

Some Remarks on Knots and Links in Spatial Graphs

鈴木 晋一
(早稲田大学 教育学部)

§0. Introduction

本稿で扱うグラフ (graphs) はすべて有限グラフである。
グラフ $G = (V, E)$ の 3次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 中への
polygonal を embedding $f: G \rightarrow \mathbb{R}^3$ について, 像 $G_f = f(G)$
を, G の 空間内の実現 (spatial representative) または 空間
グラフ (spatial graph) と呼ぶ。

グラフ G の空間内の実現 G_f を, \mathbb{R}^3 における全同位 (ambient
isotopy) によって分類する。空間内の実現 G_f の全同位 ≈ 1 に
属する同値類を $[G_f]$ と示し, G_f の 全同位類 とする。

グラフの \mathbb{R}^3 における位置の問題 (knotting problem) を考察する
方法としては, 次の 2つの大きな流れがある。

(イ) 結び目 (knots)・絡み目 (links) を サイクルグラフの位置の問題と
考え, 結び目理論で考えられている概念や不変量を, 空間
グラフにまで一般化する。

(ロ) 空間グラフ上の部分グラフとしてのサイクルからなる結び目や
絡み目の集合を調べることにより, 4次元空間グラフの特徴付け
をする。

本誌に筆者は (V) に因る話題を整理して紹介してきた。
 その概要は、筆者の報告 [1], [2], [3] で既に述べてあるので
 この報告では、必要最低限の定義を述べて、その後に判明した
 結果や問題点をまとめてみたい。尚、[3] で急いで紹介した
 Motwani-Ragunathan-Saran [5] の結果には、誤りや飛躍が
 あるので、本稿でその穴埋めをする。

§1. Self-linked & Self-knotted Graphs

1.1 定義 (1) グラフ G が self-linked であるとは、(任意の埋蔵
 $f: G \rightarrow \mathbb{R}^3$ に対し、disjoint なサイクルの対 $\{c_1, c_2\}$ が
 存在して、 $f(c_1 \cup c_2)$ が non-trivial な絡み目となる場合を
 いう。

(2) グラフ G が self-knotted であるとは、(任意の埋蔵 $f: G \rightarrow$
 \mathbb{R}^3 に対し、サイクル c が存在して、 $f(c)$ が non-trivial な
 絡み目となる場合をいう。

6頂点完全グラフ K_6 が self-linked であること、7頂点完全グラフ
 K_7 が self-knotted であることは、相当に昔から経験的に予想され
 問題とされてきたように、公表された証明もいくつか存在するよう
 である。数論論文に登場したのは 1980年代に入ってからである。

1.2 定理 (Sachs [7] 1983). 次ページの図1に示した8頂点の
 グラフは self-linked である。□

Sachs は 絡み解消数 (unlinking number) を用い、互いに交わ
 らないサイクルの対をすべて数えあげることによって、 $K_{4,4-e}$ が
 self-linked であることを示し、残りも同様に証明できると主張して
 いる。絡み解消数の定義は容易であるが、その決定は極めてむず
 かしい不変量で、絡み目理論の立場からみると、Sachs の証明は
 もう一つ明解でない。

その後 1985年11月 Conway-Gordon [4] は、 K_6 について、別証

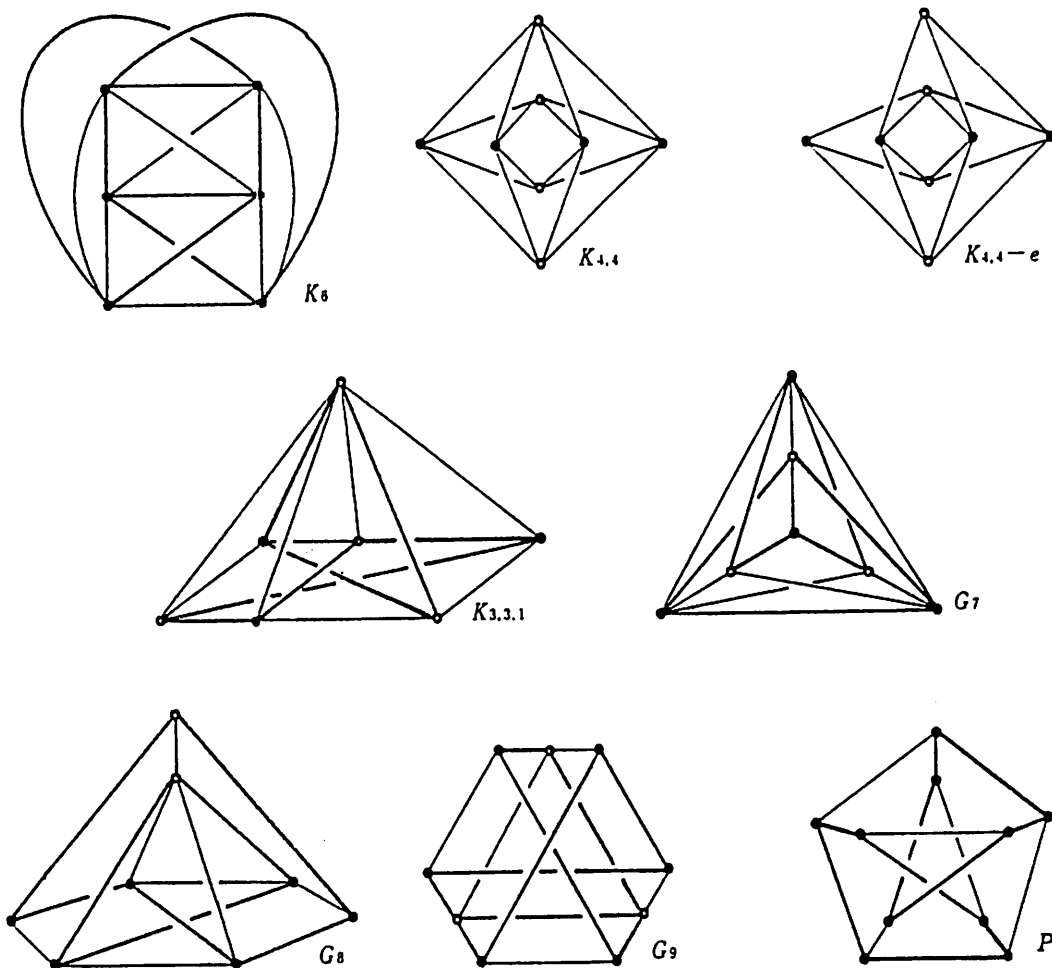


図 1

明を与えた. $\therefore \exists$ は linking number (mod 2) を用いた証明で、
 極端に明解である. 尚、残りのグラフは self-linked であることは、
 Conway-Gordon 流の証明が容易に確かめられる。

1.3. 是理 (Conway-Gordon [4], Shimabara [8])

- (1) K_7 は self-knotted である。
- (2) 完全二部グラフ $K_{5,5}$ は self-knotted である。□

Conway-Gordon の証明は、Arf-invariant (= Conway 多項式
 の z^2 の係数 $a_2 \pmod{2}$) を用いたものである。Shimabara は、 \exists は
 $a_2 \pmod{n}$ に一般化する \exists である。上の (2) の証明は

(172)

成功した。

∴ \mathbb{Z} 次 a Notation を導入する。

$\mathbb{F}_{NP} :=$ the family of non-planar graphs,

$\mathbb{F}_P = \mathbb{F}_{NP}^c :=$ the family of planar graphs,

$\mathbb{F}_{SL} :=$ the family of self-linked graphs,

$\mathbb{F}_L = \mathbb{F}_{SL}^c :=$ the family of non self-linked graphs
(= the family of linkless embeddable graphs),

$\mathbb{F}_{SK} :=$ the family of self-knotted graphs,

$\mathbb{F}_K = \mathbb{F}_{SK}^c :=$ the family of non self-knotted graphs
(= the family of knotless embeddable graphs).

グラフ理論でよく用いられる critical (臨界) の概念を self-linkedness や self-knottedness に (同じく) 自然に導入される。この易いように, planarity の場合も含めて定義を述べる。

1.4 定義 (1) グラフ G が planarity に (同じく) critical である

$$\iff G \in \mathbb{F}_{NP}, \delta(G) \geq 3, \\ \forall H \subsetneq G (H \in \mathbb{F}_P).$$

(2) グラフ G が self-linkedness に (同じく) critical である

$$\iff G \in \mathbb{F}_{SL}, \delta(G) \geq 3, \\ \forall H \subsetneq G (H \in \mathbb{F}_L).$$

(3) グラフ G が self-knottedness に (同じく) critical である

$$\iff G \in \mathbb{F}_{SK}, \delta(G) \geq 3, \\ \forall H \subsetneq G (H \in \mathbb{F}_K).$$

∴ $\delta(G)$ は、グラフ G の最小次数 (degree) を示し、 $H \subsetneq G$ は、 H が G の proper subgraph であることは示す。

(4) planarity (resp. self-linkedness, self-knottedness) に関して critical なグラフの family は $C(\mathbb{F}_{NP})$ (resp. $C(\mathbb{F}_{SL}), C(\mathbb{F}_{SK})$) である。

1.5 Proposition

(1) $C(\mathbb{F}_{NP}) = \{K_5, K_{3,3}\}$.

(2) $C(\mathbb{F}_{SL}) \supset \{K_6, K_{3,3,1}, G_7, G_8, G_9, K_{4,4-e}, P\}$.

(3) $C(\mathbb{F}_{SK}) \supset \{K_7\}$. □

(1) は Kuratowski (1930) による古典的の大定理, (2) は Sachs による図1に示した空間グラフの ($K_{4,4}$ を除いて) Hopf link を唯一含むことによる。(3) は図2に示した K_7 の空間内の実理には三葉型結び目のみ (残りはすべて trivial knot) を含むことによる。 $K_{5,5}$ は $4k+2$ 個の non-trivial knots を含む。多分 critical ではない。

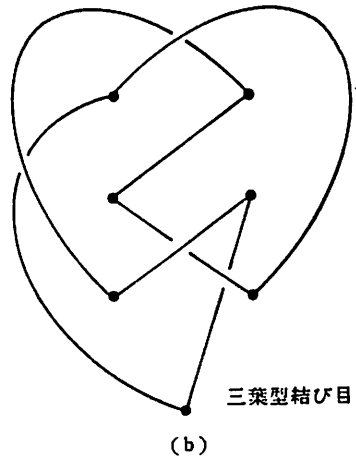
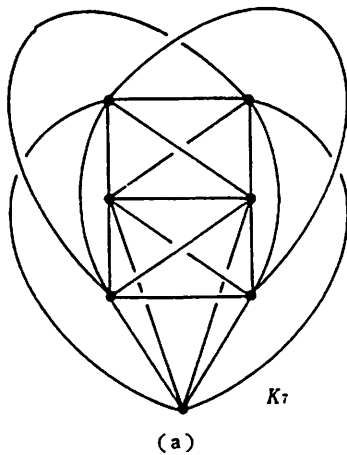


図 2

§2 Graph Minors

2.1 定義: (1) グラフ G とその辺 $e = uv \in E$ について, グラフ $G - e$ の頂点 u と v を同一視する: \sim により, 得られるグラフを G/e と書き, G から辺 e の 辺縮約 (edge contraction) により, 得られるグラフという.

(2) グラフ H が グラフ G の minor であるとは, G の部分グラフ G' と G' の辺 e_1, e_2, \dots, e_n が存在して, G' から辺 e_1, e_2, \dots, e_n を順次辺縮約する: \sim により, H が得られる場合, つまり

$$H \cong (\dots((G'/e_1)/e_2)/\dots)/e_n \quad (\text{同型})$$

となる場合をいし, $H \leq G$ と示す.

$\therefore n=0$ の場合も許すものとす.

有限グラフの (注意の族 \mathbb{F} において, この minor 関係 \leq は自然に半順序を定める.

2.2 定義: \mathbb{F} を, 性質 $P(\mathbb{F})$ を満たすグラフの family とする.

(1) family \mathbb{F} (または 性質 $P(\mathbb{F})$) の minor reduction \leq に関して 閉じている (closed) とは, 次の通りをいう:

$$\forall G \in \mathbb{F} \text{ について, } H \leq G \Rightarrow H \in \mathbb{F}.$$

(2) \mathbb{F} に属さない minor minimal なグラフ全体の集合を $\Omega(\mathbb{F})$ と書き, \mathbb{F} (または $P(\mathbb{F})$) に対して 障害集合 (obstruction set) という. つまり

$$G \in \Omega(\mathbb{F}) \iff G \notin \mathbb{F}, \quad \forall H \leq G (H \in \mathbb{F}).$$

$\Omega(\mathbb{F})$ の元は, \mathbb{F} (または $P(\mathbb{F})$) に対して 禁止グラフ (forbidden graph) と呼ばれている.

次の命題は容易に確かめられる.

2.3 Proposition $\mathbb{F}_P, \mathbb{F}_L, \mathbb{F}_K$ はいずれも minor reduction に関して閉じている. \square

Kuratowski の古典的大定理 (Prop. 1.5 (1)) を, Wagner は次のように言い換えた.

2.4 Proposition (Wagner [10]) $\Omega(\mathbb{F}_p) = \{K_5, K_{3,3}\}$. \square

ところが最近 Robertson と Seymour は, 彼等が膨大な一連の仕事の中で, 長らく未解決であった Wagner の予想 ([9]) を解決したとのことである.

2.5 Proposition (Robertson-Seymour [6]) グラフの family \mathbb{F} の minor reduction ≤ 1 に属するものは, $\Omega(\mathbb{F})$ は有限集合である. \square

よって当然誰かが思いつくような次の問題がある.

2.6 問題 $\Omega(\mathbb{F}_L), \Omega(\mathbb{F}_K)$ を決定せよ. \square

是表 2.1 から,

$$\Omega(\mathbb{F}_L) \subset C(\mathbb{F}_{SL}), \quad \Omega(\mathbb{F}_K) \subset C(\mathbb{F}_{SK})$$

が成立することから直にわかる. Motwani-Raghunathan-Saran [5] の主定理は,

$$\Omega(\mathbb{F}_L) = \{K_6, K_{4,4-e}, K_{3,3,1}, G_7, G_8, G_9, P\}$$

であるが, 彼らの証明に用いている Lemma ([5, Lemma 3]) は誤りであり, 頂点数と辺数に関する帰納法による議論そのものにも無理がある. [5, Lemma 3] の反例については [2, 例題 1] に詳しく述べたので参照されたい. 図 1 に示した 7 つの埋蔵は, Hopf-link を唯一含むことから確かめられるので, 次の成り立つ.

2.7 定理 (Sachs [7], Conway-Gordon [4] 他)

$$\Omega(\mathbb{F}_L) \supset \{K_6, K_{4,4-e}, K_{3,3,1}, G_7, G_8, G_9, P\} \quad \square$$

(76)

一方, $\Omega(\mathbb{F}_K)$ については, 図2から 次のように容易にわかる.

2.8 定理 (Conway-Gordon [4]) $\Omega(\mathbb{F}_K) \ni K_7$. \square

とすると Motwani-Raghunathan-Saran [5] では, 完全4部グラフ $K_{3,3,1,1}$ も $\Omega(\mathbb{F}_K)$ の元であることが, Conway-Gordon [4] と同様の方法で証明できると述べている. しかしこの事実も極めて疑わしい. この事情は [2] にも挙げた次の例による.

2.9 例題 (図3) 次の図3の G_1 と G_2 は, いずれも $K_{3,3,1,1}$

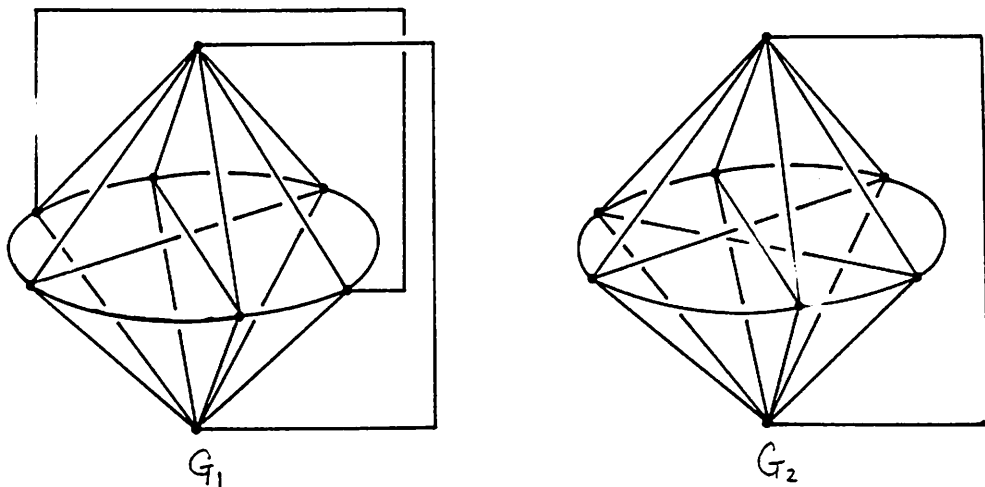


図3

の空間内の実現を示す. G_1 には 唯一の三葉型結び目があり, G_2 には 丁度 2つの三葉型結び目があり, いずれも Hamilton サイクルとして含まれることが確かめられる. この事実は, $K_{3,3,1,1}$ 上の サイクルの集合 Γ として, どのようなクラスを送んでも, Arf 不変量だけでは解決がむずかしいことを示している.

実際, $K_{3,3,1,1} \in \mathbb{F}_{SK}$ であることが示される. 上の G_1 を利用して, $K_{3,3,1,1} \in \Omega(\mathbb{F}_K)$ も直に確かめられる. この辺の調べでは $K_{3,3,1,1}$ の self-knotted であるかは確かめようであるが, 残念ながら 未だ解決できない難問である.

2.10 例題 $\Omega(F_L) \cong C(F_{SL})$. $\Omega(F_K) \cong C(F_{SK})$.

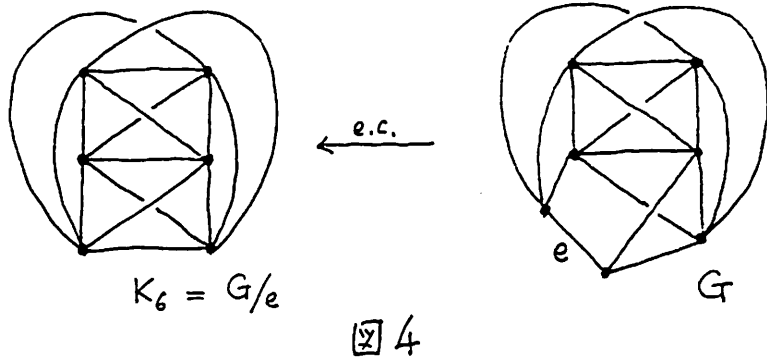


図4に示したグラフ G については, 図中の辺 e を削り G/e が K_6 になることがわかる. $K_6 \in \Omega(F_L) \subset C(F_{SL})$ であることは 1.5 と 2.7 で述べた. 従って 2.3 の対偶から $G \in C(F_{SL})$ であるから, 定義から $G \in \Omega(F_L)$ である.

同様にして, $C(F_{SL})$ の元で, $\Omega(F_L)$ には属さないグラフがいくつでも構成できる.

また $\Omega(F_K) \cong C(F_{SK})$ を示す例も同様にして構成できる. 実際 $K_7 = K_6 * K_1$ であるから, 上の図4の G について, $G' = G * K_1$ と考えれば, $G' \in \Omega(F_K)$, $G' \in C(F_{SK})$ である.

一般に $K_7 \in \Omega(F_K)$ を利用して, 多くの例をつくることができる.

§3. ΔY transformations

3.1 定義 グラフ $G = (V, E)$ が $u, v, w \in V$ を頂点とする3辺形 (= 3-サイクル) を持つとする. G からこの3辺 uv, vw, wu を除き, 新しい頂点 x と新しい3辺 xu, xv, xw を付加して得られるグラフを G' とする(次ページ 図5参照):

$$G' = (V \cup \{x\}, E - \{uv, vw, wu\} \cup \{xu, xv, xw\}).$$

このとき, G' は G から ΔY 変換 (deltawye transformation,

(triangle-star transformation) によって得られたという。逆: G は G' から Y Δ 変換 によって得られたという。

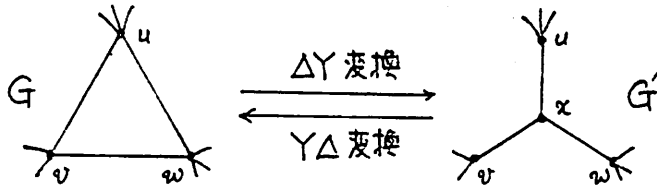


図5

Y Δ 変換は, グラフの planarity を保つ (従って ΔY 変換はグラフの non-planarity を保つ) ことから, グラフの曲面への embeddings の研究において, この変換はかなり昔から利用されてきた。定義から, 次の命題も容易に証明される。

3.2. Proposition グラフ G' は, グラフ G から ΔY 変換によって得られたとすると, 次の成り立ち:

- (1) $G' \in \mathbb{F}_L \Rightarrow G \in \mathbb{F}_L$, $G' \in \mathbb{F}_K \Rightarrow G \in \mathbb{F}_K$.
- (2) $G \in \mathbb{F}_{SL} \Rightarrow G' \in \mathbb{F}_{SL}$, $G \in \mathbb{F}_{SK} \Rightarrow G' \in \mathbb{F}_{SK}$. \square

ところで, 図1に示したグラフのうち $K_{4,4}$ を除く7個は次の関係にある。

$$\begin{array}{ccccccc}
 K_6 & \xrightarrow{\Delta Y} & G_7 & \xrightarrow{\Delta Y} & K_{4,4}-e & & \\
 & & & \searrow^{\Delta Y} & & & \\
 K_{3,3,1} & \xrightarrow{\Delta Y} & G_8 & \xrightarrow{\Delta Y} & G_9 & \xrightarrow{\Delta Y} & P
 \end{array}$$

従って, このグラフが \mathbb{F}_{SL} の元であることを示すためには, K_6 と $K_{3,3,1}$ について示せば十分であることがわかる。実際 Sachs もこの事実に気付いていたようである。

K_7 : ΔY 変換を次々と施すことによって13個のグラフが得られる。3.2(2)によって, このグラフすべて \mathbb{F}_{SK} の元であるが, 小原[11]はこれを確かめた。

3.3 定理 ([Kohara]) K_7 から ΔY 変換で得られる13個のグラフはすべて $\Omega(\mathbb{F}_K)$ の元である。 \square

そこで、これから13個のグラフを(図示)するのはやめにすむが、最初の変換のみ描いておく。

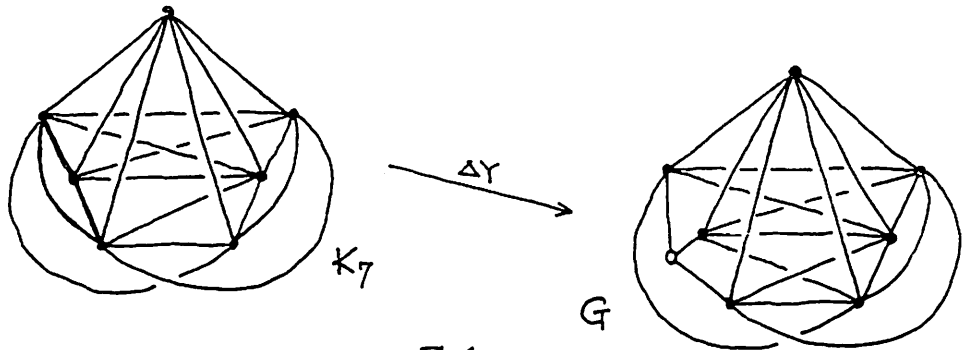


図6

図6の右のグラフ G は、 K_7 の太線の3辺形に ΔY 変換を施して得られたグラフ(とその空間内の実現)である。 $G \in \mathcal{F}_{SK}$ であるが、この実現の中には、三葉型結び目の唯一含まれることが、図2と対応で確かめられる。ところがこの三葉型結び目は0の頂点を通らない。つまり G の Hamilton サイクルではない。

この事実は、グラフが self-knotted であるか否かを調べる際に、Hamilton サイクルの集合 Γ だけを対象にするのは十分でないことを示す。

尚、図1から $K_{3,3,1}$ と $K_{4,4}$ を除く6個のグラフと1点 K_1 との join はすべてこの13個のグラフの系列のどれかを真部分グラフとして含むことになり、 $\Omega(\mathcal{F}_K)$ の元ではないことがわかる。

また $K_{3,3,1,1}$ に ΔY 変換を施すことにより25個のグラフが得られる。これらも注意深く調べると、 $K_{3,3,1,1} \in \Omega(\mathcal{F}_K)$ ならば $\Omega(\mathcal{F}_K)$ に属することがわかる。 $\Omega(\mathcal{F}_K)$ の元はこれから40個で全てありうというの實現の予想でもある。

引用文献

- [1] 鈴木晋一：空間グラフ上の結び目と絡み目，早大教育学部学術研究
(数学編)，37(1988)，17-29.
- [2] ————：同上 II，ibid. 38(1989)，21-28.
- [3] ————：Constituent Knots and Links of Spatial Graphs，京大
教理解析研究所講義録 686(1989)，55-86.
- [4] J.H. Conway - C. McA. Gordon：Knots and links in spatial graphs，
J. Graph Theory，7(1985)，445-452.
- [5] R. Motwani, - A. Raghunathan - H. Saran：Constructive results
from graph minors, linkless embeddings, In the 29th Annual
Symposium on Foundations of Computer Science, 1988,
IEEE, 398-409.
- [6] N. Robertson - P.D. Seymour：Graph minors XVI, Wagner's con-
jecture, to appear.
- [7] H. Sachs：On a spatial analogue of Kuratowski's theorem on
planar graphs.— an open problem, In Graph Theory,
Lagow 1981, Lecture Notes in Math. #1018, Springer,
Berlin-Heidelberg, 1983, 230-241.
- [8] M. Shimabara：Knots in certain spatial graphs, Tokyo J. Math.,
11(1988)，405-413.
- [9] K. Wagner：Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe,
Math. Ann., 114(1937)，570-590.
- [10] ————：Bemerkung zu Hadwigers Vermutung, Math. Ann.,
141(1960)，433-451.
- [11] T. Kohara：早大大学院理工学研究科 修士論文 1990.