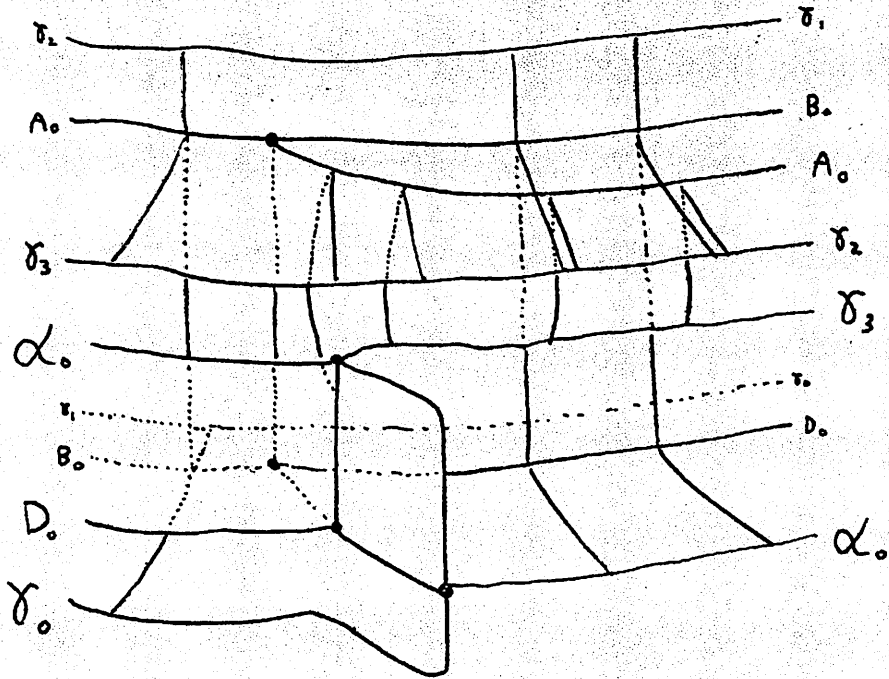
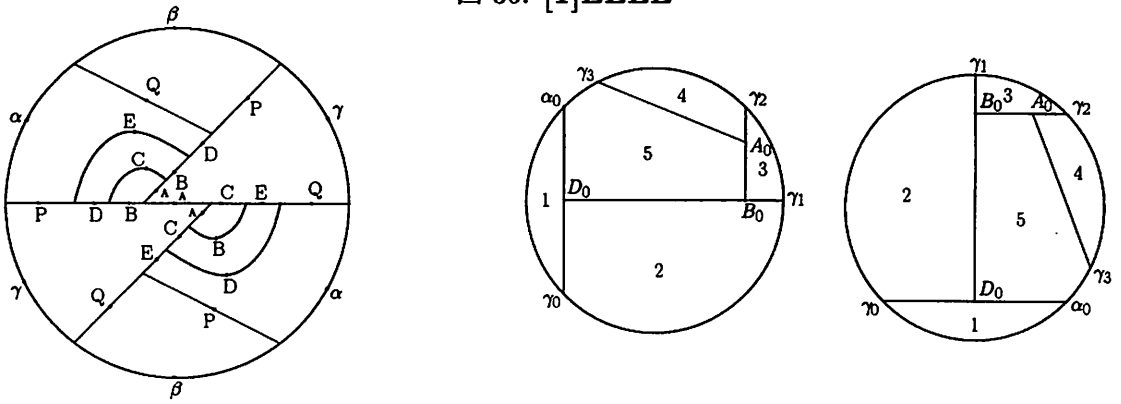


图 37: [1]LLR

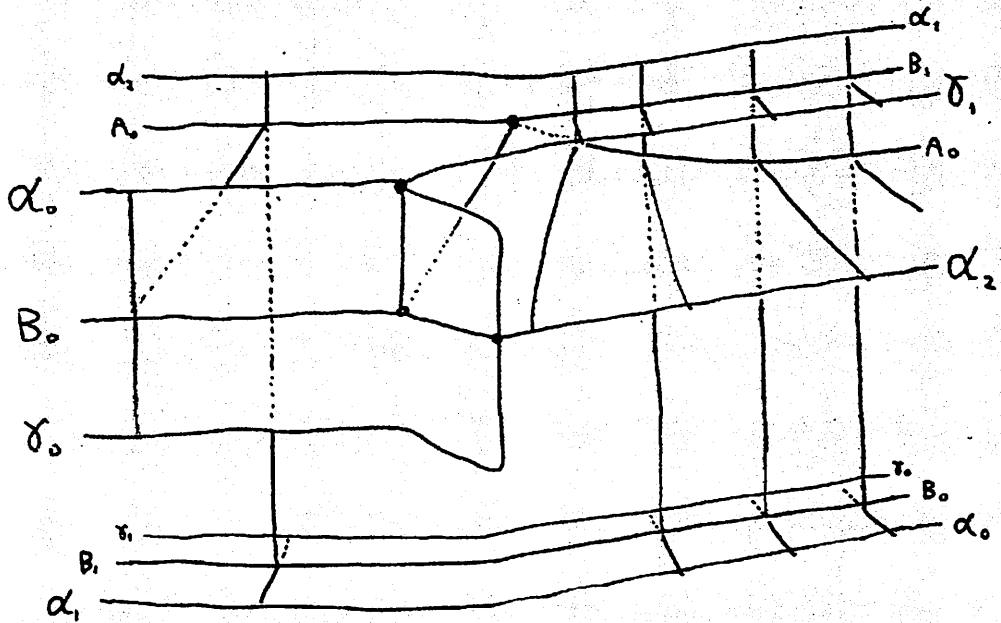
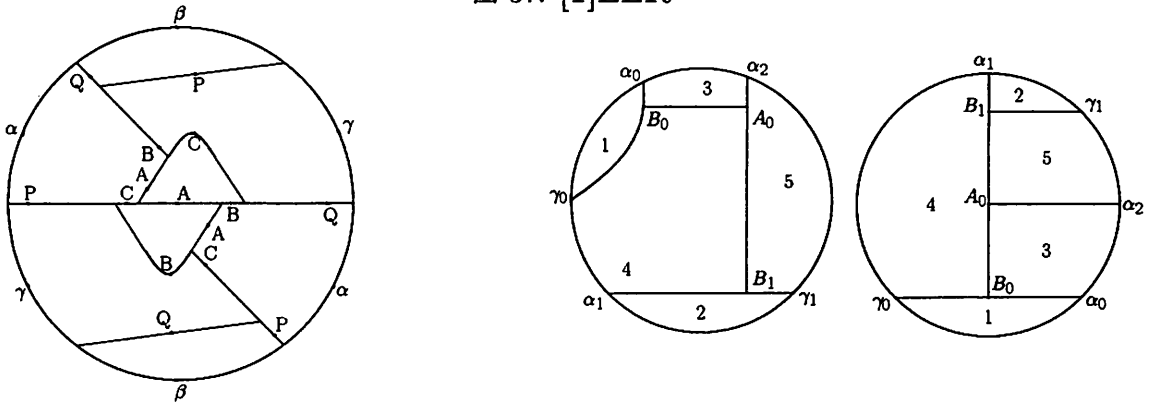
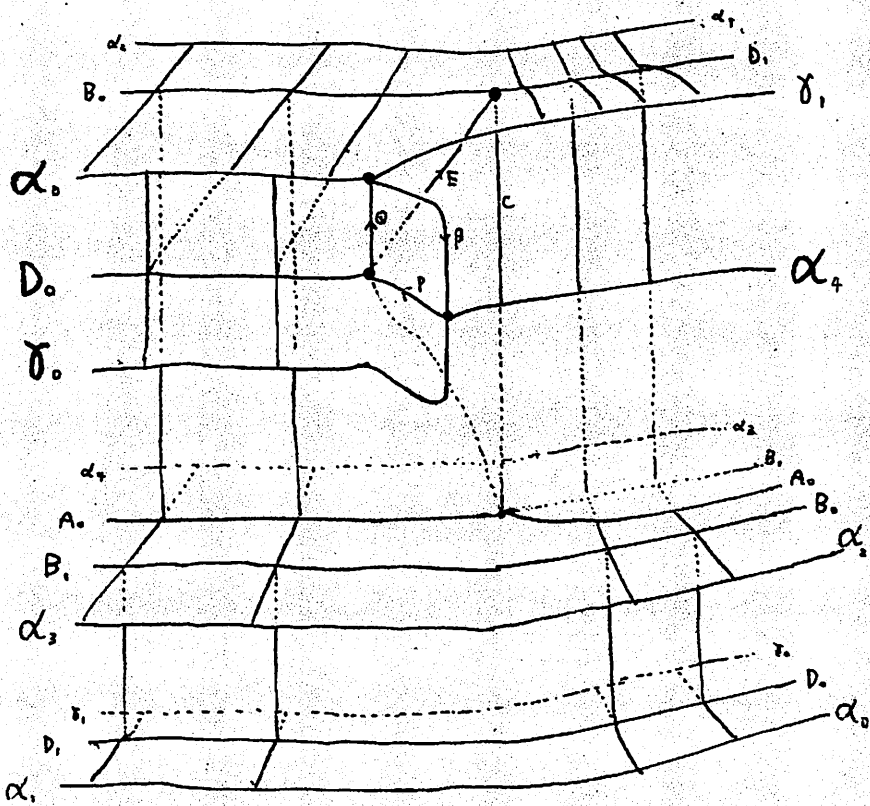
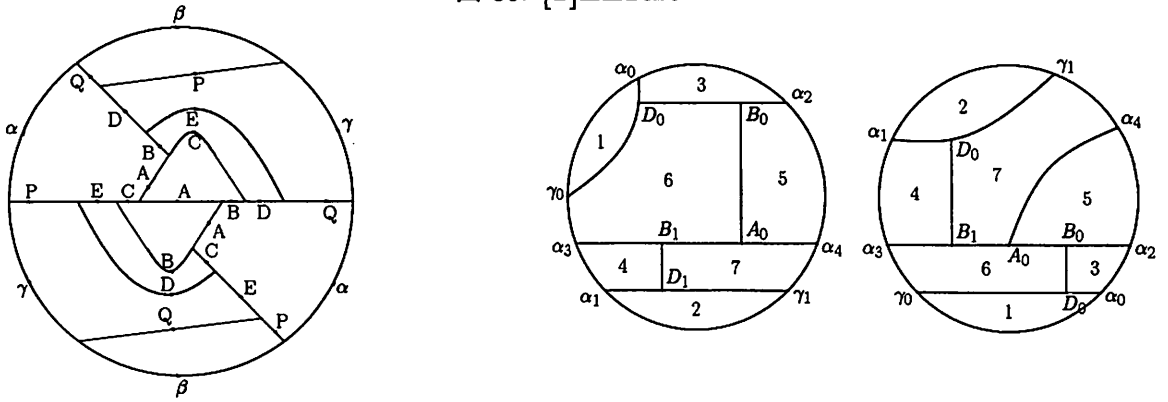


图 38: [1]LLRR



3.2 $L(p, q)$ の Turaev-Viro 不変量を計算するプログラム

Mathematica による $L(p, q)$ の Turaev-Viro 不変量を求めるプログラムは次のようになる。F[p, q] を実行して出力される値がレンズ空間 $L(p, q)$ の値となる。

- Turaev-Viro 不変量 ($r = 3$)

```

A={{1,1,0,0}}
H=DiagonalMatrix[{1,1,1,1}]
L={{1,0,0,0},
    {0,0,-1,0},
    {0,1,0,0},
    {0,0,0,1}}
R={{1,0,0,0},
    {0,1,0,0},
    {0,0,0,1},
    {0,0,-1,0}}
B[p_,q_]:=Rest[ContinuedFraction[q/p]]
G[p_,q_]:=Length[B[p,q]]
P[p_,q_]:=Part[B[p,q],G[p,q]]
T[p_,q_]:=ReplacePart[B[p,q],P[p,q]+1,G[p,q]]
V[p_,q_,n_]:=Part[T[p,q],n]
M[p_,q_]:=
  (For[i=1;X=A,i\[LessEqual]G[p,q],i=i+1,
    X=If[Mod[i,2]==0,
      X.MatrixPower[R,V[p,q,i]],X.MatrixPower[L,V[p,q,i]]];X)
F[p_,q_]:=FullSimplify[A.L.Transpose[M[p,q].H])

```

• Turaev-Viro 不變量 ($r = 4$)

```

A={{1,2,0,0,0,0,0,1,0,0}}
H=DiagonalMatrix[{1,1/2,1/2,1/2,1/2,1/2,1/2,1,1,1}]
L={{1,0,0,0,0,0,0,0,0,0},
    {0,0,-1/Sqrt[2],0,0,-1/Sqrt[2],0,0,0,0},
    {0,1,0,0,0,0,0,0,0,0},
    {0,0,0,1,0,0,0,0,0,0},
    {0,0,-1/Sqrt[2],0,0,1/Sqrt[2],0,0,0,0},
    {0,0,0,0,-1,0,0,0,0,0},
    {0,0,0,0,0,0,-1,0,0,0},
    {0,0,0,0,0,0,0,0,1,0},
    {0,0,0,0,0,0,0,0,1,0},
    {0,0,0,0,0,0,0,0,0,1}}
R={{1,0,0,0,0,0,0,0,0,0},
    {0,1,0,0,0,0,0,0,0,0},
    {0,0,0,1,0,0,0,0,0,0},
    {0,0,-1/Sqrt[2],0,0,-1/Sqrt[2],0,0,0,0},
    {0,0,0,0,-1,0,0,0,0,0},
    {0,0,0,0,0,0,-1,0,0,0},
    {0,0,-1/Sqrt[2],0,0,1/Sqrt[2],0,0,0,0},
    {0,0,0,0,0,0,0,0,1,0},
    {0,0,0,0,0,0,0,0,0,1},
    {0,0,0,0,0,0,0,0,1,0}}
B[p_,q_] := Rest[ContinuedFraction[q/p]]
G[p_,q_] := Length[B[p,q]]
P[p_,q_] := Part[B[p,q],G[p,q]]
T[p_,q_] := ReplacePart[B[p,q],P[p,q]+1,G[p,q]]
V[p_,q_,n_] := Part[T[p,q],n]
M[p_,q_] :=
  (For[i=1;X=A,i\[LessEqual]G[p,q],i=i+1,
    X=If[Mod[i,2]==0,
      X.MatrixPower[R,V[p,q,i]],X.MatrixPower[L,V[p,q,i]]];X)
F[p_,q_] := (FullSimplify[A.L.Transpose[M[p,q].H])

```


謝辞

本論文を書くにあたり、指導教員の石井一平先生にお世話になりました。また、第1章の DS-diagram については、山下正勝先生（東洋大学）、坪井恵子先生（埼玉獨協高等学校）に、多くを教えて頂きました。この場を借りてお礼を申し上げます。

参考文献

- [Is1] I.Ishii. 「Moves for flow-spines and topological invariants of 3-manifolds」 Tokyo J.Math. 15 (1992) p.297-312
- [Is2] I.Ishii. 「Combinatorial construction of a non-singular flow on a 3-manifold」 Kobe J.Math. 3 (1986) p.201-208
- [KL] Louis H.Kauffman and Sostenes Lins 「Computing Turaev-Viro Invariants for 3-manifolds」
- [Ro] J. Roberts. 「Skein Theory and Turaev-Viro invariants」 Topology. 34(1995) p.771-787.
- [Tu] V.G.Turaev. 「Quantum invariants of knots and 3-manifolds」 Walter de Gruyter (1994)
- [TV] V.G.Turaev and O.Y.Viro. 「State sum invariants of 3-manifolds and quantum $6j$ -symbols」 Topology. 31 (1992) p.865-902
- [Wh] J.H.C.Whitehead 「Simplicial spaces, uncles and m -groups」 Proc. London Math. Soc. 45 (1993) p.243-327.
- [Ya] S.Ymamada. 「The Absolute Value of The Charn-Simons-Witten Invariants of Lens Space」 Journal of Knot Theory and Its Ramifications. 2 (1995) p.319-327
- [MY] M.Ymamashita. 「 q/p 型 fibered solid torus の DS-diagram」 (2002.8.20) 箱根セミナー in 北見