HAKONE SEMINAR 18 (2002) 137-142.

Colouring of Prime Distance Graphs

早稲田大学教育学部　　鈴木　晋一

この講演の内容のほとんどは，坂本喜彦君の早稲田大学大学院教育学研究科における 2001 年度の修士論文「Prime Distance Graphs の彩色について」[8]を基にしている．

§ 1. Prime Distance Graphs

「Prime Distance Graphs」は，1985 年に論文[1]で Eggleton-Erdos-Skilton が導入した（実際には，実数直線上の種々の「distance graphs」を定義し，その特別な場合に当たる）．発端は，平面上の (unit) distance graphs の直線版にあるらしい．

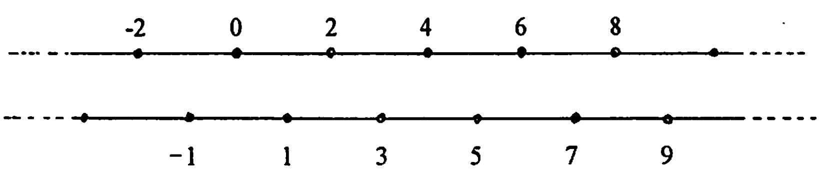
$\boldsymbol{P}$をすべての素数からなる集合とする．

素数の集合 $D \subset \boldsymbol{P}$について，D に随伴する「**Prime distance graph**」$Z(D)=(V(Z(D)), E(Z(D)))$を次のように定義する：

頂点集合　　$V(Z(D))=\mathbf{Z}$（整数の全体），

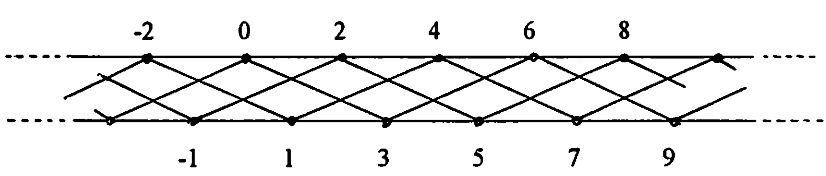
辺集合　　$E(Z(D))=\{ij \mid i, j \in \mathbf{Z}, |i-j| \in D\}$

例　D={2}の場合，Z({2})=Z(2)は次のような無限グラフ：



一般に，D={p}の場合は，Z(p)は p 本の無限に長いグラフである．

D={2, 3}の場合，Z(2, 3)は次のような無限グラフ：



命題 1.　$D_1 \subset D_2 \subset \boldsymbol{P} \Rightarrow Z(D_1) \subseteq Z(D_2)$；部分グラフ．　◆

さて，ここで問題にするのは，Prime distance graphs の（頂点）彩色である．

一般に，グラフ $G=(V, E)$ の k-彩色 (k-colouring) とは，

写像 $c: V \to C(k)=\{⓪, ①, ②, \cdots, (k-1)\}$；$u, v \in V, uv \in E \Rightarrow c(u) \neq c(v)$

のことである．G の彩色数 (chromatic number) $\chi(G)$ を，

$$\chi(G)=\min\{k \mid \exists \text{ k-colouring of } G\}$$

で定義する．一般に，部分グラフ $H \subseteq G$ について，$\chi(H) \leqq \chi(G)$ である．

以下では，$D \subset \boldsymbol{P}$ について，$\chi(Z(D))$ を簡単に $\chi(D)$ で表示する．

命題 2. $D_1 \subset D_2 \subset \boldsymbol{P} \Rightarrow \chi(D_1) \leqq \chi(D_2)$. ◆

命題 3. 次のような事実が容易にわかる：

(1) $\chi(D)=1 \Leftrightarrow D=\emptyset$.

(2) $\chi(\boldsymbol{P})=4$.（∵整数の全体を mod 4 で類別するとよい．）

したがって，任意の $D \subset \boldsymbol{P}$ について，$1 \leqq \chi(D) \leqq 4$.

そこで，$\chi(D)=k$ であるような D を「class k」の素数集合とよぶ．

(3) $\chi(D)=2 \Leftrightarrow D \not\ni 2$ または $D=\{2\}$.

(4) $D \not\ni 3 \Rightarrow \chi(D) \leqq 3$.

(5) $\chi(2, 3)=3$.

(6) $\chi(D)=4 \Rightarrow D \supseteq \{2, 3\}$.

この結果，Prime distance graphs の彩色に関する最大の問題は，「class 4（と class 3）の素数集合を特徴付けよ」ということになる．素数集合 D が極小 (minimal) であるとは，その任意の真部分集合 $E \subsetneq D$ について，$\chi(E) < \chi(D)$ が成り立つ場合をいう．すると，上の問題は，「class 4（と class 3）の極小な素数集合を数え上げよ」となる．class 4 の素数集合に関しては，これまでに次のような結果が得られている：

命題 4. ([1], [2], [3], [4]) D を class 4 の極小な素数集合とする．

(1) $|D|=3$ のとき，$\chi(D)=4 \Leftrightarrow D=\{2, 3, 5\}$.

(2) $|D|=4$ のとき，$\chi(D)=4 \Leftrightarrow D=\{2, 3, p, q\}$ として，$\{p, q\}$ が双子素数 ($p \neq 3$) であるか以下の 8 種：

$\{p, q\}=\{11, 19\}, \{11, 23\}, \{11, 37\}, \{11, 41\}, \{17, 29\}, \{23, 31\}, \{23, 41\}, \{29, 37\}$.

[1] では，class 4 の素数集合は，$\{2, 3, p, p+2\}$ だけであろうと予想していた．

この辺りが Prime distance graphs の彩色問題を考察する動機になったものと推測される．

(3) $|D| = 5$ については，$\chi(2, 3, 7, 19, 31) = 4$,

$\chi(2, 3, p, p+8, 2p+13) = 4$（ただし，$p, p+8, 2p+13$ がいずれも素数で，$p \neq 23,\ 29$）◆

§ 2．Class 4 の新しい素数集合

定理 1．$\{p, p+6, p+12\} \subset \boldsymbol{P} \Rightarrow \chi(2, 3, 11, p, p+6, p+12) = 4.$

この定理の証明には，次の補題が必要である：

補題（Eggleton-Erdos-Skilton[3]）$\{2, 3\} \subsetneq D \subset \boldsymbol{P}$ で，$\chi(D) = 3$ ならば，$Z(D)$ の任意の 3-彩色 $c : V(Z(D)) \rightarrow \mathbf{C}(3) = \{⓪, ①, ②\}$ について，次が成立する：

$$\exists \{i, i+1, i+2\} \subset V(Z(D)) : |\{c(i), c(i+1), c(i+2)\}| = 3.$$

つまり，連続する 3 頂点で，すべての色が異なるところが存在する．◆

尚，論文[3]には，$\chi(D) = 3$ の場合の彩色の方法について，相当に詳しい分析結果が示されているので，参照されたい．

定理 1 の証明：$D = \{2, 3, 11, p, p+6, p+12\}$ とする．$\chi(D) = 3$ と仮定すると，上の補題より，$Z(D)$ の 3-彩色 c について，

$c(0) = ⓪$，$c(1) = ①$，$c(2) = ②$

とすることができる．このとき，連鎖的に

$c(3) = ②$，$c(4) = ⓪$，$c(6) = ①$

が決まる．さらに，$p+12$ は 0 と 6 と隣接しているから，$c(p+12) = ②$,

12 は 1 と $p+12$ と隣接しているから，$c(12) = ①$

9 は 6 と 12 と隣接しているから，$c(9) = ②$

と連鎖的にきまる．ところが，-2 は 0, 1, 9 と隣接しているので，⓪，①，②のいずれによっても彩色することができない．よって矛盾である．◆

覚え書き：(1) $D = \{2, 3, 11, p, p+6, p+12\}$ が class 4 であることは分かったが，これらが極小な素数集合であるかはまだ判明していない．$p < 47$ の場合は，命題 4 にあげた class 4 の極小な素数集合のどれかを含んでしまうので，極小ではない．しかし，$p \geqq 47$ の場合には，命題 4 にあげた class 4 の極小な素数集合を

含まないので，それ自身新しい極小な素数集合であるか，あるいは新しい極小な素数集合を含んでいることになる．

尚，$\{p, p+6, p+12\} \subset \boldsymbol{P}$ となる組としては，

$$\{p, p+6, p+12\} = \{47, 53, 59\},\ \{61, 67, 73\}$$

などが知られている．

(2) 前記の命題4に挙げた class 4 の極小な素数集合の一覧表から，いくつかの予想が立てられた．Dを双子素数を含まない class 4 の極小な素数集合とする．任意の自然数 $n \geqq 3$ について，$|D| = n$ なるDは有限個か？というのもその1つである．ところで，素数に関するよく知られた(?)「Schinzel の予想」を仮定して，これは否定的である，つまり無限に存在する結果も報告されている[6].

また，任意の自然数 $n \geqq 3$ について，$|D| = n$ なる極小な素数集合Dが存在するか？というのも予想の1つである．

(3) 定理1の class 4 の素数集合 $\{2, 3, 11, p, p+6, p+12\}$ を発見するに至った背景については，論文[8]に詳しい記述がある．

§ 3. 彩色部分グラフ (chromatic subgraphs)

次の命題が知られている：

命題5([7]) 任意の無限グラフ G について，$\chi(G) = k < \infty$ ならば，有限部分グラフ $H \subseteq G$ が存在して，$\chi(H) = k$ となる． ◆

この命題を基に，次の定義をする．Prime distance graph Z(D)の彩色部分グラフ(chromatic subgraph)とは，Z(D)の有限部分グラフ H(D)で，$\chi(H(D)) = \chi(D)$ であってかつ彩色に関して臨界(critical)であるものをいう．

$\chi(D) = 2$ ならば，$H(D) = K_2$ (2頂点の完全グラフ)，

$\chi(D) = 3$ ならば，$H(D) = C_{2k+1}$ (奇サイクル)

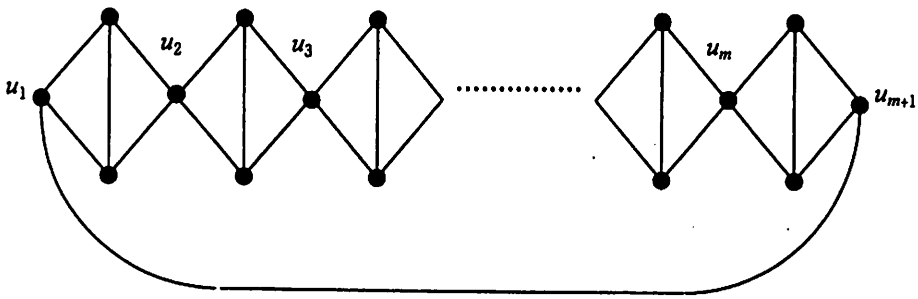
であるから，$\chi(D) = 4$ の場合のみに興味がある．

彩色部分グラフについては，次の命題6と命題7のみが知られている．

命題6([3]) 命題4(2)に挙げた class 4 の極小な素数集合 $D=\{2, 3, p, p+2\}$, $p \neq 3$, については，Z(D)の彩色部分グラフの1つとして，G(m, 2)がある．

ただし，$m=(p+4)/3$ であり，次の図で与えられる．

また，Z(2, 3, 5)の彩色部分グラフの1つとして，G(2, 2)がある．



グラフ G(m, 2)

覚え書き：G(m, 2)が Z(2, 3, p, p+2), p ≠ 3, の彩色部分グラフであることを注意深く観察すると，実は G(m−2, 2)も彩色部分グラフであることが分かった．これは，彩色部分グラフが一意的ではないことを示している．

命題 7([3]) 命題 4(3)の class 4 の極小な素数集合 D={2, 3, p, p+8. 2p+13}, p ≠ 23, 29, について，Z(D)の彩色部分グラフの 1 つを統一的に構成することができる．

簡単な構成法ではないので，詳細は省略する．この構成法を参考にして，残りの class 4 の極小な素数集合についても彩色部分グラフを構成することができた．一応，定理としておく．

定理 2. 命題 4(2)に挙げた 8 個の class 4 の極小な素数集合 D について，Z(D)の彩色部分グラフの 1 つを構成することができる．

実は，この構成法は，上の 8 個に限らず，もっと一般的な形になっている．これを使うことによって，双子素数{p, p+2}を含む場合にも，命題 6 で示した G(m, 2)とは別の彩色部分グラフが得られる．

References

[1] R.B.Eggelton, P.Erdos and D.K.Skilton : Colouring the real line, J.Comb. Theory, Series B, vol.**39**, 86-100 (1985).

[2] R.B.Eggelton : Three unsolved problems in graph theory, Ars Combinatoria, vol.**23A**, 105-121 (1987).

[3] R.B.Eggleton, P.Erdos and D.K.Skilton : Colouring prime distance graphs, Graphs and Combinatories, vol.**6**, 17-32 (1990).

[4] M.Voit and H.Walther : Chromatic number of prime distance graphs, Discrete Applied Math vol.**51**, 197-209 (1994).

[5] T.R.Jensen and B.Troft : GRAPH COLORING PROBLEMS, J.Wiley Interscience, 1995.

[6] V.Yegnanarayanan : On a question concerning prime distance graphs, Discrete Math., vol.**245**, 293-298 (2002).

[7] N.G.de Bruijn and P.Erdos : A colour problem for infinite graphs and problem in the theory of relations, Indagation Math., vol.**13**, 371-373 (1951).

[8] 坂本喜彦 : Prime Distance Graphs の彩色について，早稲田大学大学院教育学研究科 2001 年度修士論文，2002 年 3 月.