HAKONE SEMINAR 15 (1999) 57-64.

グラフのゲーム彩色

早稲田大学教育学部　鈴木 晋一

1. グラフのゲーム彩色とは

本稿の話題は，有限グラフ $G=(V,E)$ の頂点彩色 (vertex-colorings) に関するものなので，**単純グラフ**のみを扱う。

まず，通常の頂点彩色に関する定義を与えよう：

1.1. 定義 (1) グラフ $G=(V,E)$ の k-彩色 (k-coloring) とは，写像

$$c \;:\; V \longrightarrow \mathbf{C}(k)=\{1,2,\cdots,k\}$$

で，次の条件 (*) を満たすものをいう：

$$(*)\quad uv\in E \;\Rightarrow\; c(u)\neq c(v)$$

(2) グラフ G の彩色に必要な色の最小数を $\chi(G)$ で示し，Gの**彩色数** (chromatic number, chromatic index) という：

$$\chi(G)=\min\{k \mid G \text{ の k-彩色が存在}\}.$$

グラフの頂点彩色に関しては，いろいろな条件付きのものが考えられてい（グラフ理論の標準書のほか，[6] を参照されたい)。さて，上で与えたグラフの彩色の定義では (*) を満たす写像で頂点全体に同時に色を対応させることになっているが，

Vの元に，(*) を満たすように，1つずつ順に色を $\mathbf{C}(k)$ から選んで対応させていく

と考えてもよい（数学的な表現は面倒であるが)。そこで「彩色」をゲーム感覚でやってみては」という者が現れた。

1.2. 定義 (Bodlaender[1]) グラフ $G=(V,E)$ と自然数kが与えられている。

Vに k-彩色の条件 (*) を満たすように，Alice（先手，Aさん）と Bob（後手，Bさん，非協力的な相棒）が交互に色を $\mathbf{C}(k)$ から選んで対応させるゲームを行う。ゲームは次の場合に終了する：

① Aの勝ち：Vが頂点彩色の条件を満たすように彩色されたとき。
② Bの勝ち：途中で **C**(k) の中では (*) を満たすように色を対応させることが不可能になったとき。

そこで，Gの**ゲーム彩色数**(game chromatic number) $\chi_g(G)$ を次のように定める：

$$\chi_g(G) = \min\{\, k \mid A \text{ の必勝戦略が存在する色数 } k \}.$$

この $\chi_g(G)$ の定義が well-defined であることは容易に確かめられる。実際，次が成り立つことは明らかである：

$$\chi(G) \leqq \chi_g(G) \leqq |V(G)|.$$

また，色数 k で A に必勝戦略があれば，色数 k+1 でも必勝戦略がある。

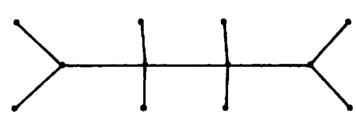
グラフの彩色数を決定する有効なアルゴリズムは知られていない（存在しない？）。同じように，ゲーム彩色数を決定するアルゴリズムも存在しない。そんなわけで，歴史が浅いゲーム彩色数では，その値が判明している例は極めて少ない。大学院学生の江連誠君が修士論文[11]でゲーム彩色を取り上げたので，同君の結果を含めて，ゲーム彩色について報告する。同君とゼミナールのメンバーに感謝する。

2. ゲーム彩色数に関する結果

ゲーム彩色数に関して，これまでに得られている結果を，彩色数と比較しながら，まとめると次のようになる：

2.1. 既知の事実

(1) 1991: Bodlaender[1]：任意の木(tree) T について，$\chi_g(T) \leqq 4$ or 5.
　1993: Faigle et al.[3]：任意の木 T について，$\chi_g(G) \leqq 4$.

$\chi_g($  $) = 4$

木は2部グラフなので，$\chi(T)=2$ であり，上の例は $\chi(G) \lneqq \chi_g(G)$ なるグラフの典型例となっている。また，この例は，$\chi g(T)=4$ となる木のなかで最小（頂点数・辺数が一番少ない）であることが，すべてを

チェックすることにより，確かめられる。

さらに，上の事実は，ゲーム彩色に関しては，臨界(critical)の概念が定義できないことも示している。

特に，長さ n (=辺数 n) の path P(n) について，

$$n \geqq 3 \Rightarrow \chi_g(P(n)) = 3.$$

(2) 1993: Kierstead & Trotter[7]:

$$7 \leqq \max\{\chi_g(G) \mid G: \text{planar}\} \leqq 33$$

その後，[9] では，$\max\{\chi_g(G) \mid G: \text{planar}\} \leqq 19$ が示されたとのことであるが，詳細は不明である。

(3) 1993: Faigle et al[3]:

$$6 \leqq \max\{\chi_g(G) \mid G: \text{outerplanar}\} \leqq 8.$$

1999: Guan & Zhu[4]:

$$\max\{\chi_g(G) \mid G: \text{outerplanar}\} = 7.$$

(4) 1993: Kierstead & Trotter[7]: コンパクト曲面 S に対して，

$$\chi_g(S) \equiv \max\{\chi_g(G) \mid G \text{ は S に埋め込み可能 }\} < \infty.$$

Zhu[10] では，次を証明したと報告しているが，詳細は不明である。

S(g) で種数 g の向付け可能なコンパクト閉曲面を表すと，

$$\chi_g(S(g)) \leqq [(3\sqrt{1+48g} + 23)/2].$$

(5) n 頂点完全グラフ K(n) について，$\chi_g(K(n)) = n$.

もちろん逆も成り立つ：G = (V, E) を n 頂点のグラフとする。

$$\chi_g(G) = n \Rightarrow G = K(n).$$

(6) 長さ n のサイクル (=辺数 n のサイクル) C(n) について，

$$n \geqq 3 \Rightarrow \chi_g(C(n)) = 3.$$

従って，n+1 頂点の車輪グラフ(wheel) W(n) について，

$$\chi_g(W(n)) = 4.$$

□

Δ(G) でグラフ G の最大次数を表すことにすると，一般に

$$\chi(G) \leqq \Delta(G) + 1$$

が成立し，さらに

$$\chi(G) = \Delta(G) + 1 \Leftrightarrow G = K(n) \text{ or 奇サイクル}$$

が結論される。しかし，ゲーム彩色では，偶サイクルや (1) で挙げた長さ 3 以上の paths なども $\chi_g(G) = \Delta(G)+1$ の条件を満たすことがわかる。

2.2. 命題 任意のグラフ G = (V, E) について，次が成立する：

$$\chi_g(G) \leqq \Delta(G) + 1.$$

証明　頂点数 n に関する帰納法で証明する。$n=1$ の場合は $G=K(1)$ であり，$\chi_g(G)=1$ で $\Delta(G)=0$ だから，明らかである。

1 より大きな自然数 n について，頂点数 $n-1$ 以下のすべてのグラフに関してついて命題が正しいと仮定し，G を頂点数 n のグラフとする。A の必勝戦略に従って，A と B が最善をつくして $\chi_g(G)=k$ 色で彩色し，そのとき着色した頂点の順に $v_1, v_2, \cdots, v_n$ とする（もちろん，一意的ではない)。すると，グラフ $G-v_n$ は頂点数 $n-1$ のグラフであるから，帰納法の仮定より，$\chi_g(G-v_n) \leqq \Delta(G-v_n)+1$ である。ところで，$V(G-v_n)=V-\{v_n\}=\{v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}\}$ の $G-v_n$ における隣接関係は G における隣接関係と同じであるから，この順での彩色は $G-v_n$ における最善の着色順の 1 つである。つまり，この彩色で $\chi_g(G-v_n)$色しか用いていない。

さて，v_n の G における近傍は $\deg(v_n) \leqq \Delta(G)$ 個の頂点であり，これらの頂点の彩色には高々 $\Delta(G)$色しか用いていないことに注意する。

もし $\Delta(G) = \Delta(G-v_n)$ ならば，$\Delta(G)+1$ 色の中には v_nの近傍には用いてない色があるから，A はもちろん B も v_nにこの色を塗らざるを得ない；これで G の $\Delta(G)+1$ 色の彩色を得る。

もし $\Delta(G) \neq \Delta(G-v_n)$ ならば，$\Delta(G-v_n) < \Delta(G)$ だから，上の場合と同じように v_n に色付けが可能で，G の $\Delta(g-v_n)+2 \leqq \Delta(G)+1$ 色による彩色が完成する。 □

しかし，$\chi_g(G) = \Delta(G)+1$ なるグラフ G の特徴付けが可能か否かはわかっていない。

2.3. 定理（江連[11]）

(7) 完全２部グラフ K(m,n), m≦n, について，

$$\chi_g(K(1,n))=2, \qquad \chi_g(K(m,n))=3 \quad (2\leqq m\leqq n)$$

上の 2.3 - (1) で与えた $\chi_g(T)=4$ となる木 T の例は，K(6,6) の部分グラフである：

つまり，$\chi_g(T)=4 > 3 = \chi_g(K(6,6))$ となる。これは，グラフ G と

その真部分グラフHについて，彩色数に関して成立する性質

$$\chi(H) \leqq \chi(G)$$

は，ゲーム彩色数に関しては成立しないことを示す。この事実が，ゲーム彩色数の評価の難しさを端的に示している。

ただし，H が完全グラフの場合，つまり $H=K(m)$ のとき，

$$m = \chi_g(K(m)) \leqq \chi_g(G)$$

が成立するから，$\chi_g(G)$ の下限の決定には使える。

(8) 2000: 江連[11]: 自然数 $k \geqq 3$ について，$K(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ で完全 k 部グラフを表す。ただし，$n_1 \leqq n_2 \leqq \cdots \leqq n_k$ とする。

$$\chi_g(K(2, 2, \cdots, 2)) = 2k - 1.$$

$$\chi_g(K(n_1, n_2, \cdots, n_k)) = 2k-2\ ; \quad n_1 = 3,$$

$$= 2k-1\ ; \quad n_1 > 3.$$

その他，$1 \leqq n_1 \leqq \cdots \leqq n_k \leqq 3$ のいろいろな場合について，完全 k 部グラフのゲーム彩色数が決定されている。しかし，有効な判定法はなく，いずれの場合にも「細かく場合分けして調べ尽くす」という方法によるのが現状である。 □

2.4. 覚え書き： $\omega \geqq 2$ 個の連結成分 $G_1, \cdots, G_\omega$ から成る非連結グラフ G については，一般に

$$\chi(G) = \max\{\chi(G_1), \cdots, \chi(G_\omega)\}$$

が成立する。ところが非連結グラフのゲーム彩色に際しては，ある成分については「非協力的な相棒であるBから塗り始める」という事態が発生する。連結グラフのゲーム彩色で，A から始める場合と，B から始める場合との間にどのような違いがまだわかっていない。B から始めた場合のゲーム彩色数を，仮に $\chi'_g(G)$ と書くことにすると，$\chi'_g(G) \geqq \chi_g(G)$ となりそうであるが，

$\chi'_g($ $) = 2,$

$\chi_g($ $) = 3$

である。一般には，

$$\chi_g(G) \geqq \max\{\chi_g(G_1), \cdots, \chi_g(G_\omega)\}$$

としか言えない。実際，B が第1手目にどの頂点を選ぶかという効果は，A が上手に立ち回ることによってほとんど解消されてしまうようである。

また，切断頂点(cut vertex) v を持つ場合に，v で切り離したときの連結成分についても同じような事情にある。 □

3．オセロゲーム彩色数

グラフの彩色数を決定する有効なアルゴリズムは存在しないと書いたが，リーズナブルな上限を与えるアルゴリズムは，幾つか知られている。いずれも，適当な1頂点（通常は，次数の高い頂点）を選んで色1を塗り，そこから始めて隣接している頂点に順次拡げていくものであり，突然に遠くに離れた頂点に色を塗ることは無い。そこで，ゲーム彩色に条件を付けて，新しい彩色数を定義してみた。

3.1. 定義　ゲーム彩色数の定義 1.2 に於けるゲームにおいて，AとBが交互に色を **C**(k) から選んでVの元（頂点）に対応していく際に，次の制限を付ける：

(o) 新しく頂点に色を付ける際には，既に色付けされている頂点と隣接している頂点の中から選ぶ。

そこで，**連結**グラフ G = (V, E) の**オセロゲーム彩色数**（othello-game chromatic number） $\chi_{og}(G)$ を次のように定義する：

$$\chi_{og}(G) = \min \{ k \mid \text{制限(o) 付きでAに必勝戦略が存在する色数} k \}.$$

この $\chi_{og}(G)$ の定義が well-defined であることも容易に確かめられる。実際，次が成り立つ：

$$\chi(G) \leqq \chi_{og}(G) \leqq |V|.$$

グラフの彩色数のリーズナブルな上限を与えるアルゴリズムから予想されるように，オセロゲーム彩色数は通常の彩色数にかなり近い感じがする。また，ゲーム彩色数の場合と比較して，調査しなければならない「場合」の数がかなり少ないので，オセロゲーム彩色数の決定の方がはるかに楽である。まず，基本的なグラフについて，χ_{og} を見てみよう。

(1-o)　任意の木 T について，　$\chi_{og}(T) = 2 = \chi(T)$.

これで，$\chi_{og}(G) < \chi_g(G)$ なるグラフがいくらでも存在することがわかる。

(5-o)　$\chi_{og}((K(n)) = n = \chi(K(n))$.

(6-o)　$\chi_{og}(C(2n)) = 2 = \chi(C(2n))$,

$\chi_{og}(C(2n+1)) = 3 = \chi(C(2n+1))$.

$\chi_{og}(W(2n+1)) = 3 = \chi(W(2n+1))$,
$\chi_{og}(W(2n+2)) = 4 = \chi(W(2n+2))$.

(7-o) 任意の完全２部グラフについて，$\chi_{og}(K(m,n)) = 2 = \chi(K(m,n))$.

(8-o) $\chi(K(2,2,2)) = 3 < \chi_{og}(K(2,2,2)) = 4 < \chi_g(K(2,2,2)) = 5$.
$\chi(K(2,2,2,2)) = 4 < \chi_{og}(K(2,2,2,2)) = 6 < \chi_g(K(2,2,2,2) = 7$.

これまでの例から，次が予想される：

3.2. 予想 任意の連結グラフ G = (V, E) について，

$$\chi_{og}(G) \leqq \chi_g(G).$$

Bだけに制限(o) を適用し，Aは自由であるとすれば，明らかである。従って，ゲーム彩色に際して，彩色の途中で，Aが「離れた頂点に彩色する」ことによってAの必勝戦略が存在する色数kが小さくなる場合があるか？・・・という問題になる。実は，この予想が出てきた背景には，定理2.3の (7) および (8) の結果を出す際に，このような場合が生じたことはなかった・・・という事実がある。

この問題と密接に関係しているのが次の問題である：

3.3. 予想 連結グラフ G = (V, E) とその連結部分グラフ H = (W, F) について，

$$\chi_{og}(H) \leqq \chi_{og}(G).$$

いずれの予想も，解決しそうでいながら，なかなかうまくいかない。
命題2.2に対応するものは，同じ証明で確認される。

3.4. 命題 任意の連結グラフ G = (V, E) において，次が成立する：

$$\chi_{og}(G) \leqq \Delta(G) + 1. \qquad \square$$

3.4. 覚え書き： 定義3.1の制限(o) を，

(o*) 新しく頂点に色を付ける際には，既に色付けされている
頂点と隣接している頂点が存在すれば，その中から選ぶ

のように置き換えれば、非連結グラフに対しても，自然にオセロゲーム彩色数が自然に定義される。しかし，非協力的な相棒が先着する成分が出てくるのは

前の 2.4 と同じである。

いずれにしても，ゲーム彩色に関しては未解決の問題が多く残っている。

引用文献

[1] H.L.Bodlaender : On the complexity of some coloring games, Internat.J.Foundations Comp.Sci., **2**(1991), 133-147.

[2] T.Dinski and Xuding Zhu : Game chromatic number of graphs, Discrete Math., to appear.

[3] U.Faigle, U.Kern, H.Kierstead and W.T.Trotter : On the game chromatic number of some classes of graphs, Ars.Comb., **35**(1993), 143-158.

[4] D.J.Guan and Xuding Zhu : Game chromatic number of outerplanar graphs, J.Graph Theory, **30**(1999), 67-70.

[5] F.Harary and Z.Zuza : Two graph-colouring games, Bull.Austral. Math.Soc., **48**(1993), 141-149.

[6] T.R.Jensen and B.Toft : GRAPH COLORING PROBLEMS, J.Wiley Interscience, 1995.

[7] H.A.Kierstead and W.T.Trotter : Planar graph coloring with an uncooperative partner, J.Graph Theory, **18**(1994), 569-584.

[8] X.Zhu : Game coloring number of planar graphs, J.Combin.Theory, to appear.

[9] -------- : Game coloring number of chordal graphs, preprint.

[10] -------- : Game coloring number of pseudo partial k-trees, preprint.

[11] 江連　誠 : Game chromatic number of some classes of graphs, 早稲田大学大学院理工学研究科 1999 年度修士論文。