箱根セミナ記録 87(1987)15-27

Acyclic Stable Sets and Acyclic Decomposing Sets of Graphs

鈴木晋一
(早稲田大学 教育学部)

昨年のこの研究会において筆者は，グラフに対して，被覆と独立集合の概念の一般化として，非輪状被覆と非輪状独立集合の概念を導入し，非輪状被覆数と非輪状独立数の2つの不変量を定義した([7],[8]参照)。その後 Akiyama-Watanabe [1] や同氏等のグループによる一連の学会発表によって，これらの概念は別の観点からも導かれまた研究されていることが判明し，グラフの不変量としての意義も広くなった。(非輪状被覆と非輪状独立集合という名称も，あまり適当とは言えないので，表題のように変更した。§1参照。)

今回のお話しの目的は，被覆・独立集合に対して定義される「臨界」の概念を，これらの新しい概念に対しても自然に持ち込み，Berge [2,第17章]，Plummer [5] に沿って，その初等的・基本的な性質を調べることである。

1. 準備

本稿で扱うグラフは，すべてループを持たない有限グラフである。

$G=(V(G), E(G))$ (または $G=(V,E)$) によって，$V(G)$ (または V) を頂点集合とし，$E(G)$ (または E) を辺集合とするグラフを表す。多重辺を持たないグラフを単純グラフという。

$G=(V,E)$ をグラフとする。V の部分集合 $V'\neq\phi$ について，V' を頂点集合とする G の極大部分グラフを $\langle V'\rangle_G$ と書き，V' によって誘導された G の誘導部分グラフという。特に，真部分集合 $U\subset V$ について，$V'=V-U$ によって誘導される G の部分グラフ $\langle V'\rangle_G=\langle V-U\rangle_G$ を，$G-U$ で示す。

また $U=\{u\}$ のとき，$G-\{u\}$ を単に $G-u$ で示す．

辺集合 E の部分集合 E' について，$G-E'$ によって G の部分グラフ $(V, E-E')$ を表す．特に $E'=\{e\}$ のとき，$G-\{e\}$ を単に $G-e$ で示す．

一般に有限集合 X について，その元の個数を $|X|$ で示す．特に，グラフ $G=(V,E)$ の位数(order) $|V|$ を $\nu(G)$ で，サイズ(size) $|E|$ を $\varepsilon(G)$ で示す．

この他，特に断わらない限り，記法・用語は Bondy-Murty [3] によるものとし，日本語は 浜田・秋山 [6] によるものとする．

さて，後の定義との比較のために，グラフの独立集合と被覆の定義を記しておく．(英語の方も，用語が統一されていない．)

1.1. 定義 $G=(V,E)$ をグラフとする．

(1) 部分集合 $S\subset V$ が G の独立集合(independent set, stable set [2]) であるとは，$\langle S\rangle_G=(S,\emptyset)$ (空グラフ，辺を持たないグラフ) となる場合をいう．

G の独立集合 S が最大(maximum) であるとは，G の任意の独立集合 S' について $|S|\geq|S'|$ が成立する場合をいい，最大独立集合 S の元の個数 $|S|$ を $\beta_0(G)$ で示し，G の独立数(independence number, stability number [2]) という．

(2) 部分集合 $W\subset V$ が G の被覆(covering) であるとは，$G-W=\langle V-W\rangle_G=(V-W,\emptyset)$ (空グラフ) となる場合をいう．

G の被覆 W が最小(minimum) であるとは，G の任意の被覆 W' について，$|W|\leq|W'|$ が成立する場合をいい，最小被覆 W の元の個数 $|W|$ を $\alpha_0(G)$ で示し，G の被覆数(covering number) という．

次に挙げるのが [7], [8] で導入した不変量であるが，記号も変えてある．

1.2 定義 $G=(V,E)$ をグラフとする．

(1) 部分集合 $S\subset V$ が G の非輪状安定集合(acyclic stable set) であるとは，$\langle S\rangle_G$ が非輪状(acyclic) であるときをいう．

Gの非輪状安定集合 S が最大(maximum)であるとは，Gの任意の非輪状安定集合 S′について $|S| \geq |S'|$ が成立する場合をいい，Gの最大非輪状安定集合 S の元の個数 $|S|$ を $\beta(G)$ で示し，Gの非輪状安定化数(acyclic stability number)という．

(2) 部分集合 $W \subset V$ が G の非輪状分解集合(acyclic decomposing set)であるとは，$G-W = \langle V-W \rangle_G$ が非輪状であるときをいう．

Gの非輪状分解集合 W が最小(minimum)であるとは，Gの任意の非輪状分解集合 W′について $|W| \leq |W'|$ が成立する場合をいい，Gの最小非輪状分解集合 W の元の個数 $|W|$ を $\alpha(G)$ で示し，Gの非輪状分解度数(acyclic decomposing number)という．

上の定義から，次の2つの命題は，直ちにわかる．この後度々用いるので[7],[8]から再録しておく．

1.3 命題([7, Prop. 1.4],[8,命題1.4]) 任意のグラフ G について，次が成り立つ：

(1) $1 \leq \beta_0(G) \leq \beta(G) \leq \nu(G)$,

(2) $0 \leq \alpha(G) \leq \alpha_0(G) \leq \nu(G)-1$. □

1.4 命題([7, Th.1.5],[8,定理1.5]) 任意のグラフ $G=(V,E)$ について，次が成り立つ：

(1) $W \subset V$ が G の非輪状分解集合である
$\Longleftrightarrow$ $S = V-W$ が G の非輪状安定集合である．

(2) $\alpha(G) + \beta(G) = \nu(G)$. □

上の命題1.4によって，$\alpha(G)$ の言葉を用いて定義される概念は，β の言葉を用いて全く同じになるように定義することができる．どちらを用いるかは，取り扱う問題によるのと，個人的な趣味の問題である．本稿では煩をいとわず，なるべく両方で書くことにする．

次の性質も，定義1.2から直ちにわかる．

1.5 性質. グラフ G が連結なグラフ $G_1, G_2, \cdots, G_n$ の直和 (disjoint union) ならば，次が成り立つ：

(1) $\alpha(G) = \alpha(G_1) + \alpha(G_2) + \cdots + \alpha(G_n)$,

(2) $\beta(G) = \beta(G_1) + \beta(G_2) + \cdots + \beta(G_n)$. □

この性質より，以下の考察において，ほとんどの場合に，連結なグラフのみを考えれば十分であることを注意しておく。

2. 臨界点と臨界辺

非輪状分解集合の定義 1.2(2) から，グラフ G とその部分グラフ H について，明らかに $\alpha(H) \leqq \alpha(G)$ が成り立つ。特にこの不等式は，頂点 v と辺 e について $H = G - v$ または $H = G - e$ の場合にも成り立つ。そこで次の定義が意味を持つことになる。

2.1 定義 $G = (V, E)$ をグラフとする。

(1) 頂点 $v \in V$ が G の α-臨界点 (α-critical vertex) であるとは，$\alpha(G - v) < \alpha(G)$ が成立する場合をいい，辺 $e \in E$ が G の α-臨界辺 (α-critical edge) であるとは，$\alpha(G - e) < \alpha(G)$ が成立する場合をいう。

(2) G の α-臨界点の集合を $V_{\alpha c}(G)$ で表し，α-臨界辺の集合を $E_{\alpha c}(G)$ で表す。

$V_{\alpha c}(G) = V$ のとき，G を α-点臨界 (α-vertex critical),

$E_{\alpha c}(G) = E$ のとき，G を α-辺臨界 (α-edge critical)

であるという。

(3) $v \in V$ が α-自由 (α-free) $\Leftrightarrow$ $\exists$ G の最小非輪状分解集合 W ($W \ni v$).

$v \in V$ が α-本質的 (α-essential)

$\Leftrightarrow$ G の $\forall$ 最小非輪状分解集合 W について，$W \ni v$.

従って特に次が成り立つ：

グラフ G が α-点臨界 $\Leftrightarrow$ $\forall v \in V$ が α-自由.

以下，上の定義に基づく初等的な性質を調べることにする．

2.2 性質 v と e をそれぞれグラフ G の α-臨界点・α-臨界辺とすれば，次の等式が成り立つ：

$$\alpha(G-v)=\alpha(G-e)=\alpha(G)-1. \qquad \square$$

2.3. 性質 グラフ $G=(V,E)$ について，$\alpha(G)>0$ ならば，α-点臨界部分グラフ H と α-辺臨界部分グラフ H' が存在して，次を満す：

$$\alpha(H)=\alpha(G)=\alpha(H').$$

(証明) $\forall v\in V$ について，性質 2.2 より $\alpha(G-v)=\alpha(G)$ または $\alpha(G-v)=\alpha(G)-1$ が成り立つ．そこで $\alpha(G-v_0)=\alpha(G)$ となる頂点 $v_0\in V$ があれば，$G_1=G-v_0$ とする．G_1 の頂点 $v_1\in V-\{v_0\}$ で，$\alpha(G_1-v_1)=\alpha(G_1)=\alpha(G)$ となるものがあれば，$G_2=G_1-v_1=G-\{v_0,v_1\}$ とする．このような操作を反復することにより，G の部分グラフ $G_n=H$ で，H のどの頂点 w についても $\alpha(H-w)<\alpha(H)=\alpha(G)$ となるものを得る．

辺についても同様の議論を適用すれば，求める部分グラフ H' が得られる．$\square$

2.4 性質 グラフ G において，$e=uv$ が α-臨界辺ならば，両端点 u と v は α-臨界点である．$\square$

α-臨界点は，次のように容易に特徴付けられる．

2.5 命題 グラフ $G=(V,E)$ において，次が成り立つ：

頂点 $v\in V$ が α-臨界点である $\Longleftrightarrow$ v が α-自由である．

(証明) G の最小非輪状分解集合 W が v を含んだとすると，$W-\{v\}$ は $G-v$ の非輪状分解集合であるから，$\alpha(G-v)\leqq|W-\{v\}|=|W|-1=\alpha(G)-1$ が成立し，v は α-臨界点である．

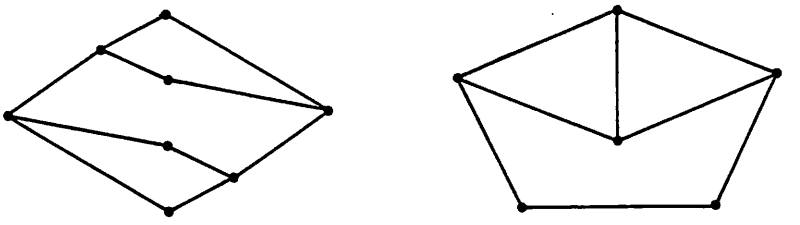
$v\in V$ を α-臨界点とし，$G-v$ の最小非輪状分解集合 W' を選ぶと，$W=W'\cup\{v\}$ は明らかに G の非輪状分解集合である．$|W|=|W'|+1=\alpha(G-v)+1=\alpha(G)$ だから，W は最小である．$\square$

2.6 性質 グラフ G が α-辺臨界であって，孤立点を成分として含まないならば，G は α-点臨界でもある．

(証明) 性質 2.4 と 2.5 による．□

2.7 例 $n \geq 3$ について，完全グラフ K_n および n 閉路 C_n は，いずれも α-辺臨界であり，従って α-点臨界でもある．

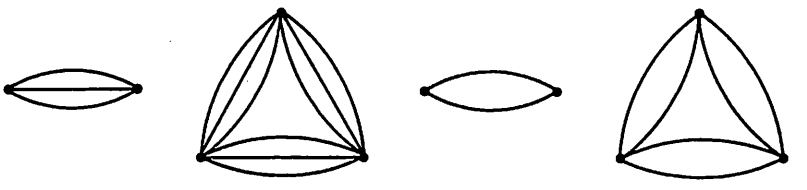
次の図1で，(a) は α-点臨界であるが α-辺臨界でない単純グラフ，
(b) は α-辺臨界であり，α-点臨界でもある単純グラフである．



(a) $\alpha=2$, $\beta=6$　　(b) $\alpha=2$, $\beta=4$

図1

2.8 例 次の図2で，
(a) と (b) は α-点臨界であるが，α-辺臨界ではない多重グラフ，
(c) と (d) は α-点臨界かつ α-辺臨界である多重グラフを示す．



(a) $\alpha=1, \beta=1$　(b) $\alpha=2, \beta=1$　(c) $\alpha=1, \beta=1$　(d) $\alpha=2, \beta=1$.

図2

ここで非輪状安定集合に関する臨界の概念を定式化してみよう．
グラフ $G=(V,E)$ の任意の頂点 $v \in V$ について，

$$\nu(G-v)=\nu(G)-1, \quad \alpha(G-v) \leq \alpha(G)$$

である．そこで性質 2.4 を考慮すれば，$\beta(G-v) \leq \beta(G)$ が成り立つ．
一方，任意の辺 $e \in E$ については，

$$\nu(G-e)=\nu(G), \quad \alpha(G-e) \leq \alpha(G)$$

だから，$\beta(G-e) \geq \beta(G)$ が成り立つ．これらの事実を考慮して，次のように

定義する.

2.9 定義 $G=(V,E)$ をグラフとする.

(1) 頂点 $v\in V$ が G の β-臨界点 (β-critical vertex) であるとは, $\beta(G-v)<\beta(G)$ が成立する場合をいい, 辺 $e\in E$ が G の β-臨界辺 (β-critical edge) であるとは, $\beta(G-e)>\beta(G)$ が成立する場合をいう.

(2) G の β-臨界点の集合を $V_{\beta c}(G)$ で表し, β-臨界辺の集合を $E_{\beta c}(G)$ で表す.

$V_{\beta c}(G)=V$ のとき, G を β-点臨界 (β-vertex critical),
$E_{\beta c}(G)=E$ のとき, G を β-辺臨界 (β-edge critical)
であるという.

(3) $v\in V$ が β-自由 (β-free)
$\Leftrightarrow$ $\exists$ G の最大非輪状安定集合 S $(S\ni v)$.
$v\in V$ が β-本質的 (β-essential)
$\Leftrightarrow$ G の任意の最大非輪状安定集合 S について, $S\ni v$.

2.10 性質 グラフ $G=(V,E)$ において, 次が成り立つ:

(1) $v\in V$ が β-臨界点 $\Leftrightarrow$ v が α-臨界点でない.
従って, 特に 次が成り立つ:

$$V_{\alpha c}(G)\cap V_{\beta c}(G)=\emptyset,\quad V_{\alpha c}(G)\cup V_{\beta c}(G)=V.$$

(2) 辺 $e\in E$ が β-臨界辺 $\Leftrightarrow$ e が α-臨界辺.
すなわち, 次が成り立つ: $E_{\alpha c}(G)=E_{\beta c}(G)$. □

グラフ $G=(V,E)$ の頂点 $v\in V$ の次数 (degree) を $d_G(v)$ で示す.
定義 2.1 と 2.9 より, 次は自明である.

2.11 性質 グラフ $G=(V,E)$ の頂点 $v\in V$ について, $d_G(v)\leqq 1$ ならば, v は β-本質的 (従って β-自由) である. 従って, v は α-自由でも α-本質的でもない. □

上の性質 2.10(1) と性質 2.4 から, 次が得られる.

2.12 <u>性質</u> グラフ G において，$e=uv$ が β-臨界辺（従って α-臨界辺）ならば，両端点 u と v はいずれも β-臨界点ではない；

$$e=uv\in E_{\beta c}(G)=E_{\alpha c}(G) \Rightarrow u,v\notin V_{\beta c}(G). \quad \square$$

2.13 <u>性質</u> グラフ G において，$e=uv\in E(G)$ とする．
もし u が G の β-臨界点ならば，e は β-臨界辺（従って α-臨界辺）ではない；

$$u\in V_{\beta c}(G) \text{ or } v\in V_{\beta c}(G) \Rightarrow e\notin E_{\beta c}(G)=E_{\alpha c}(G).$$

（証明）仮定から，$\beta(G-u)+1=\beta(G)$ である．E_u を u と incident な辺の集合とすれば，次が成り立つ：

$$\beta(G)\leq\beta(G-e)\leq\beta(G-E_u)=\beta(G-u)+1=\beta(G).$$

従って $\beta(G-e)=\beta(G)$ が成り立ち，e は β-臨界辺ではない． $\square$

3. 辺臨界グラフ

前節の性質 2.10(2) より，グラフの α-臨界辺と β-臨界辺は一致する．そこでこれから後は，α-臨界辺と β-臨界辺，および α-辺臨界と β-辺臨界の区別をせずに，単に <u>臨界辺</u> および <u>辺臨界</u> ということにし，$E_{\alpha c}(G)=E_{\beta c}(G)$ を単に $E_c(G)$ で示すことにする．

この節では辺臨界グラフの初等的な性質を調べる．

3.1 <u>性質</u> $G=(V,E)$ を辺臨界グラフとし，$\varepsilon(G)>0$ とすると，次が成り立つ：

(1) 頂点 $v\in V$ について，$d_G(v)>0$ ならば，v は α-自由であり，従って β-本質的でない；すなわち最小非輪状分解集合 W と最大非輪状安定集合 S' が存在して，$v\in W$，$v\notin S'$ となる．

(2) 頂点 $v\in V$ について，$d_G(v)>0$ ならば，v は β-自由であり，従って α-本質的でない；すなわち最大非輪状安定集合 S と最小非輪状分解集合 W' が存在して，$v\in S$，$v\notin W'$ となる．

(3) 特に $\forall$辺 $e=uv\in E$ に対して，最小非輪状分解集合 W と最大非輪状安定集合 S' が存在して，次を満す：

$$u\in W,\ v\notin W\ ;\quad u\notin S',\ v\in S'.$$

（証明） (1), (2) において，$d_G(v)>0$ ならば，辺 $uv=e$ が存在するから，

(3)を証明すれば十分である。

仮定から $G-e$ の最大非輪状安定集合 S_e が存在し，$|S_e|=\beta(G)+1$ を満す。S_e は e の両端点 u と v を含むことは容易に確かめられる。よって $S'=S_e-\{u\}$ は G の最大非輪状安定集合で，条件 $u\notin S'$，$v\in S'$ を満す。

$W=V-S'$ とおけばよい。□

上の性質3.1(2)と性質2.11より，次が得られる。

3.2 <u>性質</u> 辺臨界グラフ $G=(V,E)$ においては，各頂点 $v\in V$ に対して G の非輪状安定集合 S'_v が存在して，次の条件を満す：

(イ) $S'_v \not\ni v$，$|S'_v|=\beta(G)-1$，

(ロ) $S=S'_v\cup\{v\}$ は G の最大非輪状安定集合である。

このような非輪状安定集合 S'_v を，頂点 v の<u>細胞</u>(cell)という。□

次は，性質3.1(3)より直ちに導かれる。

3.3 <u>性質</u> 辺臨界グラフ G においては，隣接する2頂点は共通の細胞を持つ。□

3.4 <u>性質</u> 辺臨界グラフ G においては，辺は高々2重辺である。

(証明) 性質3.1(3)の証明から直ちに得られる。□

3.5 <u>性質</u> 辺臨界グラフ $G=(V,E)$ において，頂点 $v\in V$ が

$d_G(v)>0$ ならば，$d_G(v)\geq 2$ である。

(証明) 完全グラフ K_2 は辺臨界でないことを考慮すれば，性質3.1(3)と性質2.11から直ちに証明される。□

グラフ $G=(V,E)$ 上の閉路 C の<u>コード</u>(chord)とは，C に含まれない辺 $e=uv\in E$ で，$u,v\in V(C)$ なるものをいう。

3.6 性質 辺臨界グラフ $G=(V,E)$ においては，任意の辺 $e\in E$ に対して，e を含む G の閉路で，コードを持たないものが存在する．

（証明） $e=uv$ とすると，性質3.1(3)の証明から，$H=G-e$ の最大非輪状安定集合 S_e が存在して，$S_e\supset\{u,v\}$ である．$\langle S_e\rangle_H$ は非輪状で，S_e は G の非輪状安定集合ではないから，u と v とは $\langle S_e\rangle_H$ の同一の連結成分上にあって，$\langle S_e\rangle_G=\langle S_e\rangle_H+e$ は唯一の閉路を含む（Harary [4, Theorem 4.1] 等参照）．この閉路がコードを持たないことは，$\langle S_e\rangle_H$ が閉路を含まないことから明らかである．□

上の性質3.6の証明から，次が得られる．

3.7 性質 辺臨界グラフ $G=(V,E)$ において，辺 $e=uv$ が2重辺でないならば，G の最大非輪状安定集合 S（従って最小非輪状分解集合 W）が存在して，次を満す：

$$S\supset\{u,v\},\quad W\cap\{u,v\}=\phi.$$

（証明） 性質3.6の証明から，$H=G-e$ の最大非輪状安定集合 S_e を選ぶと，$\langle S_e\rangle_G$ 上にコードを持たない閉路 C が唯一つ存在して，C は e を含む．e は多重辺ではないから，この閉路 C の長さは3以上であり，C 上に u と v 以外の頂点 $w\in S_e$ が存在する．$S=S_e-\{w\}$ は明らかに G の非輪状安定集合でかつ最大であり，$S\supset\{u,v\}$ である．

$W=V-S$ とおけばよい．□

3.8 性質 辺臨界グラフは，切断辺（cut edge）を持たない．

（証明） これは性質3.6の一部分を言い換えたものである．□

3.9 命題 辺臨界グラフは，切断点（cut vertex）を持たない．

（証明） 背理法によって証明する．辺臨界グラフ $G=(V,E)$ で，切断点 $v_0\in V$ を持つものが存在したとする．G の2つの部分グラフ G_1,G_2 が存在して，$G_1\cup G_2=G$，$V(G_1)\cap V(G_2)=\{v_0\}$，$\varepsilon(G_1)>0$，$\varepsilon(G_2)>0$ を満たす．

以下，証明を3段階に分けて与える．

<u>第1段</u>：性質3.1(2)より，v_0を含むようなGの最大非輪状安定集合Sが存在する．$S_i = V(G_i) \cap S$ $(i=1,2)$ とおく．第1段では，次の(イ)を証明する．

(イ) S_iはG_iの最大非輪状安定集合である $(i=1,2)$．

S_iの定義から，S_iはG_iのv_0を含む非輪状安定集合のうちで最大である．今S_1がG_1で最大でないとすると，G_1の最大非輪状安定集合S_1'が存在するが，$S_1' \not\ni v_0$である．

一方仮定から辺$e = v_0u$，$u \in V(G_2)$，が存在する．性質3.3より，v_0とuは共通の細胞S_0を持つ．$S_0' = S_0 \cup \{v_0\}$と$S_0'' = S_0 \cup \{u\}$は共にGの最大非輪状安定集合であり，

$$|S_0' \cap V(G_2)| = |S_0'' \cap V(G_2)|$$

である．$S_0' \cap V(G_2) \ni v_0$より，$|S_0' \cap V(G_2)| = |S_2|$としてよい．ここで$S_2' = S_0'' \cap V(G_2)$とおけば，$S_2' \not\ni v_0$だから，$S' = S_1' \cup S_2'$はGの非輪状安定集合となるが，

$$|S'| = |S_1' \cup S_2'| = |S_1'| + |S_2'| > |S_1| + |S_2| - 1 = |S| = \beta(G)$$

となり，Sの最大性に反する．

<u>第2段</u>：性質3.1(1)より，v_0を含まないようなGの最大非輪状安定集合S'が存在する．$S_i' = V(G_i) \cap S'$ $(i=1,2)$ とおく．第2段では次の(ロ)を証明する．

(ロ) S_i'はG_iの最大非輪状安定集合である $(i=1,2)$．

S_i'の定義から，S_i'はG_iのv_0を含まない非輪状安定集合のうちで最大である．

仮定から，辺$e = v_0u \in E(G_1)$が存在し，性質3.3よりv_0とuは共通の細胞S_0を持つ．$S = S_0 \cup \{v_0\}$，$S'' = S_0 \cup \{u\}$は共にGの最大非輪状安定集合である．$S \ni v_0$だから，(イ)とその証明から，$S_1 = V(G_1) \cap S$はG_1の最大非輪状安定集合である．ところが$S_1'' = V(G_1) \cap S''$とおけば，

$$|S_1''| = |V(G_1) \cap S_0| + 1 = |S_1|$$

が成り立ち，S_1''はG_1の最大非輪状安定集合で，$S_1'' \not\ni v_0$である．従って$|S_1'| = |S_1| = |S_1''|$で，S_1'はG_1の最大非輪状安定集合である．

S_2'についても，全く同様にして最大性が証明される．

<u>第3段</u>：(イ)と(ロ)から次式が導びかれ，矛盾が得られる：

$$\beta(G) = \beta(G_1) + \beta(G_2) - 1 < \beta(G_1) + \beta(G_2) = \beta(G). \quad \square$$

やや複雑になるが，性質3.1に性質3.7を合わせることによって，次が証明される．

3.10 性質 $G=(V,E)$ を連結な単純グラフとする。G が辺臨界ならば，G には 2-点切断集合（2-vertex cut）$A=\{a_1, a_2\}$ で，$a_1a_2 \in E$ となるようなものは存在しない。□

グラフ $G=(V,E)$ の頂点の部分集合 $A \subset V$ がクリーク（clique）であるとは，誘導部分グラフ $\langle A \rangle_G$ が完全グラフとなるときをいう．

この定義を用いると，上の性質3.9と3.10は次の形に一般化されると思われるが，まだ証明が完成していない．

3.11 予想 単純な辺臨界グラフにおいては，点切断集合はクリークではない。□

グラフ $G=(V,E)$ の頂点の部分集合 $B \subset V$ に対して，B の点に隣接するすべての頂点から成る集合を B の近傍（neighbour set）といい，$N_G(B)$ で表す： $N_G(B)=\{w \in V \mid wv \in E,\ v \in B\}$.

3.12 命題 孤立点を持たない辺臨界グラフ $G=(V,E)$ においては，任意の非輪状安定集合 S について

$$|N_G(S)| \geqq |S|$$

が成立する．

（証明）$\langle S \rangle_G$ の連結成分の一つを T とする．T が孤立点でないならば，上の定義から $N_G(V(T)) \supset V(T)$ である．従って $\langle S \rangle_G$ が孤立点の集合の場合，すなわち S が独立集合である場合に証明すれば十分である．しかしこの場合は Hajnal [9] で証明されている（Berge [2], 290p. Theorem 8 参照）。□

引用文献

[1] J. Akiyama and M. Watanabe : Maximum induced forests of planar graphs, Graphs and Combinatorics, 3 (1987), 201-202.

[2] C. Berge : Graphs and Hypergraphs, North-Holland Math. Library vol. 6. (Translated by E. Minieka), North-Holland, 1973.

[3] J. A. Bondy and U. S. R. Murty : Graph Theory with Applications, North-Holland, 1976.

[4] F. Harary : Graph Theory, Addison Wesley, 1969.

[5] M. D. Plummer : Some covering concepts in graphs, J. Comb. Theory 8 (1970), 91-98.

[6] 浜田隆資・秋山仁 : グラフ論要説, 槙書店, 1982.

[7] 鈴木晋一 : New complexity of graphs, 箱根セミナ記録 '86 (graphs による 3-manifolds の研究), 83-96.

[8] 鈴木晋一 : グラフの新しい不変量, 早稲田大学教育学部学術研究 (教育編), 35 (1986), 23-29.

[9] A. Hajnal : A theorem on k-saturated graphs, Canad. J. Math. 17 (1965), 720-724.