

空間グラフに含まれる結び目と絡み目

早稲田大学教育学部 鈴木 晋一

まえがき

有限グラフを3次元空間 R^3 (または3次元球面 S^3) の中で考察するという話題はかなり昔からいろいろあったが、結び目理論の観点から積極的に取り上げられることは希であった。これは、結び目・絡み目の理論そのものがかなり難しく、なかなか理論にならなかったことが最大の原因と思われる。このような状況の中で、有限グラフの3次元空間における位置の問題 (knotting problem) は、

(イ) 結び目や絡み目の理論で考えられている概念や不変量を、空間グラフにまで一般化する、

という形で、細々と続けられてきた。Kinoshita[Ki1], [Ki2], [Ki3], [Ki4], [Ki5], Suzuki[Sz1], [Sz6], [Sz8]などがこれに相当する。

1980年代になって、

(ロ) 空間グラフ上の部分グラフとしてのサイクル (cycles) が構成する結び目・絡み目の集合を調べることにより、グラフおよびその空間グラフを特徴付ける、

という研究が開花した。これは、Sacks[Sa], Conway-Gordon[CG], Kinoshita[Ki6]などの仕事が契機となったもので、グラフの組合せ的構造と結び付いた面白い結果が得られることになった。

この時期、Jones 多項式に始まる新しい結び目・絡み目不変量の発見・創造に伴って結び目理論が大きく発展し、一方では高分子化学などからの要請もあって、空間グラフの位置の問題が注目され出し、内容も豊富にな

ってきた。今後も上の (イ) と (ロ) を中心に空間グラフの研究が進むものと思われるが、これまでの結び目・絡み目とは係わりのない

(ハ) グラフ固有の位置の問題
が、いろいろな形で取り上げられていくであろう。

ところで、(ロ) の話題を中心にして、[Sz9], [Sz10], [Sz11], [Sz12], [KS]などで総合報告をしてきたが、1990年代に入って Böhme[B], Kobayashi[Kol], Robertson-Seymour-Thomas[RST1], [RST2], Scharlemann-Thompson[ST1] などの登場で、この方面の研究も新しい段階に突入したように思われる。ここでは、この辺の事情を報告する。

1. 準備

本稿で取り扱うグラフ (graphs) はすべて有限グラフである。グラフ G を自然にコンパクト距離空間と考え、埋蔵 $f : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ (または S^3) は折れ線状 (polygonal) のものだけを考える。

グラフ G の埋蔵 $f, g : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ について、空間グラフ $f(G)$ と $g(G)$ が全同位 (ambient isotopic) であるとき、 $f(G) \approx g(G)$ で示し、 G の空間内の実現 $f(G)$ の \approx に関する同値類を $f(G)$ の結び目型という。

③本稿では、基本的にこの全同位による分類によって話しを進めるが、その他の同値類に関しては Taniyama[Ta2], [Ta5]等を参照されたい。

定義 1. (1) 埋蔵 $f : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ が **n -linkless embedding** である

$\Leftrightarrow \forall$ set of disjoint cycles $\{c_1, \dots, c_m\}$ of G with $m \leq n$,

$f(c_1 \cup \dots \cup c_m)$ is a trivial link.

特に、 $m=1$ のとき、 f を **knotless embedding**.

$m \geq 2$ のとき、 f を **linkless embedding** と呼ぶ。

(2) グラフ G が **n -linkless embeddable**

$\Leftrightarrow \exists n$ -linkless embedding $f : G \rightarrow \mathbb{R}^3$.

(3) $G_n := n$ -linkless embeddable graphs の全体.

$$G_1 \supset G_2 \supset G_3 \supset \dots$$

The complement of $G_1 = {}^c G_1 \ni G$: self-knotted.

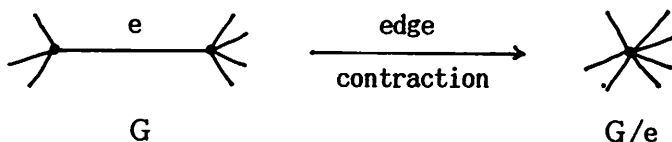
The complement of $G_2 = {}^c G_2 \ni G$: self-linked [Sz9], [KS].

すると, Sacks [Sa], Conway-Gordon [CG] の結果は, 簡単に述べると次のようになる:

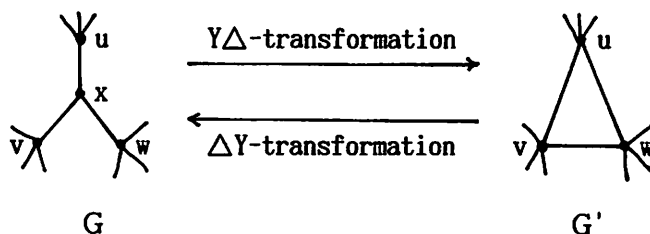
定理 1. K_n で n 頂点の完全グラフを表すと,

$$(1) K_6 \in {}^c G_2, \quad (2) K_7 \in {}^c G_1. \quad \square$$

ここで, この定理にまつわる話題を正確に述べるために, グラフに対する 2 つの変形を導入する.



$$\begin{array}{ccc} G_n \ni G & \longrightarrow & G/e \in G_n \\ {}^c G_n \ni G & \longleftarrow & G/e \in {}^c G_n \end{array}$$



$$\begin{array}{ccc} G_n \ni G & \longrightarrow & G' \in G_n \\ {}^c G_n \ni G & \longleftarrow & G' \in {}^c G_n \end{array}$$

定義 2. (1) A graph H is a **minor** of a graph G , $G \geq_m H$,

$\Leftrightarrow \exists \text{ subgraph } K \subset G, \exists \text{ edges } e_1, e_2, \dots, e_k \in E(K)$

s.t. $H \cong (\dots((K/e_1)/e_2)/\dots)/e_k$.

(2) Let F be a family of graphs satisfying a property P .

F (or the property P) is **closed under minor-reduction** \geq_m

$\Leftrightarrow \forall G \in F (G \geq_m H \Rightarrow H \in F)$

(3) The **obstruction set** $\Omega(F)$ for F is the set of all minor-minimal graphs which do not belong to F .

$\Omega(F) := \{G \notin F \mid G \geq_m H, G \neq H \Rightarrow H \in F\}$.

命題 1. G_n is closed under \geq_m for $\forall n$. □

さて、一般に $\Omega(F)$ の要素が有限であることが Robertson-Seymour [RS] によって保証されているので、当面の問題は次のように明示できる。

問題 1. $\Omega(G_n)$ を決定せよ。

予想: $\Omega(G_2) = \{K_6, G_7, K_{4,4-e}, K_{3,3,1}, G_8, G_9, Pe\}$,

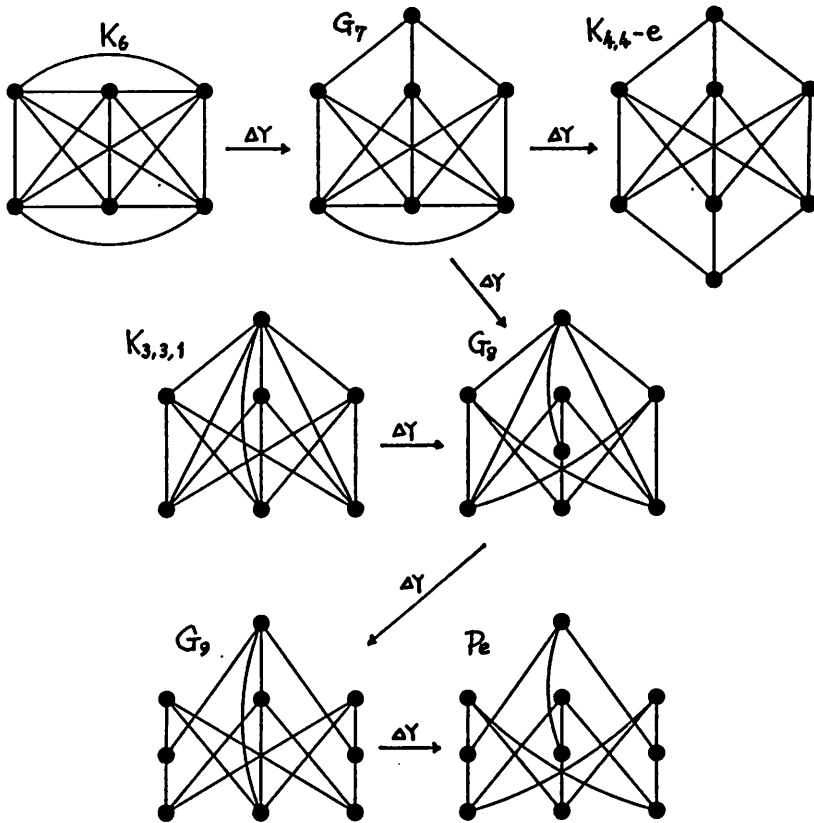
$\Omega(G_1) = \{K_7, K_{3,3,1,1}, \text{その他 } 37\text{個}\}$.

ここで、 $\Omega(G_2)$ の 7 個の要素は下の図に挙げてある。

また、 $\Omega(G_1)$ の要素については、[KS] を参照されたい。

実際、Sacks [Sa] では、 $\Omega(G_2)$ に関して \supset を示している。また、これらは、 K_6 と $K_{3,3,1}$ から ΔY -transformation で得られることがわかる。Motwani et al [MRS] では、逆の包含関係 \subset の証明を試みているが、かなりのギャップが見受けられる。詳しくは [KS] を参照されたい。このギャップを埋めたと主張しているのが Robertson-Seymour-Thomas [RST1], [RST2] であるが、いずれも概略を述べたもので、詳しい証明はかなり長い 3 つのプレプリント [RST3], [RST4], [RST5] で与えられている。

残念ながら、いままでのところ、小生にはこれらのプレプリントの完全



なチェックが出来ないているが、これ以降では、彼ら3人の論拠や背景などを私なりに分析し紹介してみよう。

2. $\Omega(G_2), \Omega(G_1)$ を巡って.

まず, Conway-Gordon [CG] の先に述べた定理は, 実際には次のことを証明していることに注目する:

定理 2. (1) K_6 の任意の空間内の実現について, 絡み数 (mod 2) が 1 となる 2 成分の絡み目が奇数個存在する ([CG]).

さらに, $\Omega(G_2)$ の要素 $G_7, K_{4,4-e}, K_{3,3,1}, G_8, G_9, P_e$ についても, それらの任意の空間内の実現について, 絡み数 (mod 2) が 1 となる 2 成分の絡み目が奇数個存在する (Shimabara [MS3]).

(2) K_7 の任意の空間内の実現について, Arf 不変量が 1 となる結び目が奇数個存在する ([CG]). \square

完全なチェックはしていないが, $\Omega(G_1)$ に属することがわかっている要素についても, 同じことが成り立つことが予想される ([KS]).

そこで, 定義 1 に対応して, 次の定義が意味をもつことになるし, 上記の予想が正しいとすれば, この定義で十分であることもわかる.

定義 1*. (1) 埋蔵 $f : G \rightarrow R^3$ が **linking numberless embedding**

$\Leftrightarrow \forall$ pair of disjoint cycles $\{c_1, c_2\}$ of G ,

$$\text{link}(f(c), f(c)) \equiv 0 \pmod{2}.$$

ⓐ 実際, Robertson-Seymour-Thomas [RST2] では, この場合を単に **linkless embedding** と呼んでいる.

(2) 埋蔵 $f : G \rightarrow R^3$ が **Arf invariantless embedding**

$\Leftrightarrow \forall$ cycle c of G ,

$$\text{Arf}(f(c)) = 0.$$

(3) グラフ G が **linking numberless embeddable**

$\Leftrightarrow \exists$ linking numberless embedding $f : G \rightarrow R^3$.

$G^* :=$ linking numberless embeddable graphs の全体.

グラフ G が **Arf invariantless embeddable**

$\Leftrightarrow \exists$ Arf invariantless embedding $f : G \rightarrow R^3$.

$G^A :=$ Arf invariantless embeddable graphs の全体.

問題 2. $G^* = G_2$? $G^A = G_1$?

2成分の絡み目が trivial か否か, 結び目が trivial か否かの判定はなかなか難しいので, 絡み数 (mod 2) と Arf 不変量で解決できることになれば, 問題 1 だけでなく (ロ) に係わる問題はかなり扱い易くなる.

結び目・絡み目が trivial であることの定義は通常のもので, 空間内

にそれらを境界とする disjoint disks が存在する場合とする。この定義によると、定義1 (1)における cycles $f(c_1 \cup \dots \cup c_m)$ が trivial link であるという条件は、空間グラフ $f(G)$ との関係が示されていないので、なかなか生かして使えない。そこで、次の定義を導入する。

定義4. G をグラフとし、 $f: G \rightarrow \mathbb{R}^3$ を埋蔵とする。

- (1) サイクル $c \subset G$ について、 $f(c)$ が **counknotted** (or **cotrivial**)
 $\Leftrightarrow \exists \text{ disk } D \subset \mathbb{R}^3 \quad (D \cap f(G) = \partial D = f(c))$.
- (2) f が **flat embedding** である (または、 $f(G)$ が **flat** である)
 $\Leftrightarrow \forall \text{ cycle } c \subset G \quad (f(c) \text{ が counknotted})$.

この counknotted という用語は [Ho]によって与えられたもので、[Sz2]などで使用されている。この条件の典型的な活用は、次の命題にみられる。

命題2. (Böheme[B]) Let $\{c_1, \dots, c_m\}$ be a set of cycles of G such that $c_i \cap c_j$ is connected or \emptyset for $i \neq j$. Let $f: G \rightarrow \mathbb{R}^3$ be an embedding.

$f(c_1), \dots, f(c_m)$: counknotted

$\Rightarrow \exists \text{ disks } D_1, \dots, D_m \subset \mathbb{R}^3$

s. t. (i) $D_i \cap f(G) = \partial D_i = f(c_i)$ for $\forall i$,

(ii) $D_i \cap D_j = \partial D_i \cap \partial D_j = f(c_i \cap c_j)$ for $i \neq j$. \square

一方、flat embeddings の定義は、Motwani et al [MRS] で導入されたが、有効に使い切れなかった。Robertson et al [RST2]では、これをうまく使っているようである。

定理3. ([RST2]) グラフ $G \in \mathcal{G}^*$ $\Leftrightarrow G$ has a flat embedding. \square

この定理が、問題1を解決するための、トポロジー的な方からの背景になっている。もう一つ、flat embeddings の特徴付けを紹介しよう。それには Scharlemann-Thompson [ST1]の次の結果をフルに利用する。

定理4. ([ST1]) G を平面状グラフ (planar graph) とする.

埋蔵 $f: G \rightarrow R^3$ が spherical (i.e. $\exists 2$ -sphere $\Sigma \subset R^3$ ($\Sigma \supset f(G)$))
 $\Leftrightarrow \forall \text{subgraph } H \subseteq G$ ($\pi_1(R^3 - f(H))$ is free). □

定理5. ([RST2]) 埋蔵 $f: G \rightarrow R^3$ が flat

$\Leftrightarrow \forall \text{subgraph } H \subseteq G$ ($\pi_1(R^3 - f(H))$ is free). □

3. 局所平坦性など

最後に, Kobayashi [Ko4] などを中心に, 定義4と関連する話題・問題などを述べることにする. まず, 定義を与える.

定義5. (1) グラフ G のサイクルの集合 $\{c_1, \dots, c_m\}$ が free である
 $\Leftrightarrow c_i \cap c_j$ が connected または \emptyset for $i \neq j$.

③ この定義は [B]による. ほぼ同じ定義が [Ko4]の well-situated.

(2) 埋蔵 $f: G \rightarrow R^3$ (または $f(G)$) が $\{c_1, \dots, c_m\}$ に関して flat
 $\Leftrightarrow \exists \text{disks } D_1, \dots, D_m \subset R^3$

s.t. (i) $D_i \cap f(G) = \partial D_i = f(c_i)$ for i .

(ii) $D_i \cap D_j = \partial D_i \cap \partial D_j = f(c_i \cap c_j)$ for $i \neq j$.

④ Kobayashi [Ko4]では, $\{c_1, \dots, c_m\}$ が1次元ホモロジー群 $H_1(G; Z)$ の基底になっているとき, $\{c_1, \dots, c_m\}$ に関して locally unknotted であると呼んでいる. ただし, グラフを制限しているため, 若干の条件がついている.

(3) 埋蔵 $f: G \rightarrow R^3$ (または $f(G)$) が locally flat である

$\Leftrightarrow \exists \text{set } \{c_1, \dots, c_m\}$ of cycles of G

s.t. (i) f は $\{c_1, \dots, c_m\}$ に関して flat.

(ii) $\{c_1, \dots, c_m\}$ は $H_1(G; Z)$ の基底.

この locally flat の定義は, グラフをトポロジー的に取り扱う際には極めて自然な考えであり, 今後重要になると考える.

次の定理が証明されている：

定理 6. ([Ko4])

- (1) 任意のグラフ G は locally flat embedding $f: G \rightarrow \mathbb{R}^3$ をもつ.
- (2) 空間グラフ $f(G)$ が locally flat
 $\Rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^3 - f(G))$ は free group である. □

問題 3. locally flat embedding と係わる典型的な問題を定式化せよ.

まだまだたくさんの結果が報告されており、たくさんの問題が残されているが、今回の報告はこれで終わりにする。空間グラフに関する論文が急速に増加しているのは真に嬉しいことであるが、用語が勝手に使用されており、そろそろ少し整理してみる必要があるように感じている。(本稿でも随分勝手な用語を使用した！)

かなり急いでこの稿をまとめたので、おかしい表現・文章になってしまいましたが、お許してください。

最後に、空間グラフに関する文献表を挙げておく。私の目に触れたものを整理したもので、完全とは言えないが、空間グラフの研究に必要なものはほとんど網羅したつもりである。加えるべき論文等をご存知の方は、是非にもお知らせください。

Spatial Graphs: References

Books:

- [BM] J.A.Bondy and U.S.R.Murty: Graph Theory with Applications,
North Holland, New York, 1976.
- [BZ] G.Burde and H.Zieschang: Knots, Walter de Gruyter, Berlin •
New York, 1985.
- [GT] J.L.Gross and T.W.Tucker: Topological Graph Theory, Wiley-
Interscience Publ., New York, 1987.
- [Ka1] L.H.Kauffman: Formal Knot Theory, Princeton Univ.Press, 1983.
- [Ka2] -----: On Knots, Ann.Math.Studies #115, Princeton Univ.
Press, 1987.
- [Ka3] -----: Knots and Physics, World Scientific, Singapore
• New Jersey • London • Hon Kong, 1991.
- [Kw] A.Kawauchi (ed): Knots 90, Proc.Intern.Conf.on Knot Theory and
Related Topics held in Osaka, Walter de Gruyter, Berlin •
New York, 1992.
- [R] D.Rolfen : Knots and Links, Math.Lecture Series 7, Publish or
Perish Inc., Berkeley, 1976.
- [S] DW.Sumners (ed.): New Scientific Applications of Geometry and
Topology, Proc.of Symposia in Appl.Math., vol.45, Amer.Math.
Soc., 1992.
- [W] W.T.White : Graphs, Groups and Surfaces, North-Holland Math.
Studies #8, North-Holland, 1984.

Spatial Graphs:

- [B] T.Böhme : On spatial representations of graphs. In: Contemporary Methods in Graph Theory (ed.R.Bodendiek), Mannheim, Wien • Zurich, 1990, 151-167.
- [Br] A.F.Brown : Embedding of graphs in E^3 . Ph.D.Desertation, Kent State Univ., 1977.
- [CG] J.H.Conway and C.McA.Gordon : Knots and links in spatial graphs, J.Graph Theory, 7(1985), 445-452.
- [EO] T.Endo and T.Ohtsuki: Notes on spatial representations of graphs, Hokkaido Math.J., 23(1994), 383-398.
- [Fp1] E.Flapan : Symmetries of knotted hypothetical molecular graphs, Discrete Appl.Math., 19(1988), 157-166.
- [Fp2] ----- : Symmetries of Mobius ladders, Math.Ann., 283(1989), 271-283.
- [FW] ----- and N.Weaver : Intrinsic chirality of complete graphs, Proc.Amer.Math.Soc., 115(1992), 233-236.
- [Fo] R.H.Fox : On the imbedding of polyhedra in 3-space, Ann.of Math. (2), 49(1948), 462-470.
- [Ha] M.Hara : Symmetry of θ_4 -curves, Tokyo J.Math., 14(1991), 7-16.
- [Hak1] T.Harikae : On rational and pseudo-rational θ -curves in the 3-sphere, Kobe J.Math., 7(1990), 125-138.
- [Hak2] ----- : Three-fold irregular branched coverings of some spatial graphs, Osaka J.Math., 28(1991), 639-648.
- [Hak3] ----- : Universal abelian coverings of spatial theta-curves. In: [Kw], 133-142.
- [Hak4] ----- : Tetrahedral branched coverings of spatial θ -curves. preprint.
- [HK] O.G.Harrold and S.Kinoshita : A theorem on θ -curves and its application to a problem of T.B.Rushing, Bull.de L' Acad.Polon.

- des Sci., 28(1980), 631-634.
- [Ho] T.Homma : On the existence of unknotted polygons on 2-manifolds in E^3 , Osaka Math.J., 6(1954), 129-134.
- [Ja] F.Jaeger : Plane graphs and link invariants, Discrete Math., 114 (1993),
- [JM] D.Jonish and K.C.Millett : Isotopy invariants of graphs, Trans. Amer.Math.Soc., 327(1991), 655-702.
- [Ka1] L.H.Kauffman : State models and Jones polynomial, Topology, 26 (1987), 395-407.
- [Ka2] ----- : New invariants in knot theory, Amer.Math.Monthly, 95(1988), 195-242.
- [Ka3] ----- : Invariants of graphs in three-space, Trans.Amer. Math.Soc., 311(1989), 697-710.
- [Ka4] ----- : A Tutte polynomial for signed graphs, Discrete Appl.Math., 25(1989), 105-127.
- [KSWZ]-----, J.Simon, K.Wolcott and P.Zhao : Invariants of theta-curves and other graphs in 3-space, Topology and its Appl., 49(1993), 193-216.
- [Kaw] A.Kawauchi : Almost identical imitations of (3,1)-dimensional manifold pairs, Osaka J.Math., 26(1989), 743-758.
- [Ki1] S.Kinoshita : Alexander polynomials as isotopy invariants I, Osaka Math.J., 10(1958), 263-271.
- [Ki2] ----- : On elementary ideals of polyhedra in the 3-sphere, Pacific J.Math., 42(1972), 89-98.
- [Ki3] ----- : On elementary ideals of θ -curves in the 3-sphere and 2-links in the 4-sphere, Pacific J.Math., 49(1973), 127-134.
- [Ki4] ----- : On elementary ideals of projective planes in the 4-sphere and oriented θ -curves in the 3-sphere, Pacific J. Math., 57(1975), 217-221.
- [Ki5] ----- : Elementary ideals in knot theory, Kwansai Gakuin

- Univ. Annual Studies, #25(1986), 183-208.
- [Ki6] ----- : On θ_n -curves in R^3 and their constituent knots,
In: Topology and Computer Science (ed. S. Suzuki), Kinokuniya Ltd
Comp., Tokyo, 1987, 21-27.
- [Ki7] ----- : On 3-fold irregular branched coverings of θ_4 -
curves in a 3-sphere. In: [Kw], 417-424.
- [Ki8] ----- : On spatial bipartite $K_{m,n}$'s and their constituent
 $K_{2,n}$'s. Kobe J. Math., 8(1991), 41-46.
- [Ki9] ----- : On the three-fold irregular branched coverings of
spatial four-valent graphs and its applications. J. Math. Cemi.,
14(1993), 47-55.
- [Ko1] K. Kobayashi : 完全グラフの準線形埋め込みについて, Science Report
Tokyo Woman's Christian Univ., No. 74-75(1986), 881-889.
- [Ko2] ----- : Spatial graph theory, 京大数理解析研究所講究録,
#670(1988), 91-105. (in Japanese)
- [Ko3] ----- : Reduced degree of Yamada polynomial and planarity
of graphs, Science report of Tokyo Woman's Christian Univ.,
Nos. 80-96(1989), 963-974.
- [Ko4] ----- : Standard spatial graph, Hokkaido Math. J., 21(1992),
117-140.
- [Ko5] ----- : Book presentation and local unknottedness of
spatial graphs, Kobe J. Math., 10(1993), 161-171.
- [KT] ----- and C. Toba : Topological symmetry group of spatial
graphs, Proc. TGRC-KOSEF, 3(1993), 153-171.
- [KS] T. Kohara and S. Suzuki : Some remarks on knots and links in
spatial graphs, In: [Kw], 435-445.
- [L] R. Litherland: The Alexander module of a knotted theta-curve,
Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 106(1989), 95-106.
- [MS] K. Makino and S. Suzuki : Sufficiently decomposable surfaces in
the 3-sphere, Yokohama J. Math., in press.

- [MS] ----- and ----- : Notes on neighborhood congruence of spatial graphs, 早稲田大学学術研究 (数学編), 42(1994), 13-19.
- [Ma] W.K.Mason : Homeomorphic continuous curves in 2-space are isotopic in 3-space, Trans.Amer.Math.Soc., 142(1969), 269-290.
- [Mi] J.Mikasa : Spaital θ -curve の projection について, 関西学院大学修士論文, 1993.
- [Miy] K.Miyazaki : The theta-curve cobordism group is not abelian, Tokyo J.Math., 17(1994), 165-169.
- [MOT] T.Motohashi, Y.Ohyama and K.Taniyama : Yamada polynomial and crossing number of spatial graphs, Rev.Mat.Univ.Complut.Madrid, 7(1994), 247-277.
- [MT] ----- and K.Taniyama : Homology and weak link homotopy of graphs in R^3 , preprint.
- [Mo1] M.Motto : Inequivalent genus 2 handlebodies in S^3 with homeomorphic complement, Topology and its Appl., 36(1990), 283-290.
- [Mo2] ----- : Maximal triads and prime decompositions of surfaces embedded in 3-manifolds, Trans.Amer.Math.Soc., 331(1992), 851-867.
- [MRS] R.Motwani, A.Ragunathan and H.Saran : Constructive results from graph minors: linkless embeddings, In: 29th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, 1988, IEEE, 398-409.
- [Mu1] J.Murakami : The representations of the q-analogue of Brauer's centralizer algebra and Kauffman polynomial of links, Bull.Res.Inst.Math.Sci.Kyoto Univ., 26(1990), 935-945.
- [Mu2] ----- : Invariants of spatial graphs, Adv.Studies in Pure Math. 20, Aspects of Low Dimensional Manifolds (ed.Y.Matsumoto and S.Morita), Math.Soc.of Japan, 1992, 147-166.
- [Naka] H.Naka : On the n-fold cyclic branched coverings of a spatial θ_n -curve, Kobe J.Math., 11(1994), 69-87.
- [Nakaol] M.Nakao : On the $Z_2 \oplus Z_2$ branched coverings of spatial

- K_4 -graphs, In: [Kw], 103-116.
- [Nakao2] ----- : On the $Z_2 \oplus Z_2$ branched coverings of spatial θ -curves, Kobe J.Math., 9(1992), 89-99.
- [Ne1] S.Negami : Polynomial invariants of graphs, Trans.Amer.Math.Soc., 299(1987), 601-622.
- [Ne2] ----- : Ramsey theorem for knots, links and spatial graphs, Trans.Amer.Math.Soc., 324(1991), 527-541.
- [Oh] Y.Ohyama : Local moves on a graph in R^3 , preprint.
- [Ot] T.Otsuki : Knots and links in certain spatial complete graphs, preprint.
- [RT] N.Yu.Reshetikhin and V.G.Toraev: Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups, Commun.Math.Thys., 127(1990), 1-26.
- [RST1] N.Robertson, P.D.Seymour and R.Thomas : Linkless embeddings of graphs in 3-space, Bull.Amer.Math.Soc., 28(1993), 84-89.
- [RST2] -----, ----- and ----- : A survey of linkless embeddings, Contemporary Math., 147(1993), 125-136.
- [RST3] -----, ----- and ----- : Kuratowski chains, preprint.
- [RST4] -----, ----- and ----- : Petersen family minors, preprint.
- [RST5] -----, ----- and ----- : Sachs' linkless embedding conjecture, preprint.
- [Ro] D.F.Robinson : Symmetric embeddings of graphs, J.Combin.Theory, 9(1970), 377-400.
- [Sa] H.Sachs: On a spatial analogue of Kuratowski's theorem on planar graphs--an open problem, In: Graph Theory, Lecture Notes in Math., #1018, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1983, 230-241.
- [Sak] M.Sakuma : Homology of abelian coverings of links and spatial graphs, preprint.

- [Sc1] M.Scharlemann : Planar graphs, family trees and braids.
- [Sc2] ----- : Some pictorial remarks on Suzuki's brunnian graph, In: Topology 90, OSU Math.Res.Inst.Publications #1, Walter de Gruyter, Berlin • New York, 1992, 351-354.
- [ST1] ----- and A.Thompson : Detecting unknotting graphs in 3-space, J.Diff.Geom., 34(1991), 539-560.
- [ST2] ----- and ----- : Pushing arcs and graphs around in handlebodies, preprint.
- [Si1] J.Simon : Topological chirality of certain molecules, Topology, 25(1986), 229-235.
- [Si2] ----- : Molecular graphs as topological objects in space, J.Comput.Chem., 8(5) (1987), 718-726.
- [Si3] ----- : A topological approach to the stereochemistry of non-rigid molecules, In:Graph Theory and Topology in Chemistry (ed. R.B.King and D.H.Rouvray), Elsevier, Amsterdam, 1987, 43-75.
- [Si4] ----- : Knots and chemistry, Proc.Symposia in Applied Math., 45(1992), 97-130.
- [SiWo] J.Simon and K.Wolcott : Minimally knotted graphs in S^3 , Topology and its Appl., 37(1990), 163-180.
- [SM1] M.Shimabara : Knots in certain spatial graphs, Tokyo J.Math., 11(1988), 405-413.
- [SM2] ----- : Topological Ramsey theorem for complete bipartite graphs, J.Comb.Theory B, 62(1994), 164-179.
- [SM3] ----- : Complete bipartite graphs in R^3 with knotted circles or linked families of disjoint circles.
- [SS] T.Soma and H.Sugai : Rotation of spatial graphs, preprint. Top. its Appl., to appear.
- [SSY] -----, ----- and A.Yasuhara : Disk/band surfaces of spatial graphs, preprint.
- [Sul] D.W.Sumners : Knots, macromolecules and chemical dynamics, In:

- Graph Theory and Topology in Chemistry, Elsevier, 1987, 297-318.
- [Su2] ----- : The role of knot theory in DNA research, In:
Geometry and Topology, Marcel Dekker, 1987, 297-318.
- [Su3] ----- : Knot theory and DNA, Proc.Symposia in Applied Math.,
45(1992), 39-72.
- [Sz1] S.Suzuki : On linear graphs in 3-sphere, Osaka J.Math., 7(1970),
375-396.
- [Sz2] ----- : On a complexity of a surface in 3-sphere, Osaka J.
Math., 11(1974), 113-127.
- [Sz3] ----- : On surfaces in 3-sphere, prime decompositions,
Hokkaido Math.J., 4(1975), 179-195.
- [Sz4] ----- : On surfaces in 3-sphere, stable congruence, Math.
Japonica, 20(1975), 65-83.
- [Sz5] ----- : On surfaces of genus 3 in 3-sphere, Math.Sem.Notes
Kobe Univ., 9(1981), 459-470.
- [Sz6] ----- : Alexander ideals of graphs in the 3-sphere, Tokyo J.
Math., 7(1984), 233-247.
- [Sz7] ----- : Almost unknotted θ_n -curves in the 3-sphere, Kobe J.
Math., 1(1984), 19-22.
- [Sz8] ----- : A prime decomposition theorem for a graph in the
3-sphere, In:Topology and Computer Science(ed.S.Suzuki),
Kinokuniya Ltd.Camp., Tokyo, 1987, 259-276.
- [Sz9] ----- : Knots and links in spatial graphs, 京大数理解析研究所
講究録, #670(1988), 74-90. (in Japanese).
- [Sz10] ----- : 空間グラフ上の結び目と絡み目, 早大教育学部学術研究
(数学編), 37(1988), 17-29.
- [Sz11] ----- : Constituent knots and links of spatial graphs,
京大数理解析研究所講究録, #686(1989), 55-86. (in Japanese).
- [Sz12] ----- : 空間グラフ上の結び目と絡み目II, 早大教育学部学術研究
(数学編), 38(1989), 21-28.

- [Sz13] ----- : 符号付きグラフのKirchhoff-Goeritz行列, 早大教育学部
学術研究 (数学編), 40(1991), 9-18.
- [Sz14] ----- : 3次元球面における閉曲面の位置問題, 早大教育学部学術
研究 (数学編), 41(1993), 1-10.
- [Ta1] K.Taniyama : Cobordism of theta curves in S^3 , Math.Proc.Camb.
Phil.Soc., 113(1993), 97-106.
- [Ta2] ----- : Cobordism, homotopy and homology of graphs in R^3 ,
Topology, 33(1994), 509-523.
- [Ta3] ----- : Link homotopy invariants of graphs in R^3 , Rev.Mat.
Univ.Complut.Madrid, 7(1994), 129-144.
- [Ta4] ----- : Homology classification of spatial embeddings of a
graph, Top.its Appl., in press.
- [Ta5] ----- : On embeddings of a graph into R^3 , (Proc.Joint US-
Israel Workshop on Geometric Topology), Contemporary Math.,
164(1994), 239-246.
- [Ta6] ----- : Total curvature of graphs in Euclidean spaces,
preprint.
- [Th] A.Thompson : A polynomial invariant for graphs in a 3-manifold.
- [Ts1] Y.Tsukui : On surfaces in 3-space, Yokohama Math.J., 17(1970),
93-104.
- [Ts2] ----- : On a prime surface of genus 2 and homeomorphic
splitting of 3-sphere, Yokohama Math.J., 23(1975), 63-75.
- [Wa] F.Waldhausen : Heegaard-Zerlegungen der 3-Sphäre, Topology,
7(1968), 196-203.
- [Wo] K.Wolcott : The knotting of theta curves and other graphs in S^3 .
In: Geometry and Topology (ed.McCrory and T.Shifrin), Marcel
Dekker, New York, 1987, 325-346.
- [Wu] Ying-Qing Wu : On planarity of graphs in 3-manifolds, Comm.Math.
Helv., 67(1992), 635-647.

- [YK] T.Yajima and S.Kinoshita : On the graphs of knots, Osaka Math.J.,
9(1957), 155-163.
- [Yd1] S.Yamada : An invariant of spatial graphs, J.Graph Theory, 13
(1989), 537-551.
- [Yd2] ----- : A topological invariant of spatial regular graphs.
In:[Kw], 447-454.
- [Ym] M.Yamamoto : Knots in spatial embeddings of the complete graph
on four vertices, Topology and its Appl., 36(1990), 291-298.
- [Ys] A.Yasuhara : Disk/band surface and spatial-graph homology,
preprint.
- [Ye] D.N.Yetter : Category theoretic representations of knotted
graphs in S^3 , Adv.in Math., 77(1989), 137-155.
- [Yo] Y.Yokota : Topological invariants of graphs in 3-space,
preprint.

Graph Theory:

- [A] D.Archdeacon: A Kuratowski theorem for the projective plane,
J.Graph Theory, 5(1981), 243-246.
- [BK] F.Bernhart and P.C.Kainen : The book thickness of a graph,
J.Comb.Theory B, 27(1979), 320-331.
- [Ku] K.Kuratowski : Sur le probleme des courbes gauches en topologie,
Fund.Math., 15(1930), 271-283.
- [RS] N.Robertson and P.D.Seymour : Graph minors XIII, the disjoint
paths problem.
- [Tm] C.Thomassen : Kuratowski's theorem, J.Graph Theory, 5(1981), 225
-241.