箱根セミナ 9 7 (1997) 8-16.

コンパクト境界付き３次元多様体のハンドル体分解とHaken 型の定理

早稲田大学教育学部　　鈴　木　晋　一

序論

連結で向き付け可能な３次元閉多様体(=コンパクトで境界を持たない) M は Heegaard-分解(以下では略して H-分解) $(M; H_1, H_2; F)$ を持つことが知られている；すなわち，２つの同相な（向き付け可能な）ハンドル体 H_1，H_2 が存在して，

$$M = H_1 \cup H_2, \quad H_1 \cap H_2 = \partial H_1 \cap \partial H_2 = \partial H_1 = \partial H_2 = F$$

が成り立つ（Seifert-Threlfall［13］等を参照)。

３次元多様体 M 内の２次元球面 Σ が本質的（essential）であるとは，Σ が M 内で３次元球体を囲まない場合をいう。

３次元多様体 M が既約(irreducible) であるとは，M が本質的な２次元球面を含まない場合をいう。

Haken［4］は次の定理を証明した：

Haken の定理. M を向き付け可能で連結な３次元閉多様体とし，$(M; H_1,H_2; F)$ をその H-分解とする。もし M が本質的な２次元球面を含むならば，M 内に本質的な２次元球面 Σ が存在して，$\Sigma \cap F$ は１本の単純閉曲線となる。

この定理は，Kneser［8］によって導入された３次元多様体の既約の概念や，Milnor［9］によって完成された「向き付け可能な３次元閉多様体の素(prime)分解定理」等と関連して，３次元多様体論における有力な定理の一つとなり，その後 Ochiai［11］によって 向き付け不可能な３次元閉多様体にも拡張されている。

一方，コンパクトで境界を持つ３次元多様体（以下では，３次元有界多様体とよぶ）については，その古典的な Heegaard-分解は１つのハンドル体といくつかの２-ハンドル（３次元球体）となるため（定義は第２節参照)，同種の定理を定式化し難い事情にある。これを解決するため，Casson-Gordon［1］は圧縮体（compression body）なる概念を導入して有界多様体の Heegaard-分解を一般化し，Haken の定理も定式化して証明した。

ところで,1970 年に Downing［2］は連結な３次元有界多様体にも，閉多様体の H-分解に代わるある種の強い対称性を持ったハンドル体分解が存在することを示し, Roeling［12］は境界が連結な場合について,このハンドル体分解を研究した。しかし，有界多様体の研究に有力と思われるこの分解は，これまでほとんど活用されていない。

本論文の目的は，向き付け可能な有界多様体に対する Downing［2]-Roeling［12］のハンドル体分解に関する定理を境界成分が一般の場合について証明・紹介し，この分解に対して Haken 型の定理を定式化して証明することである。

なお，本論文の一部は，論文［16］,［17］に掲載済である。

本稿では PL 圏で考察する；すなわち，すべての空間は単体分割されていて単体的複体の構造を持ち，すべての連続写像は区分線形的(Piecewise-linear)であるとする。

1．ハンドル体分解（Downing-Roeling 分解）の存在定理

本稿では，多様体はすべて向き付け可能であるとする。コンパクトで境界を持つ3次元多様体を3次元有界多様体とよぶことにする。

多様体 M について，∂M と $intM$ によってそれぞれ M の境界と内部を表す。また任意の部分空間 $A \subset M$ について，$Cl(A;M)$ によって A の M における閉包を表す。部分多面体 $A \subset M$ について，$N(A;M)$ によって A の M における正則近傍を表す。

多様体 M の部分多様体 A が M で固有（proper）であるとは，$A \cap \partial M = \partial A$ が成立する場合をいう。

3次元球体 D^3 の境界 ∂D^3 上に互いに交わらない 2g 個の円板（2次元球体）$D_1, \cdots, D_g, D_{g+1}, \cdots, D_{2g}$ を選ぶ。D^3 に1つの向きを指定し，この向きから誘導される向きをこれらの円板に与えるとき，向きを逆転させる同相写像 $f_k : D_k \to D_{g+k}$ $(k=1,\cdots,g)$ を用いて D_k と D_{g+k} を同一視することによって D^3 から得られる等化空間 $D^3 / \{f_1,\cdots,f_g\}$ を，種数 g のハンドル体（handlebody）という。種数 g のハンドル体は，種数1のハンドル体 $D^2 \times S^1$ の g 個のコピーの境界連結和（Gross[3]，Swarup[14]）として，また Euler 標数 $\chi(P) = 1 - g$ なる連結な1次元多面体 P の3次元空間 R^3 における正則近傍 $N(P;R^3)$ としても特徴付けられる。さらに，種数 g のハンドル体 H は，連結で既約な3次元有界多様体で，その基本群 $\pi_1(H)$ が階数 g の自由群となるものとしても特徴付けられる（例えば，Ochiai [9] 参照）。ハンドル体 H の種数を g(H) で示す。

連結で向き付け可能な閉曲面（=2次元多様体）F の種数を g(F) で表す。種数 g のハンドル体 H の境界 ∂H は種数 g の向き付け可能な閉曲面である。

3次元有界多様体 M 内の固有な円板 D が M の経円板（meridian-disk）であるとは，$Cl(M - N(D;M) ; M)$ が連結となる場合をいう。さらに，M の経円板の完全系 $\mathbf{D} = \{D_1,\cdots,D_g\}$ とは，M の互いに交わらない経円板 $D_1, \cdots, D_g$ の集合で，

$$Cl(M - N(D_1 \cup \cdots \cup D_g;M) ; M)$$

が3次元球体となる場合をいう。連結で既約な3次元有界多様体 M が（種数 g の）ハンドル体であるための必要十分条件は，M が（g 個の成分から成る）経円板の完全系を持つことである。

1.1. 定理（ハンドル体分解の存在定理 [2],[12]） 連結な3次元有界多様体 M に対し，非負整数 g と種数 g のハンドル体 H_1, H_2 が存在し，次の条件を満たす：

(0) $M = H_1 \cup H_2$.

(i) $H_1 \cap H_2 = \partial H_1 \cap \partial H_2 = F_0$ は連結な曲面である.

(ii) $\partial M = B_1 \cup \cdots \cup B_m$ （B_i は連結成分，$i=1,\cdots,m$）とし，$g_i = g(B_i)$ とすると，

$$H_j \cap B_i = \partial H_j \cap B_i = F_{ji} \quad (j=1,2 ; i=1,\cdots,m)$$

は，円板 D^2 の内部から g_i 個の円板を取り除いて得られる平面状曲面である.

(iii) 包含写像から誘導される基本群の間の準同型写像

$$\iota : \pi_1(F_{ji}; x_i) \to \pi_1(H_j; x_i), \quad x_i \in \partial F_{1i} = \partial F_{2i} \quad (j=1,2 ; i=1,\cdots,m)$$

は単射であり，各像 $\iota\pi_1(F_{ji}; x_i)$ は階数 g_i の自由群で，階数 g の自由群 $\pi_1(H_j; x_i)$ の自由因子となる。

(iv) $m \geqq 2$ ならば，m個の点 $x_1,\cdots,x_m$ を位数 1 の頂点として持つ木(tree) T が F_0 に存在し，包含写像から誘導される基本群の間の準同型写像

$$\iota : \pi_1(F_{j1} \cup \cdots \cup F_{jm} \cup T; x) \to \pi_1(H_j; x),\ x \in T\ (j=1,2)$$

は単射で，像 $\iota\pi_1(F_{j1} \cup \cdots \cup F_{jm} \cup T; x)$ は $\pi_1(H_j; x)$ の自由因子となる。

特に，上の条件(iii)と(iv)は次の条件(v)と同値である：

(v) H_j (j=1,2) の経円板の完全系 $\mathbf{D}_j = \{D_{j1},\cdots,D_{jg}\}$ が存在して，

$$D_{jk} \cap (F_{j1} \cup \cdots \cup F_{jm}) = \partial D_{jk} \cap (F_{j1} \cup \cdots \cup F_{jm})$$

は高々1本の単純弧で（必然的に $F_{j1} \cup \cdots \cup F_{jm}$ 上で固有），

$$\mathrm{Cl}(F_{ji} - N(\partial D_{j1} \cup \cdots \cup \partial D_{jg}; \partial H_j); F_{ji})$$

は1つの円板となる (j=1,2 ; i=1,…,m)。 □

連結な3次元有界多様体Mのハンドル体による分解 $M = H_1 \cup H_2$ で，上の定理 1.1 の条件(i)～(iv) を満たすものを $(M ; H_1, H_2; F_0)$ で示し，M の **SD-分解** (Roeling[12],special Downing splitting) とよび，ハンドル体の種数 $g(H_1)=g(H_2)$ を **SD-分解の種数**(genus) という．M のすべての SD-分解の種数のうちの最小数を M の **SD-種数**とよび，SDG(M)で示す。

さて，この定理の証明であるが，Roeling[12] が指摘するように，∂M が連結，つまり $m = 1$ の場合には Downing [2] の Theorem 1 の証明がそのまま当てはまることがわかる。$m \geqq 2$ の場合の証明は，Downing [2] の Lemma 1 を m 成分に拡張すればよいことがわかる。そこで，Downing [2] の記号・定義を少しだけ変えて利用する。

非負整数 g に対して，Y(g) を平面 R^2 上の点 (x,y) で条件

$$x \in \{0,1,\cdots,g\},\quad -1 \leqq y \leqq 1,\ \text{または}$$
$$0 \leqq x \leqq g,\quad |y| = 1.$$

を満たすもの全体の集合とする。さらに，

$$X(g) = \{(x,y) \in Y(g) \mid y \geqq 0\},$$
$$\partial X(g) = \{(x,0) \in X(g)\},$$
$$Z(g) = \{(x,y) \in R^2 \mid 0 \leqq x \leqq g, 0 \leqq y \leqq 1\}$$

とする。Xをハンドル体Hの部分複体でX(g)の埋め込みの像とする。X が H で固有であるとは，$X \cap \partial H = \partial X(= \partial X(g)$の像)が成立する場合をいい，固有な X が平凡(unknotted)であるとは，X(g)の埋め込みが Z(g)の埋め込みに拡張できる場合をいう。一般に，$X_1 \cup \cdots \cup X_m$ を H の部分複体で，$X(g_1) \cup \cdots \cup X(g_m)$の像で各 X_i が固有であるとする。$X_1 \cup \cdots \cup X_m$ が平凡であるとは，$X(g_1) \cup \cdots \cup X(g_m)$の埋め込みが $Z(g_1) \cup \cdots \cup Z(g_m)$の埋め込みに拡張できる場合をいう。

1.2. 補題 (cf. Downing [2] Lemma 1) Mを連結な3次元閉多様体とし，$(M ; W_1, W_2 ; F)$ を H-分解とし，S を W_1 の1次元芯(spine) とする。$Y_1 \cup \cdots \cup Y_m$ を W_1 の部分複体で，$Y(g_1) \cup \cdots \cup Y(g_m)$の埋め込みの像とする。このとき，M の全同位 $\{\eta_t\}$ が存在して，次をみたす：

(*)　$\eta_1(Y_1 \cup \cdots \cup Y_m) \cap W_i = X_{i1} \cup \cdots \cup X_{im}$ は $X(g_1) \cup \cdots \cup X(g_m)$ の W_i への埋め込みの像で，W_i で固有でかつ平凡である (i=1,2)。

証明. ハンドル体 W_1 を S の 3 次元の厚み付けと考える。つまり，コンパクトで向き付け可能な境界を持つ曲面 E で，S をその内部に含み，S を芯とするものが存在し，W_1 は $E \times [-1,1]$ と同相となる。$h: E \times [-1,1] \to W_1$ を同相写像とすると，$S \subset h(E \times 0)$, $h(E \times 1) \subset \partial W_1$ となる。W_1 の M におけるカラー近傍を利用して，h を $E \times [-1,3]$ から M への埋め込みに拡張する；拡張も同じ h で示す。

h の逆写像 h^{-1} を使って，$Y(g_1) \cup \cdots \cup Y(g_m)$ の $E \times 0$ への埋め込み e が得られる。そこで，$f: Y(g_1) \cup \cdots \cup Y(g_m) \to E \times [0,2]$ を

$$f(x,y) = (e(x,y),\ y+1)$$

で定義する。$E \times [-1,3]$ において，その境界を固定する全同位が存在して，e と f は全同位になることは明らかである。この全同位のトレースの近傍の中に $Z(g_1) \cup \cdots \cup Z(g_m)$ の埋め込みを容易に作れるので，$f(Y(g_1) \cup \cdots \cup Y(g_m)) \cap (E \times [-1,1])$ は $E \times [-1,1]$ において平凡であること，および $f(Y(g_1) \cup \cdots \cup Y(g_m)) \cap (E \times [1,3])$ は $E \times [1,3]$ において平凡であることが容易にわかる。したがって，h は $h(E \times [-1,3])$ の全同位 $\{\eta_t\}$ を誘導し，この全同位は，外部では恒等写像を使うことによって，M 全体に拡張され，$\eta_1(Y_1 \cup \cdots \cup Y_m) = hf(Y(g_1) \cup \cdots \cup Y(g_m))$ が補題の条件(*)を満たす。□

1.3. 定理 1.1 の証明. 連結な 3 次元有界多様体 M について $\partial M = B_1 \cup \cdots \cup B_m$ (B_i は連結成分) とし，$g_i = g(B_i)$ とする。V_i を種数 g_i のハンドル体とし (i=1,…,m)，∂V_i と B_i の間の同相写像で各 V_i を M に貼りつけることによって，向き付け可能で連結な 3 次元閉多様体 M^* を得る。Y_i を V_i の 1 次元芯とし，$Y_i \subset \mathit{int}V_i$ とする；Y_i は $Y(g_i)$ の埋め込みの像である。M^* を単体分割し，Y_i をその 1 次元骨格 S に含むようにする。

$W_1 = N(S;M^*)$ とすると，W_1 と $W_2 = Cl(M^* - W_1; M^*)$ は同相なハンドル体で，$(M^*; W_1, W_2; F)$, $F = \partial W_1 = \partial W_2$, は M^* の H-分解である。補題 1.2 を適用することにより，M^* の全同位 $\{\eta_t\}$ が存在して，$\eta_1(Y_1 \cup \cdots \cup Y_m) \cap W_i = X_{i1} \cup \cdots \cup X_{im}$ は $X(g_1) \cup \cdots \cup X(g_m)$ の W_i への埋め込みの像で，W_i で固有でかつ平凡である (i=1,2)。

$$N = N(\eta_1(Y_1 \cup \cdots \cup Y_m); M^*),$$

$$N_1 = N(X_{11} \cup \cdots \cup X_{1m}; W_1), \qquad N_2 = N(X_{21} \cup \cdots \cup X_{2m}; W_2)$$

とおくと，$N = N_1 \cup N_2$ であり，$\{\eta_t\}$ は全同位であるから，$Cl(M^* - N; M^*)$ は M と同相である。さらに，$X_{i1} \cup \cdots \cup X_{im}$ が W_i で固有で平凡であることから，

$$H_1 = Cl(W_1 - N_1; W_1), \qquad H_2 = Cl(W_2 - N_2; W_2)$$

は同相なハンドル体で，H_1 と H_2 は $Cl(M^* - N; M^*) = M$ の分解であり，定理の条件(i)～(iv)を満たすことは容易に確かめられる。

なお，$n = g(W_1) = g(W_2)$ とすると，$g = g(H_1) = g(H_2) = n + g_1 + \cdots + g_m$ である。□

2. 有界多様体の種数に関する注意

前節の定理 1.1 で $\partial M = \phi$，すなわち m=0 の場合は、SD-分解 $(M; H_1, H_2; F_0)$ は序論で述べた 3 次元閉多様体の H-分解に他ならない。さて、連結な 3 次元有界多様体 M は、あ

るハンドル体Hと指数2のハンドル $h^2(J_1),\cdots,h^2(J_n)$ を用いて

$$M = H \cup h^2(J_1) \cup \cdots \cup h^2(J_n)$$

のように表される。ここで $J_1,\cdots,J_n$ は ∂H 上の互いに交わらない(2-sided な) 単純閉曲線を表し、指数2のハンドル $h^2(J_k)$ ($k=1,\cdots,n$) とは、直積 $D^2\times[-1,1]$ の形に表される3次元球体で、

$$(D^2\times[-1,1]) \cap H = (\partial D^2 \times[-1,1]) \cap \partial H = \partial D^2 \times[-1,1],\quad \partial D^2 \times\{0\} = J_k$$

となるもので、$h^2(J_i) \cap h^2(J_k) = \phi$ ($i\neq k$)を満たす。

このような分解 $H \cup h^2(J_1) \cup \cdots \cup h^2(J_n)$ を、M の **Heegaard-分解** (略して **H-分解**) といい、ハンドル体の種数 $g(H)$をこの H-分解の種数という。M のすべての H-分解の種数のうちの最小数を M の **H-種数**とよび、HG(M)で示す。

3次元有界多様体の H-分解と SD-分解の間には次が成立する：

2.1. 定理 (cf. Roeling[12]) M を向き付け可能で連結な3次元有界多様体とする。M が種数 g の SD-分解を持つならば、M は種数 g の H-分解を持つ。

証明. この定理は境界 ∂M が連結な場合に Roeling[12] が証明したものであるが、SD-分解の性質 (定理 1.1(v)) を用いることによって境界成分の個数が2以上の場合にも全く同様にして証明される。 □

2.2. 系 向き付け可能で連結な3次元有界多様体 M について、次が成立する：

$$HG(M) \leqq SDG(M). \qquad \square$$

2.3. 覚え書き 一般に $HG(M) = SDG(M)$ が成立するか否かは未解決の問題である。特別に、

$$HG(M) = 0 \Leftrightarrow SDG(M) = 0$$

が成立する。この際、∂M の成分の個数を m とすれば、M は3次元球面 S^3 から m 個の互いに交わらない3次元球体の内部を取り除いて得られる多様体となる。

3. 有界多様体に対する Haken 型の定理

3次元閉多様体に対する Haken の定理 [4] は，H-分解の代わりに SD-分解を用いることによって，3次元有界多様体に対しても自然に定式化される。ここでは，Casson-Gordon [1; Lemma 1.1] などに見られる Haken の定理の一般化を参考にして定式化し，これを証明する。

F_0 をコンパクトで向き付け可能な曲面とし，J_1 と J_2 を F_0 の固有な1次元部分多様体とする。J_1 と J_2 が**既約**(irreducible) であるとは，J_1 の部分弧 a と J_2 の部分弧 b で $\partial a = \partial b$ なるものに関して，単純閉曲線 $a \cup b$ は F_0 上で円板を囲まない場合をいう。

連結な3次元有界多様体 M の SD-分解 (M; H_1,H_2; F_0) において，定理 1.1 の条件(v)を満たすような H_j の経円板の完全系 $\mathcal{D}_j = \{D_{j1},\cdots,D_{jg}\}$ を**特殊経円板の完全系**とよぶことにする ($j=1,2$)。これらの特殊経円板の完全系 $\mathcal{D}_1 = \{D_{11},\cdots,D_{1g}\}$ と $\mathcal{D}_2 = \{D_{21},\cdots,D_{2g}\}$ が**既約**であるとは，$J_1 = (\partial D_{11} \cup \cdots \cup \partial D_{1g}) \cap F_0$ と $J_2 = (\partial D_{21} \cup \cdots \cup \partial D_{2g}) \cap F_0$ が F_0 上で既約である場合をいう。

3次元多様体Mに含まれる2次元球面が本質的(essential)であるとは，それがMで3次元球体を囲まない場合をいう。

3.1. 定理（SD-分解に関するHaken型の定理）Mを連結な3次元有界多様体とし，$(M; H_1, H_2; F_0)$をそのSD-分解とする。$D_1=\{D_{11},\cdots,D_{1f}\}$と$D_2=\{D_{21},\cdots,D_{2f}\}$を，それぞれ$H_1$, H_2の特殊経円板の完全系とし，既約であるとする。

Σを M の内部に含まれる本質的で互いに交わらない2次元球面の集合とすると，M の内部に本質的で互いに交わらない2次元球面の集合Σ'が存在して，次の条件を満たす：

(1)　Σ'はΣ から，M内での1-手術と同位変形で得られる。

(2)　Σ'の各成分はF_0の内部と1本の単純閉曲線で交わる。

(3)　H_1, H_2の特殊経円板の完全系D_1^*, D_2^*が存在して，$D_1^*\cap\Sigma'=\phi=D_2^*\cap\Sigma'$。

特に、　$D_1^*\cap(F_{11}\cup\cdots\cup F_{1n})=D_1\cap(F_{11}\cup\cdots\cup F_{1n})$,

$D_2^*\cap(F_{21}\cup\cdots\cup F_{2n})=D_2\cap(F_{21}\cup\cdots\cup F_{2n})$

となるようにできる。ただし、F_{ji}は定理1.1(ii)で挙げた$\partial H_j\cap B_i$で、B_iはMの境界成分である。

証明　定理1.1の記号・記法をそのまま使うことにする。平面状曲面$F_{2i}=\partial H_2\cap B_i$の1次元芯$S_{2i}$を次のように選ぶ：$S_{2i}$は定理1.1(iii)で選んだ点$x_i$を基点とする単純閉曲線から成り，各閉曲線は$D_2$と1点で交差する(i=1,…,m)。このとき，ハンドル体H_2の1次元芯S_2を次のように選ぶことができる：

$$S_2\cap D_{2i}\text{ は1点},\qquad S_2\cap\partial H_2=S_{21}\cup\cdots\cup S_{2m}.$$

S_2とΣは有限個の点で横断的に交わると仮定してよい。H_2はS_2の正則近傍だから，必要ならばΣを同位で変形することにより，$\Sigma\cap H_2$は有限個の円板から成るとしてよい；これらの円板を$\sigma_1,\cdots,\sigma_k$とおく。

一方，$\Sigma_0=Cl(\Sigma-(\sigma_1\cup\cdots\cup\sigma_k);\Sigma)$とおけば，$\Sigma_0\cap(D_{11}\cup\cdots\cup D_{1f})$は有限個の互いに交わらない単純閉曲線と固有な単純弧から成ると仮定してよい。3次元多様体H_1は既約だから，Σ_0つまりΣ を通常のcut-and-pasteの方法，つまりM内での1-手術によって変形することにより，これらの単純閉曲線はすべて除去できる。$\Sigma_0\cap(D_{11}\cup\cdots\cup D_{1f})$は有限個の固有な単純弧のみとなる；これらの単純弧を$\alpha_1,\cdots,\alpha_t$とする。

Step 1: $\alpha_1,\cdots,\alpha_t$の中にΣ_0上で非本質的なもの、つまりΣ_0上で円板を切り取るものが存在する場合：α_1がΣ_0上で円板Δを切り取るとする。$\alpha_1\subset\Sigma_0\cap D_{11}$で$int\,\Delta\cap(\alpha_1\cup\cdots\cup\alpha_t)=\phi$と仮定してよい。$\alpha_1$が$D_{11}$上で切り取る円板で$F_{11}\cup\cdots\cup F_{1n}$と交わる方を∇とする。そこで$D_{11}$を新しい経円板$D_{11}^*=\nabla\cup\Delta$に置き換える。$D_{11}^*$をほんの少し変形することによって、

$$\Sigma_0\cap D_{11}^*\subset\Sigma_0\cap D_{11}-\alpha_1$$

となる。この操作を繰り返すことによって、H_1の特殊経円板の完全系D_1は新しい完全系D_1^*となり、$\Sigma_0\cap D_1^*$の成分はすべてΣ_0上で本質的な単純弧となる。

Step 2: $\alpha_1\cup\cdots\cup\alpha_t=\Sigma\cap D_1^*$がすべて$\Sigma_0$上で本質的である場合：定理1.1(v)と$\Sigma_0\cap(F_{11}\cup\cdots\cup F_{1n})=\phi$であることから，$\Sigma_0\cap D_{11}^*\neq\phi$ならば，$\alpha_1,\cdots,\alpha_t$の中に少なくとも1本の単純弧が存在し，これを$\alpha_1$とすると，$\alpha_1$は$D_{11}^*$から円板Δを切りとり，次の条件を満たす：

$$\Delta \cap \Sigma_0 = \partial \Delta \cap \Sigma = \alpha_1, \qquad \Delta \cap (F_{11} \cup \cdots \cup F_{1m}) = \phi .$$

したがって，閉多様体の場合の Jaco[6, II.7 ～II.9]の議論が常に適用可能である；すなわち，Δに沿ってΣを同位で変形することにより交差α_1を消去することができる。同じ操作を反復することにより $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ をすべて消去でき，得られた２次元球面の集合をΣ'とすると，Σ'は明らかに条件(1)と(2)を満たし、

$$(3)\quad D_1{}^* \cap \Sigma' = \phi , \qquad D_1{}^* \cap (F_{11} \cup \cdots \cup F_{1m}) = D_1 \cap (F_{11} \cup \cdots \cup F_{1m})$$

となる。

Step 3: もし，$D_2 \cap \Sigma' \neq \phi$ ならば，$H_2 \cap \Sigma'$ は有限個の固有な円板であるから，H_2をΣ'で切断するといくつかのハンドル体になる。$\Sigma' \cap (F_{11} \cup \cdots \cup F_{2m}) = \phi$であることと合わせて，$H_2$ の特殊経円板の完全系 $D_2{}^*$を，$D_2{}^* \cap \Sigma' = \phi$となるように選ぶことができる。これで条件(3)の残りもすべて満たされ，証明が完了した。 □

ここで定理 3.1 の応用をひとつ挙げておく。簡単のために、コンパクトで連結で向き付けられた３次元多様体 M の同相類[M]全体の集合を $\mathbf{M}$ で表す。$[M_1],[M_2] \in \mathbf{M}$ について、３次元球体 $D_1 \subset intM_1$, $D_2 \subset intM_2$ を選ぶ。$M_1{}^* = M_1 - intD_1$, $M_2{}^* = M_2 - intD_2$ の新しい境界成分の間に向きを逆転する同相写像 f を与え、f によって $M_1{}^*$と $M_2{}^*$を貼り合わせることによって新しい３次元多様体 $M=(M_1{}^* \cup M_2{}^*)/f$ が得られる。M の同相類[M]は、多様体の均質性から D_1 と D_2 の選び方に依らず、また２次元球面上の向きを逆転する同相写像は互いにイソトープだから f の選択にも依らない。そこで M を M_1 と M_2 の連結和 (connected sum) といい、$M = M_1 \# M_2$ で表す。さらに、

$$[M]=[M_1]+[M_2] = [M_1 \# M_2] \in \mathbf{M}$$

と定義すると、＋は $\mathbf{M}$ における可換な演算で、結合律が成り立つ。また、３次元球面（の同相類）$[S^3]$はこの演算のもとで単位元となる；すなわち、任意の$[M] \in \mathbf{M}$ について、$[M]+[S^3]=[S^3]+[M]=[M]$が成り立つ。

$[M] \in \mathbf{M}$ が素(prime)であるとは、$[M] \neq [S^3]$であって、$[M]=[M_1]+[M_2]$ならば$[M_1]$と$[M_2]$の少なくとも一方が$[S^3]$となる場合をいう。(Milnor[9], Hempel[5, Chapter 3]等を参照。) ３次元球体（の同相類）$[D^3]$は素である。

第２節の冒頭でも述べたように、３次元閉多様体の H-分解は自然に SD-分解と解釈する。コンパクトで向き付け可能な３次元多様体 M の H-種数 HG(M)と SD-種数 SDG(M)はもちろん同相類の不変数であるから、[M]の H-種数 HG[M]および SD-種数 SDG[M]が自然に定義される。

このような定義のもとで、Haken の定理(Haken[4])と上記の定理 3.1 より、次が直ちに得られる：

3.2. 系 $[M]=[M_1]+[M_2]+\cdots+[M_n]=[M_1 \# M_2 \# \cdots \# M_n] \in \mathbf{M}$ ならば次が成立する：

$$SDG[M] = SDG[M_1] + SDG[M_2] + \cdots + SDG[M_n]. \qquad \square$$

3.3. 系（素分解の存在定理：Hempel[5, Theorem3.15], cf. Milnor[9]）任意の$[M] \in \mathbf{M}$, $[M] \neq [S^3]$, に対して、有限個の素な同相類 $[P_1],[P_2],\cdots,[P_n] \in \mathbf{M}$ が存在して、

$$[M]=[P_1]+[P_2]+\cdots+[P_n]$$

となる。

証明　Mが閉多様体の場合は、この系はMilnor[9] の結果である。注意すべきことは、

$$\partial M=\phi \text{ の場合は、}\quad SDG[M]=0 \Leftrightarrow [M]=[S^3]$$

が成り立つことである。一方、覚え書き 2.3 から、次が成立する：

$\partial M\neq\phi$ の場合、∂M の個数を m とすると、

$$SDG[M]=0 \Leftrightarrow [M]=[D^3]+[D^3]+\cdots+[D^3] \quad (\text{m 個の３次元球体}).$$

従って、M の境界成分の個数と、系 3.2 より SD-種数に関する帰納法によってこの系が証明される。　□

引 用 文 献

[1] A.J.Casson and C.McA.Gordon : Reducing Heegaard splittings, Top.and its Appl., **27** (1987), 275-283.

[2] J.S.Downing : Decomposing compact 3-manifolds into homeomorphic handlebodies, Proc. Amer.Math.Soc., **24**(1970), 241-244.

[3] J.L.Gross : A unique decomposition theorem for 3-manifolds with connected boundary, Trans.Amer.Math.Soc., **142**(1969), 191-199.

[4] W.Haken : Some Remarks on surfaces in 3-manifolds, In:Studies in Modern Topology, Math.Assoc.Amer.Studies in Math., **5**(1968), 39-98. (distributed by Prentice Hall).

[5] J.Hempel : 3-MANIFOLDS, Ann.of Math.Studies **#86**, Princeton Univ.Press, Princeton, N.J., 1976.

[6] W.Jaco : LECTURES ON THREE-MANIFOLD TOPOLOGY, CBMS Regional Conference Series in Math., **#43**, Amer.Math.Soc., 1980.

[7] T.Kaneto : On simple loops on a solid torus of generral genus, Proc.Amer.Math.Soc., **86** (1982), 551-552.

[8] H.Kneser : Geschlossene Flachen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten, Jahresbericht der Deutschen Math.Verein., **38**(1929), 248-260.

[9] J.Milnor : A unique decomposition theorem for 3-manifolds, Amer.J.Math., **84**(1962), 1-7.

[10] M.Ochiai : Homeomorphisms on a three dimensional handle, J.Math.Soc.Japan, **30**(1978), 697-702.

[11] ------------ : On Haken's theorem and its extention, Osaka J.Math., **20**(1983), 461-468.

[12] L.G.Roeling: The genus of an orientable 3-manifold with connected boundary, Illinois J. Math., **17**(1973), 558-562.

[13] H.Seifert and W.Threlfall : LEHRBUCH der TOPOLOGIE, Teubner, Leipzig, 1934. Reprint: Chelsea, New York, 1947.

[14] G.A.Swarup : Some properties of 3-manifolds with boundary, Quart.J.Math.Oxford(2), **21** (1970), 1-23.

[15] H.Zieschang : On simple systems of paths on complete pretzels, Amer.Math.Soc.Transl.(2), **92**(1970), 127-137.

［16］鈴木晋一：境界を持つ３次元多様体に対する Haken 型の一定理，早稲田大学教育学部学術研究（数学編），43(1985)，13-20.

［17］------------：コンパクト境界付き３次元多様体のハンドル体分解，早稲田大学教育学部学術研究（数学編），46(1998)，to appear.