HAKONE SEMINAR 14 (1998) 83-96.

Gauss Words of Curves on Surfaces

早稲田大学教育学部　鈴 木 晋 一

序

18 世紀にご存じの大数学者 F.Gauss [10] が平面上で考察した問題が，最近の結び目理論の研究と結びついて自然な形で解決され，さらに一般のコンパクト閉曲面上の問題として考察されていることを知り，この辺りの文献を少々当たってみたので，私なりの観点から報告してみようと思います．ただし，引用文献からの受け売り部分も多く，完全を期したものではないことをお断りしておきます．

§ 1. ガウスの Planarity Problem

1.1. 曲面上の正則閉曲線

円周 S^1 の曲面(= 2 次元多様体) M への滑らか(smooth)なはめ込み $\gamma: S^1 \to M$ を正則(regular)閉曲線と呼ぶ．以下では，混乱の生じない限り，正則閉曲線 γ とその像 $\gamma(S^1)$ を区別しない．

正則閉曲線 γ が**正規**(normal)であるとは，γ の多重点は高々有限個で，かつその多重点は横断的な 2 重点である場合をいう．

2 つの正則閉曲線 γ, γ' が**正則ホモトープ**(regularly homotopic)であるとは，γ と γ' の間のホモトピー $\{\eta_t\}$ が存在して，η_t は任意の $t \in [0,1]$ について正則閉曲線で，$\eta_0 = \gamma, \eta_1 = \gamma'$ となる場合をいう．また，このようなホモトピーを**正則ホモトピー**と呼ぶ．

(1.2) 正則閉曲線の正則ホモトピー類には代表元として正規閉曲線が存在する．

(1.3) 平面 R^2 上の正則閉曲線を本格的に研究したのは Whiteny [23] である．Whiteny は，正則閉曲線 γ の全曲率を 2π で割って得られる

正数 $\mu(\gamma)$ を γ の**回転数**(rotation number ; winding number ともいう) と名付け，正則閉曲線の正則ホモトピー類と回転数が 1 対 1 に対応することを示した．

Milnor[15]では，空間内の単純閉折線である結び目に対しても回転数を定義した．この考えを平面上の閉折線に対して応用して整理したものが鈴木[19]の第 2 章第 8 節にあるので参照されたい．

(1.4) この回転数は向き付け可能な曲面上の正則閉曲線に一般化されている；例えば，Smale[18], Reinhart[17], Chillingworth[5, 6]参照．

種数 g が 2 以上の向き付け可能な閉曲面 M(g) 上の正則閉曲線に対して回転数を定義するためには，M(g) の 1 次元ホモロジー群の標準的な 2g 個の生成元(通常，シンプレクテック基底)を滑らかな閉曲線で実現し，これを固定する必要がある．

しかし，種数 g が 1 以下の場合は，自然に定義される．実際，種数 0，つまり 2 次元球面上では，回転数は 0 か 1 の値をとる．単純閉曲線と正則ホモトープな正則閉曲線の回転数は 1 で，それ以外の閉曲線の回転数は 0 となる．

種数 1，つまりトーラス上では，その上に平坦(flat)なリーマン距離を仮定し，曲線の全曲率を 2π で割ればよい．トーラス上の正規閉曲線の回転数については，McIntyre-Cairns[14]や Tanio-Kobayashi[20]に新しい観点からの回転数の研究がある．[20]の結果については後に触れる．

(1.5) 2 つの正規閉曲線 γ と γ' が正則ホモトープであるならば，γ' は γ から次図に示す 2 つの変換（と曲面上のイソトピー）の有限列で得られる(ただし，点線の内部は開円盤)：

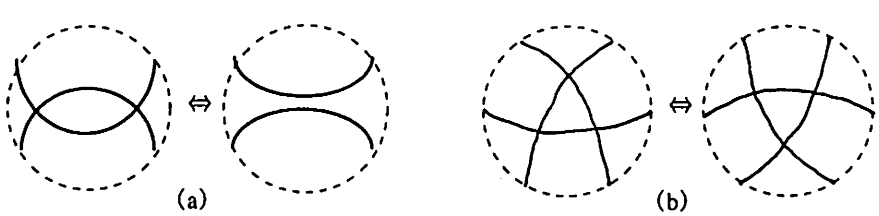

図 1

(0.6) γ_1 と γ_2 をそれぞれ閉曲面 M_1, M_2 上の正規閉曲線とする．γ_1 と γ_2 が **geotopic** であるとは，微分可能な同相写像 $\phi : M_1 \to M_2$ が存在して，$\phi\gamma_1 = \gamma_2$ となる場合をいう．γ_1 と γ_2 が **stably geotopic** であるとは，M_1 と M_2 に（γ_1 と γ_2 に交わらないように）それぞれ有限個の 1-ハンドルや 2-ハンドルを付加して，γ_1 と γ_2 が新しい曲面上で geotopic となる場合をいう．（これらの定義は Carter [4]による．適当な日本語訳は？）

1.7. ガウス語(Gauss Words)と正規閉曲線

$A(k)=\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ を k 個の文字の集合とし,$A(k)^+=\{a_1^+, a_2^+, \cdots, a_k^+\}$, $A(k)^-=\{a_1^-, a_2^-, \cdots, a_k^-\}$, $A(k)^\pm= A(k)^+ \cup A(k)^- = \{a_1^+, a_1^-, a_2^+, a_2^-, \cdots, a_k^+, a_k^-\}$ とする．$A(k)^\pm$ の元の順列

$$w = a_{i1}^{j1} a_{i2}^{j2} \cdots a_{i2k}^{j2k}$$

を k 文字の**抽象的ガウス語**(abstract Gauss word)と呼び，k 文字の抽象的ガウス語の全体を $W(k)$ で示す．$W(k)$ には次の 4 つ作用で生成される同値関係を導入する：

(1) 文字 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ の名前を交換する；つまり，$A(k)$ 上の置換（これは $A(k)^\pm$ 上の特別な置換）による変換．

(2) 語を巡回的に置き換える．

(3) 語を逆向きにする．

(4) 語の文字の符号±をすべて逆にする．

さて，これから後では閉曲面$M(g)$ には向きを与えておく．$M(g)$ 上の正規閉曲線γが k 個の交差点を持つとき，その交差点の全体に $A(k)$の元を対応させる．正規閉曲線γには，円周 S^1 の向きから誘導される向きを与える．γ上に基点を 1 つ選び，この基点からγの向きに従ってγ上を一周する．その際，各交差点 a_i において，交差が正のときは a_i^+を，交差が負のときは a_i^-を記録していく．ここで，交差が正 (resp. 負)とは，交差点 a_i を通過するとき，a_i の近傍において相手方を左から右へ(resp. 右から左へ) 突き抜ける場合と定め

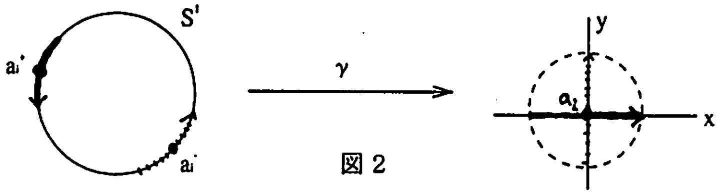

図 2

る．そして，$\gamma^{-1}(a_i)$ が円周上の２点 a_i^+ と a_i^- であると考える．この正負は曲面M(g)の向きにも依存することに注意する．

このようにして記録された文字 w は明らかに k 文字の抽象的ガウス語で，γによって定まるガウス語という．逆に，抽象的ガウス語 w は正規閉曲線γによって実現されたという．

上で定義した抽象的ガウス語の同値関係の生成系は，次の事実に対応していることは明らかであろう：

(1') 交差点のラベル付けの変換．

(2') 基点の変更．

(3') 曲線γの向きの逆転．

(4') 曲面 M(g) の向きの逆転．

ガウスは「**抽象的なガウス語が平面上の正規閉曲線で実現できるための必要十分条件は何か**」を考察した．ここで，ガウス自身の結果を含め，この問題に関する結果を述べるために，いくつか記号・定義を導入する．

(1.8) **記号・定義**

(1) $A(k)^{\pm}$ の部分集合 S に対して，

$$\sigma(S) = \#(S \cap A(k)^{+}) - \#(S \cap A(k)^{-})$$
$$= \text{S の元の符号の総和}$$

と定める．また，次の記法も用いる：

$$S^{-} = \{x^{-} \mid x \in S\}$$
$$= \text{S の元の符号を逆にしたもの．}$$

(2) $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$ と，k 文字のガウス語 $w \in W(k)$ に対して，S(i) を a_i^+ と a_i^- の間にある $A(k)^{\pm}$ の元の集合とする．ただし，必要ならば w を巡回的に変換して，a_i^+ が a_i^- より前にあるよう

にして考える．実際，w は図２の左のように，円周上に $A(k)^{\pm}$の元が並んでいる，つまり円順列と考え，円周の向きに従って a^+と a^- の間にある符号付き文字を取り出せばよい．

また，$S[i]=S(i)\cup\{a^+, a^-\}$ とする．

(3) $i\in\{1, 2, \cdots, k\}$ と $w\in W(k)$に対して，

$$\alpha\ (i;w)=\sigma\ (S(i)),$$

$i, j\in\{1, 2, \cdots, k\}$ に対して，

$$\beta\ (i,j;w)=\sigma\ (S[i]\cap S(j)^-)$$

と定める．

この定義は Cairns-Elton[2]による．これらの位相幾何学的な意味・解釈については後に(3.5)で与えることにして，[2]に従ってガウス自身の結果を紹介する．

1.9. 定理(Gauss[10]) 抽象的ガウス語 $w\in W(k)$ が平面上の正規閉曲線で実現できるならば，すべての $i\in\{1, 2, \cdots, k\}$ について

$$\alpha\ (i;w)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 2)$$

が成り立つ．□

すると当然この条件が十分条件か否かが問題となるが，ガウス自身これが十分条件ではないことを示した．その後，抽象的ガウス語が平面上の正規閉曲線で実現できるための必要十分条件を求める問題は，「Planarity Problem」として研究されてきた．この問題の最初の解答は Dehn[7]によって与えられた．1960 年代から，Treybig[22]，Marx[13]，Lovasz-Marx[12]，Read-Rosenstiehl[16]，Dowker-Thistlethwaite[8] などの成果が次々と報告されたが，これらの結果は，必ずしも上記のガウスの定理の形をしていない（ようである）．

そもそも，ガウスが何故にこのような問題を考察したのであろうか？平面上の正規閉曲線はまさに結び目の「正則射影図」である．Cater[4] によると，ガウスは「どのような抽象的ガウス語が結び目の正則射影図として実現されるか」をじっくりと考察したのだそうであ

る．［22］,［8］はまさにこの意味での解答である．

1990 年代に入って，Cater は上記［4］をはじめとする一連の論文で閉曲面上の正則閉曲線を研究した．Cater の仕事は単純明快でトポロジー屋には分かり易いので，次の節で紹介する．

Cater［4］の仕事を利用して，Cairns-Elton［2,3］は上記のガウスの定理の形で「Planarity Problem」の解答を与えた．

1.10. 定理（Cairns-Elton［2,3］）抽象的ガウス語 $w \in W(k)$ が平面上の正規閉曲線で実現できるための必要十分条件は，すべての $i, j \in \{1, 2, \cdots, k\}$ について次が成り立つことである：

$$\alpha\,(i;w) \equiv 0 \pmod 2, \quad \beta\,(i,j;w) \equiv 0 \pmod 2. \quad \square$$

この証明については，Cater-Cairns-Elton の流れに沿ってトーラス上の回転数やガウス語の実現問題を研究した Tanio-Kobayashi［20］を紹介した後で簡単に紹介する（系 3.9 の後）．

なお，Cairns-Elton［3］では，交差の符号を考慮しないガウス語の実現問題も扱っている．

§ 2. 閉曲面上の正則閉曲線の分類

次の命題は容易にわかる：

（2.1）**命題**．任意の抽象的ガウス語 $w \in W(k)$ に対して，整数 $g \geqq 0$ が存在して，w は向き付けられた閉曲面 $M(g)$ 上の正規閉曲線で実現される．

実際，球面 $M(0)=S^2$ 上に k 個の交差点 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ を用意し，これらを w の S^2 上での実現問題のルールに従って滑らかな単純曲線でつなぎ，S^2 上の正規閉曲線を描く．この際，$a_1, a_2, \cdots, a_k$ 以外に交差点が生じてもよいものとする．$a_1, a_2, \cdots, a_k$ 以外の交差点が生じた場合には，その交差点の近くで S^2 に 1-ハンドルを付加して，一方の弧をハンドルを通過させてこの交差点を除去すればよい．

さて，Cater[4]は，閉曲面上の正則閉曲線に対して，(1.6)で示した「geotopic」と「stably geotopic」を定義し，次を証明した：

2.2. 定理(Cater[4]) 向き付け可能な閉曲面上の正則閉曲線の stably geotopic 類は，抽象的ガウス語の同値類と 1 対 1 に対応する．□

(1.2)と(2.1)を考慮すれば，この定理はトポロジー屋には極めて自然で証明も難しくない．実際 Cater は，1 本の正則閉曲線だけでなく，複数の正則閉曲線を考察し，これに対応して抽象的ガウス語も一般化してガウス段落(Gauss Paragraph)と名付けて，上の定理を証明している．平面上の複数の正則閉曲線の正則ホモトピー類の代表元として得られる正規閉曲線群は，もちろん，絡み目の正則射影図である．

Cater の証明には，Cater's Surface[2]と名付けられた向き付けられた閉曲面を用いているので，これを簡単に紹介する．命題(2.1)の後で示した閉曲面との違いをみてほしい．

(2.3) **命題**(Carter's Surface の存在定理[4]) 任意の抽象的ガウス語 $w \in W(k)$に対して，整数 $g \geqq 0$ が存在して，w は向き付けられた閉曲面 $M(g)$上で正規閉曲線 γ で実現され，かつ，$M(g) - \gamma$ のすべての連結成分は開円盤となる．

(証明) まず k 個の向き付けられた円盤 $D_1, D_2, \cdots, D_k$ を用意し，それらの中心点を $a_1, a_2, \cdots, a_k$ とする．各 D_i 上に a_i で直交する 2 本の滑らかで固有な単純弧を描き，これらに向きを指定しておく．これらの単純弧の端点を，ガウス語 w の符号付き文字列に従って(抽象的な)辺でつなぎ，一周すると w が実現されるようにする．さらにこれらの辺を中心線とする帯を用意し，円盤 $D_1, D_2, \cdots, D_k$ と合わせて向き付けられたコンパクトで連結な曲面 M を作る．実際，この曲面 M 上で w は正規閉曲線によって実現されている．M の各境界成分に円盤を貼り付けることによって得られる閉曲面を $M(g)$とする．この $M(g)$が命題の条件を満たすことは明らかである．□

この命題の条件を満たす向き付けられた閉曲面 M(g)を，抽象的ガウス語 w の Carter's Surface と呼ぶことにする．明らかに，抽象的ガウス語 w が平面上の正規閉曲線で実現できるための必要十分条件は，w の Carter's Surface の種数が 0 となることである．また，上の(2.3)の構成法によって得られた Carter's Surface M(g)の種数 g の値は，M の境界成分の個数から容易に計算される．

§ 3. ガウス語のトーラス上での実現

前節で述べた Carter's Surface の登場により，抽象的ガウス語の閉曲面上での実現問題も考察されるようになった; Cairns-Elton[2]，Tanio-Kobayashi[20]，Tanio[21]．ここでは，これらの３つの論文での取り扱いを概説し，トーラス M(1)上での実現問題の解答[21]を紹介する．

(3.1) M を向き付けられた曲面とし，γ を k 個の交差点 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ を持つ M 上の正規閉曲線とする．交差点 $a \in \{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$ で γ を２つの正規閉曲線 γ_a と γ_a' とに，下図の規則で分割する：

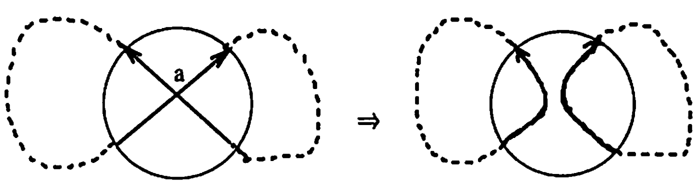

図 3

ただし，図の点 a の近傍は M の表側が見えているものとする．

☆ 今後，交差点 a_i に対して，γ_{a_i}，γ_{a_i}'を，それぞれ単に γ_i，γ_i'で表す．

☆ これから後，向き付けられた閉曲線をホモロジーサイクルとして考察する場合がしばしば生ずる．M 上の２つの閉曲線 γ, δ がサイクルとしてがホモローグであることを $\gamma \sim \delta$ で表す．またサイクルとそのホモロジー類を区別しない．

3.2. 定義 (Tanio-Kobayashi[20]) 上の(3.1)の状況の下で,

$$t(\gamma) = \#\{a \mid \gamma_a \sim 0 \text{ on } M\} - \#\{a \mid \gamma_a' \sim 0 \text{ on } M\}$$

と定める.

3.2. 補題 ([20]) $t(\gamma)$は正規閉曲線の正則ホモトピー不変量である. つまり, 次が成り立つ: γとδをM上の正規閉曲線とする.

γとδがM上で正則ホモトープ $\Rightarrow$ $t(\gamma) = t(\delta)$.

(証明) (1.5)より, 図1の(a),(b)のそれぞれに, 4通り, 8通りの向きを指定して, それぞれの場合について計算すればよい. 詳細は省略する. □

次は[20]の主定理の1つで, トーラス上の正規閉曲線の回転数に関する1つの公式であり, 上の補題3.2を使って証明される. (なお, McIntyre-Cairns[14]にも回転数に関する公式がある.):

3.3. 定理 (Tanio-Kobayashi[20]) トーラスM(1)上の正規閉曲線γについて, 次が成立する:

$$\gamma \not\sim 0 \text{ on } M(1) \Rightarrow t(\gamma) = \mu(\gamma).$$

(証明の方針) S^1, $M(1) = S^1 \times S^1$を, それぞれR^1/Z, R^2/Z^2と考え, 2つの普遍被覆

$$p_1 : R^1 \to S^1; \quad x \to x \pmod 1,$$
$$p_2 : R^2 \to M(1); \quad (x,y) \to (x \pmod 1, y \pmod 1)$$

をフル活用する. 正規閉曲線$\gamma : S^1 \to M(1)$に対して,

$$\Gamma : [0,1] \to M(1)$$

を, $\gamma p_1 : R^1 \to M(1)$の$p_2$に関するリフトの[0,1]への制限写像とし, 終点$\Gamma(1) = (d,0)$の整数$d = d(\gamma)$を考察する. この際, トーラスの特性 $H_1(M(1);Z) = \pi_1(M(1))$; つまり, 2つの閉曲線はホモローグならばホモトープであるという事実が生かされる. そして, R^2においては, Whitney[23]の公式が生かされる. □

この定理の証明から, 次の事実も明らかになる:

3.4. 命題　トーラス M(1)上の正規閉曲線 γ は，図 4 に示したタイプの正規閉曲線と geotopic な正規閉曲線 δ と正則ホモトープである．

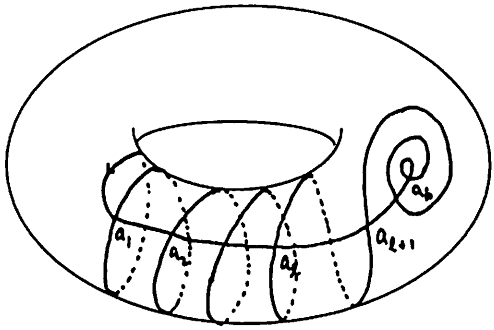

図 4　□

ここで，(3.1)を使って，(1.8)-(3)で定義した α (i;w)と β (i,j;w)のホモロジー的な解釈を与える．(1.8)と少々位置が離れてしまったが，定義を比較すると次は明らかである：

3.5. 補題([20]Lemma 4.2)　上の(3.1)の状況の下で次が成り立つ：

(1)　$\alpha\,(i;w) = -\gamma_i \cdot \gamma_i'$,

(2)　$\beta\,(i,j;w) = -\gamma_i \cdot \gamma_j$.

ただし，ここで・はホモロジー交叉数を表す．□

ところで，閉曲面 M 上では $\gamma \sim \gamma_i + \gamma_i'$ だから，次を得る：

3.6. 系([20]Corollary 4.3)　上の(3.1)の状況の下で，次を得る：

(1)　$\gamma \cdot \gamma_i = \gamma_i' \cdot \gamma = \alpha\,(i;w)$,

(2)　$\gamma_i \cdot \gamma_j' = -\alpha\,(i;w) + \beta\,(i,j;w)$,

　　$\gamma_i' \cdot \gamma_j = \alpha\,(i;w) + \beta\,(i,j;w)$,

(3)　$\gamma_i' \cdot \gamma_j' = \alpha\,(i;w) - \alpha\,(j;w) - \beta\,(i,j;w)$.　□

これの特別な場合として，次が成り立つ：

3.7. 系([20]Corollary 4.4)　(3.1)の状況下で，次が成り立つ：

(1)　$\gamma \sim 0 \;\Rightarrow\; \alpha\,(i;w) = 0$.

(2)　$\gamma_i \sim 0 \;\Rightarrow\; \alpha\,(i;w) = 0,\ \beta\,(i,j;w) = 0\,(\forall\, j)$.

(3) $\gamma_i' \sim 0 \Rightarrow \alpha(i;w) = 0, \quad \alpha(j;w) + \beta(i,j;w) = 0 (\forall j)$. □

ところで，次が成り立つ：

3.8. 補題（[2]Lemma 1）（3.1）の状況の下で，もしMが Carter Surface ならば（つまり，M－γの連結成分がすべて開円盤ならば），$\{\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k\}$ は $H_1(M;Z)$の生成系である．□

すると，Poincare duality より，次のことがわかる：補題 3.8 の仮定の下では，1-サイクルcについて，$c \cdot \gamma = 0$, $c \cdot \gamma_i = 0 (\forall i)$ならば，$c \sim 0$である．この事実を使うと，Mが Cater Surface の場合には，系 3.7 の逆が成り立つことがわかる：

3.9. 系（[20]Corollary 4.6）（3.1）の状況下で，もしMが Carter Surface ならば，系 3.7 の逆が成立する．□

☆向き付け可能な閉曲面Mについて，H1(M;Z)＝0ならば，Mは球面である．従って，第1節で述べた定理 1.10 は，上の系 3.7，及び補題 3.8 から容易に証明される．

最後に Tanio[21]の結果を，詳しい証明を省略して，紹介する．

3.10. 定義　（3.1）の状況下で，次のように定める：

$$C = \{a_i \mid \gamma_i \not\sim 0, \gamma_i' \not\sim 0, \gamma_i \not\sim \gamma_i'\}.$$

このCについては，次のことが成り立つことに注意する：$a_i \in C$で，a_jがγの他の交差点で$\gamma_i + \gamma_j \sim \gamma$が成り立つならば，$a_j$もCの元となる．

ここからトーラス M(1)上で考察する．次の補題の証明には，命題 3.4 を使う：

3.11. 補題（[21]Lemma 1，Prop.1）γをトーラス M(1)上の正規閉曲線とし，交差点を $a_1, a_2, \cdots, a_k$とする．

（1）Cは偶数個の点から成り，これらの点は２つずつ対になって $\gamma_i + \gamma_j \sim \gamma$となる．

(2) $2(\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_k)\sim(k-t(\gamma))\gamma$ □

さて，定義 3.2 で挙げた t(w)は，上の補題 3.5 から，次のように言い換えることができる：

3.12. 補題([21]Def.2) (3.1)の状況下で，次が成り立つ：

$$t(w)=\#\{i \mid \alpha(i;w)=0,\ \beta(i,j;w)=0(\forall j)\}$$
$$-\#\{i \mid \alpha(i;w)=0,\ \alpha(j;w)+\beta(i,j;w)=0(\forall j)\}.$$ □

次が Tanio[21]の主定理である．証明は上に準備した補題を組み合わせて実行する．

3.13. 定理([21]Theorem 1) w を M(1)上の正規閉曲線とし，k 個の交差点を持つとする．すると，任意の i について次が成り立つ：

$$\alpha(i;w)=\frac{2}{k-t(w)}\sum_{j=1}^{k}\beta(i,j;w).$$ □

3.14. 定理([21]Teorem 2) 抽象的ガウス語 w ∈ W(k)がトーラス M 上の正規閉曲線で実現されるための必要十分条件は，上の定理 3.13 の条件と，rank $(\beta(i,j;w)) \leqq 2$ である． □

なお，論文[21]には，一般の M(g)上での実現問題にも言及しているので，参照されたい．

引用文献

[1] K.D.Bailey: Extending closed plane curves to immersions of the disk with n handles, Trans.Amer.Math.Soc., 206(1975), 1-24.

[2] G.Cairns and D.M.Elton: The planarity problem for signed Gauss words, J.Knot Theory and its Ramifications, 2(1993), 359-367.

[3] ---------- and ----------: The planarity problem II, ibid., 5(1996), 137-144.

[4] J.Scott Carter: Classifying immersed curves, Proc.Amer.Math.Soc., 111 (1991), 281-287.

[5] D.R.J.Chillingsworth: Winding numbers on surfaces I, Math.Ann., 196 (1972), 218-249.

[6] ------------------------- : Winding numbers on surfaces II, ibid., 199 (1972), 131-153.

[7] M.Dehn : Uber Kombinatorische Topologie, Acta Math., 67 (1936), 123-168.

[8] C.H.Dowker and M.B.Thistlethwaite: Classification of knot projections, Topology Appl., 16 (1983), 19-31.

[9] G.K.Francis: Generic homotopies of immersions, Indiana Univ.Math.J., 21 (1972), 1101-1111.

[10] C.F.Gauss: Werke VIII, Teubner, Gottingen, 1900. pp.271-286.

[11] B.Grunbaum and G.C.Shephard: Rotation and winding numbers for planar polygons and curves, Trans.Amer.Math.Soc., 322 (1990), 169-187.

[12] L.Lovasz and M.L.Marx: A forbidden substructure characterization of Gauss codes, Acta Sci.Math., 38 (1976), 115-119.

[13] M.L.Marx: The Gauss realizability problem, Proc.Amer.Math.Soc., 22 (1969), 610-613.

[14] M.McIntyre and G.Cairns: A new formula for winding number, Geom. Dedicata, 46 (1993), 149-159.

[15] J.Milnor: On the total curvature of knots, Ann.of Math., 52 (1950), 248-257.

[16] R.C.Read and P.Rosenstiehl: On the Gauss crossing problem, Colloq. Math.Janos Bolyai, North-Holland, Amsterdam & New York, 1976, pp.843-876.

[17] B.L.Reinhart: The winding number on two manifolds, Ann.Inst.Fourier, Grenoble, 10 (1960), 271-283.

[18] S.Smale: Regular curves on Riemannian manifolds, Trans.Amer.Math. Soc., 87 (1958), 492-512.

[19] 鈴木晋一：曲面の線形トポロジー上巻，槙書店，1986.

[20] H.Tanio and O.Kobayashi: Rotation numbers for curves on a torus, Geom.Dedicata, 61 (1996), 1-9.

[21] H.Tanio: Gauss words of curves on a torus, J.Knot Theory and its Ramifications, to appear

[22] L.B.Treybig : A characteriztion of the double point structure of the project of a polygonal knot in regular position, Trans.Amer.Math. Soc., 130 (1968), 223-247.

[23] H.Whitney: On regular closed curves in the plane, Compositio.Math., 4 (1937), 276-284.

[24] J.W.T.Youngs: Minimal imbeddings and the genus of a graph, J.Math. Mech., 12 (1963), 303-315.