New Complexities of Graphs

鈴木晋一
(早稲田大学 教育学部)

グラフに対し、被覆(covering)と独立集合(independent set)のある種の一般化であり、新しい不変量を定義し、平面グラフに対して一つの興味深い定理を証明する。

1. Notation と Definitions.

$G = (V(G), E(G)) = (V, E)$ によって、vertex-set V, edge-set E の finite loopless graph を表す。(以下の定義は、適当な補正をすることによって、loops を持つ graph に対しても意味を持つようにできるが、例外事項が多くなるので、この制限を置くことにする。)

V の non-empty subset V' について、V' を vertex-set とし、E の元でその両端点が V' に属するようなもの全体 E' を edge-set とするような G の subgraph を、V' によって誘導される G の subgraph と呼び、$G[V']$ で表す。
特に proper subset $V' \subset V$ について、$V-V'$ によって誘導される G の subgraph $G[V-V']$ を、$G-V'$ で示す。

一般に有限集合 X について、その元の個数を $|X|$ で示す。
$\nu(G) = |V|$: graph G の order (位数).
$\varepsilon(G) = |E|$: graph G の size

この他，通常 graph theory で用いられる Notation，Definitions は Bondy-Murty [B-M] のものを用いることとする。

便宜上，graph の covering と independent set の定義と性質の一部を記しておく。

1.1. Def. $G=(V,E)$ を loopless graph とする。

(1) subset $W\subset V$ が G の covering である

$\Leftrightarrow$ $\forall$ edge $e=uv\in E$ について，$u\in W$ または $v\in W$.

$\Leftrightarrow$ $G-W=G[V-W]=(V-W,\phi)$: empty graph.

G の covering $W\subset V$ が minimum covering であるとは，$|W'|<|W|$ となる G の covering W' が存在しないときをいう。minimum covering W の元の個数 $|W|$ を $\beta(G)$ で表し，G の covering number という。定義から明らかに次が成り立つ：

$$0\leqq \beta(G)\leqq \nu(G)-1.$$

(2) subset $S\subset V$ が G の independent set である

$\Leftrightarrow$ $\forall$ edge $e=uv\in E$ について，$u\notin S$ または $v\notin S$.

$\Leftrightarrow$ $G[S]=(S,\phi)$: empty graph.

G の independent set $S\subset V$ が maximum independent set であるとは，$|S'|>|S|$ となる G の independent set が存在しないときをいい，maximum independent set S の元の個数 $|S|$ を $\alpha(G)$ で示し，G の independence number という。
定義から明らかに次が成り立つ：

$$1\leqq \alpha(G)\leqq \nu(G).$$

1.2. Prop. $G=(V,E)$ を loopless graph とする。

(1) A subset $W\subset V$ が G の covering

$\Longleftrightarrow$ $V-W$ が G の independent set.

(2) $\alpha(G)+\beta(G)=\nu(G)$.

次が本稿で導入する新しい不変量の定義である。

1.3. Def. $G=(V,E)$ を loopless graph とする。

(1) subset $W\subset V$ が G の acyclic covering である
$\Leftrightarrow$ $G-W=G[V-W]$ が ($V-W$ を vertex-set とする) acyclic graph.

G の acyclic covering W が minimum acyclic covering であるとは，$|W'|<|W|$ となる G の acyclic covering W' が存在しないときをいい，minimum acyclic covering W の元の個数 $|W|$ を $\tilde{\beta}(G)$ で示し，G の acyclic covering number という。

(2) subset $S\subset V$ が G の acyclic independent set である
$\Leftrightarrow$ $G[S]$ が (S を vertex-set とする) acyclic graph.

G の acyclic independent set S が maximum acyclic independent set であるとは，$|S'|>|S|$ なる G の acyclic independent set が存在しないときをいい，その元の個数 $|S|$ を $\tilde{\alpha}(G)$ で示し，G の acyclic independence number という。

G の covering は明らかに acyclic covering であり，independent set は明らかに acyclic independent set でもあるから，次が成り立つ：

1.4. Prop. (1) $1\leqq\alpha(G)\leqq\tilde{\alpha}(G)\leqq\nu(G)$.

(2) $0\leqq\tilde{\beta}(G)\leqq\beta(G)\leqq\nu(G)-1$.

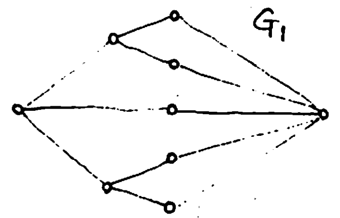
さらに上の定義から，Prop. 1.2 と同様に次の定理が成り立つ：

1.5. Theorem $G=(V,E)$ を loopless graph とする。

(1) A subset $W\subset V$ が G の acyclic covering
$\Leftrightarrow$ $V-W$ が G の acyclic independent set.

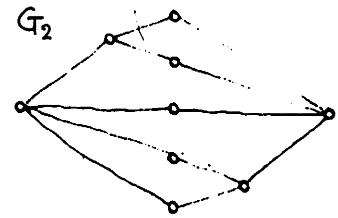
(2) $\tilde{\alpha}(G)+\tilde{\beta}(G)=\nu(G)$.

1.6. Examples.



$\nu = 9$

$\varepsilon = 12$



G_1	G_2
$\tilde{\beta} = 1, \quad \tilde{\alpha} = 8$	$\tilde{\beta} = 2, \quad \tilde{\alpha} = 7$
$\beta = 4, \quad \alpha = 5$	$\beta = 4, \quad \alpha = 5$
$\chi = 3$	$\chi = 3$
cycle rank $= 4$	cycle rank $= 4$.

ここで χ は chromatic number を示す. cycle rank とは, topological には, 1st Betti number と同じものである.

この例からも想像されるように, $\tilde{\alpha}(G)$, $\tilde{\beta}(G)$ は cycle rank が等しい graphs の構造の差をはかるのに有効と思われる. 今のところ特記すべき応用例は無いが, 結び目理論への応用を考えている.

2. Erdös-Vizing Problem の変形.

Planar graphs の independent sets に関する次の問題が知られている (Berge [B], Bondy-Murty [B-M, 251p]):

2.1. Erdös-Vizing Problem: G を loopless な planar graph とするとき, $\alpha(G) \geq \frac{1}{4}\nu(G)$ が成立するか?

graph $G=(V,E)$ の vertex-colouring $(V_1, V_2, \cdots, V_k)$ が与えられたとき, 各 V_i は G の independent set になる. 従って planar graphs に関する有名な Four Colour Conjecture が正しければ, 上の 2.1 が成り立つことになる. (逆は一般に成立しない.)

ところで Albertson [A_1] は, Four Colour Conjecture を用いずに, 次の結果を証明した:

2.2 Prop. (Albertson [A_1]) loopless な planar graph G について次式が成り立つ:

$$\alpha(G) > \frac{2}{9}\nu(G).$$

一方, Def. 1.1 と Def 1.3 から, 次のことがわかる: G を loopless graph とし, H をその underlying simple graph とするとき,

$$\alpha(G) = \alpha(H), \qquad \beta(G) = \beta(H)$$

であるが, 一般に

$$\tilde{\alpha}(G) \leqq \tilde{\alpha}(H), \qquad \tilde{\beta}(G) \geqq \tilde{\beta}(H)$$

である.

この事実と, Prop. 1.4 (1) を考慮すると, 次の定理が成立してもおかしくないことがわかる:

2.3 Theorem Simple planar graph G について, 次式が成り立つ:

$$\tilde{\alpha}(G) \geqq \frac{1}{4}\nu(G).$$

以下, 本稿では, Albertson [A_1], [A_2] が, 上記 Prop. 2.2 を示すために証明した 平面(または2次元球面)の三角形分割に関する一定理(これは, Four Colour Conjecture を, 有名な Five Colour Theorem の証明方法を改良する形で証明しようという試みから生じた Haken [H] 型の研究成果である)を用い, Albertson [A_2] の議論を改良して, この Theorem 2.3 を証明する.

次の命題は, planar graphs の Five Colour Theorem を証明する際の基礎となるものである.

2.4 Prop. 任意の planar simple graph G with $\nu(G) \geqq 4$ には, degree が 5 以下の vertices が少なくとも 4個存在する.

前述の Albertson-Haken の結果は, degree 5 の vertex の近傍を調べたもので, 次のように述べることができる:

2.5 <u>Lemma</u> (Albertson [A_1], [A_2]) 2次元球面 S^2 の任意の triangulation $G=(V, E)$ について，次が成り立つ：

(1) $\exists v_0 \in V \ (\deg(v_0) < 5)$

または

(2) $\exists v_0, w_0 \in V \ (\deg(v_0) = 5,\ \deg(w_0) \leqq 6$，しかも v_0 と w_0 の位置関係は，次の図1または図2のようになる：

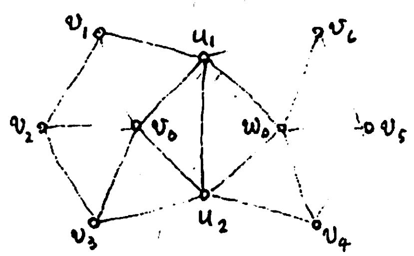


図 1

ただし，$v_1 = v_4$，$v_1 = v_5$，$v_1 = v_6$，$v_2 = v_4$，$v_2 = v_5$，$v_2 = v_6$，$v_3 = v_4$，$v_3 = v_5$ または $v_3 = v_6$ となる場合も含む．

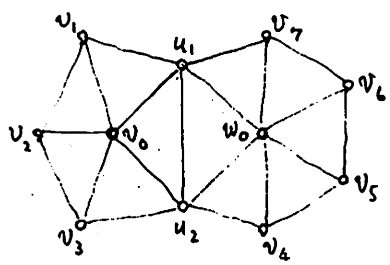


図 2

ただし $v_1 = v_4$，$v_1 = v_5$，$v_1 = v_6$，$v_1 = v_7$，$v_2 = v_4$，$v_2 = v_5$，$v_2 = v_6$，$v_2 = v_7$，$v_3 = v_4$，$v_3 = v_5$，$v_3 = v_6$，または $v_3 = v_7$ となる場合も含む．

〈注〉 上の図1，図2は最も一般的な場合を示しているだけで，命題の主張は，2つの3角形 $\Delta v_0 u_2 u_1$ と $\Delta w_0 u_1 u_2$ の存在と，$\deg(v_0) = 5$，$\deg(w_0) \leqq 6$ の保証である．

3. Theorem 2.3 の証明 (前半)

simple planar graph $G = (V, E)$ について，$\nu(G)$ が十分小さいときは，Theorem は明らかだから，$\nu(G)$ に関する帰納法によって証明する．

証明は少々長いので，この節では簡単な reduction をまとめて述べることにする．

(3.1) G を 2次元球面 S^2 に embed する. このとき, 各face は 3角形 (i.e. $G\subset S^2$ は triangulation) と仮定してよい.

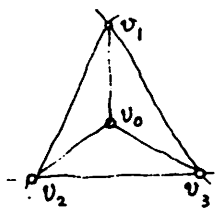
実際, triangulation でないときは, V を増すことなく, 各face を対角線となる edges によって 3角形分割する. このようにして得られる graph $H\subset S^2$, $H=(V,E')$, について, 明らかに

$$\tilde{\alpha}(G) \geq \tilde{\alpha}(H)$$

が成り立つからである.

(3.2) G に degree 3 の vertex v_0 が存在する場合:

v_0 の neighbour $N(v_0)$ を $\{v_1, v_2, v_3\}$ とする.



$G' = G - \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ とおけば,

$$\nu(G') = \nu(G) - 4$$

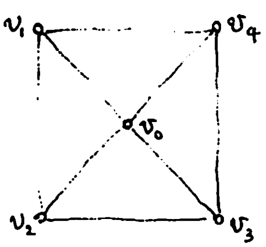
だから, 帰納法の仮定により, G' の acyclic independent set S' が存在して

$$\tilde{\alpha}(G') = |S'| \geq \frac{1}{4}\nu(G') = \frac{1}{4}\nu(G) - 1$$

を満す. $S = S' \cup \{v_0\}$ は明らかに G の acyclic independent set で, $\tilde{\alpha}(G) \geq |S| \geq \frac{1}{4}\nu(G)$.

(3.3) G に degree 4 の vertex v_0 が存在する場合:

v_0 の neighbour $N(v_0)$ を $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ とし, S^2 上で cyclic に右図のように番号を付してよい.



$$G' = G - \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$$

とおけば, $\nu(G') = \nu(G) - 4$

だから, 帰納法の仮定により, G' の acyclic independent set S' が存在して

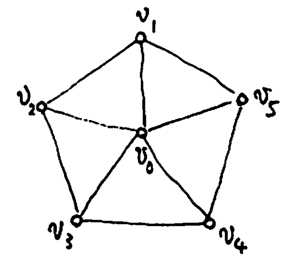
$$\tilde{\alpha}(G') = |S'| \geq \frac{1}{4}\nu(G') = \frac{1}{4}\nu(G) - 1$$

を満す. $v_4 \notin S'$ のときも $v_4 \in S'$ のときも, $S = S' \cup \{v_0\}$ は G の acyclic independent set で, $\tilde{\alpha}(G) \geq |S| \geq \frac{1}{4}\nu(G)$.

4. Theorem 2.3 の証明（後半）

前節の考察から，$G=(V,E)$ は 2次元球面 S^2 の triangulation で，degree が 5 未満の vertices は無いと仮定してよい．

そこでまず Lemma 2.5 (2) に従って，degree が 5 および 6 の vertices の近傍について調べることから始める．



(4.1) $v_0 \in V$ を，$\deg(v_0)=5$ なる vertex とし，v_0 の neighbour $N(v_0)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ とする．$N(v_0)$ には，S^2 上で右図のように cyclic に番号を付けてよい．

このとき，v_1 と v_3，v_2 と v_4，v_3 と v_5，v_4 と v_1 または v_5 と v_2 のいずれかが adjacent ならば，Theorem 2.3 は正しい．

$\because$ v_1 と v_3 が adjacent の場合に証明すれば十分である．仮定から $G-\{v_0,v_1,v_3,v_4\}$ は v_2 を含む成分（これを G_1 とする）と v_5 を含む成分（これを G_2 とする）に分かれる；

$$G' = G-\{v_0,v_1,v_3,v_4\} = G_1 \cup G_2,$$

$$\nu(G_1) < \nu(G), \quad \nu(G_2) < \nu(G), \quad \nu(G_1)+\nu(G_2) = \nu(G)-4.$$

帰納法の仮定から，G_1 と G_2 にはそれぞれ acyclic independent sets S_1, S_2 が存在して，

$$\tilde{\alpha}(G_1) = |S_1| \geq \frac{1}{4}\nu(G_1), \quad \alpha(G_2) = |S_2| \geq \frac{1}{4}\nu(G_2)$$

を満す．$v_2 \notin S_1$，$v_2 \in S_1$，$v_5 \notin S_2$，$v_5 \in S_2$ いずれの場合も $S = S_1 \cup S_2 \cup \{v_0\}$ は G の acyclic independent set となり，

$$\alpha(G) \geq |S| \geq \frac{1}{4}\nu(G_1) + \frac{1}{4}\nu(G_2) + 1 = \frac{1}{4}\nu(G)$$

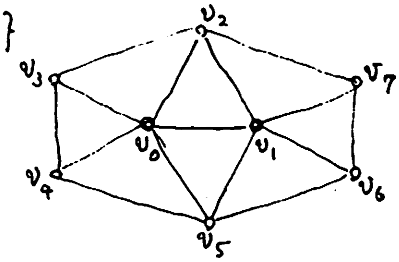
を満す．

(4.2) $v_0 \in V$ を，$\deg(v_0)=5$ なる vertex とし，v_0 の neighbour を上の (4.1) と同じように $N(v_0)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ とする．$N(v_0)$ の中に degree が 6 以下の vertex が存在するとき，Theorem 2.3 は正しい．

∵ $5 \leqq \deg(v_1) \leqq 6$ と仮定してよい。

$\deg(v_1)=5$ のとき，v_0 と v_1 の neighbour は下の図のようになる。

$G' = G - \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$



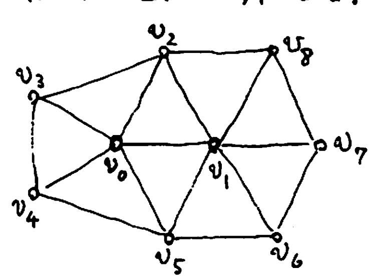
とおけば，帰納法の仮定から，G' の acyclic independent set S' が存在して，

$$\tilde{\alpha}(G') = |S'| \geqq \frac{1}{4}\nu(G') = \frac{1}{4}(\nu(G)-8) = \frac{1}{4}\nu(G) - 2$$

を満す。$S = S' \cup \{v_0, v_1\}$ は明らかに G の acyclic independent set で $\tilde{\alpha}(G) \geqq |S| \geqq \frac{1}{4}\nu(G)$ となる。

$\deg(v_1)=6$ のとき，v_0 と v_1 の neighbour は下の図のようになる。

$G' = G - \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_8\}$



とおけば，帰納法の仮定から，G' の acyclic independent set S' が存在して，

$$\tilde{\alpha}(G') = |S'| \geqq \frac{1}{4}\nu(G') = \frac{1}{4}(\nu(G)-8) = \frac{1}{4}\nu(G) - 2$$

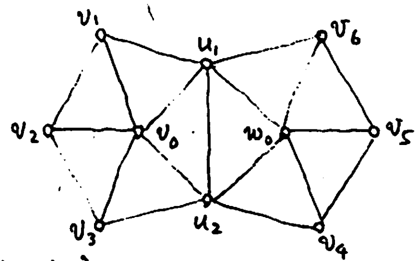
を満す。$S = S' \cup \{v_0, v_1\}$ は再び G の acyclic independent set で，$\tilde{\alpha}(G) \geqq |S| \geqq \frac{1}{4}\nu(G)$ となる。

尚，上のいずれの場合についても，$v_3 = v_7$，$v_3 = v_6$，$v_3 = v_8$，$v_4 = v_6$，$v_4 = v_7$，$v_4 = v_8$ のいずれかが生じた場合は，$\deg(v_2) = 3$，$\deg(v_5) = 3$ または (4.1) の条件を満たすことになる。

さてこれから後は，Lemma 2.5 (2) の状態を考察することになる。Lemma 2.5 の図1と図2はいっしょに扱える部分もあるが，図1の方がはるかに容易なので，別に処理することにする。

(4.3) Lemma 2.5 (2) の図1の状態を満す2つの vertices v_0, w_0 が存在するとき, Theorem 2.3 は正しい.

∵ Lemma 2.5 (2) には, いくつかのただし書きがあるので, 場合分けをして証明する.



Case 1. $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ がすべて互いに相異なる場合:

$$G' = G - \{v_0, w_0, u_1, v_2, v_1, v_3, v_4, v_6\}$$

とおくと, 帰納法の仮定から, G' の acyclic independent set S' が存在して.

$$\alpha(G') = |S'| \geq \frac{1}{4}\nu(G') = \frac{1}{4}\nu(G) - 2$$

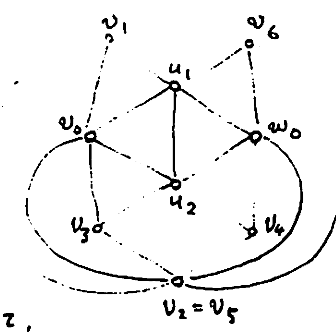
を満す. v_2, v_5 が S' に属す場合も属さない場合も, $S = S' \cup \{v_0, w_0\}$ は G の acyclic independent set となることは明らかで, $\alpha(G) \geq |S| \geq \frac{1}{4}\nu(G)$ となる.

Case 2. $v_1 = v_6$ (または $v_3 = v_4$) の場合:
$\deg(u_1) = 4$ (または $\deg(u_2) = 4$) となり, この節で考察している graphs の中にはこの case は含まれない. ((3.3) を参照).

Case 3. $v_1 = v_5$ (または $v_3 = v_5$) の場合:
edge $u_1 v_1 = u_1 v_5$ (または $u_2 v_3 = u_2 v_5$) が存在することになり, degree 5 の vertex w_0 の neighbour について (4.1) の条件を満す.

Case 3′. $v_2 = v_6$ (または $v_2 = v_4$) の場合:
図の対称性から, Case 3 と同じ.

Case 4. $v_1 = v_4$ (または $v_3 = v_6$) の場合:
edge $u_2 v_4 = u_2 v_1$ (または $u_1 v_6 = u_1 v_3$) が存在することになり, degree 5 の vertex v_0 の neighbour について (4.1) の条件を満す.



Case 5. $v_2 = v_5$ の場合：
この場合の処理の方法はいろいろ考えられるが、Case 1 にならうことにする。
$G' = G - \{v_0, w_0, u_1, u_2, v_1, v_3, v_4, v_6\}$

とおけば、帰納法の仮定から、G' の acyclic independent set S' が存在して、

$$\tilde{\alpha}(G') = |S'| \geq \frac{1}{4}\nu(G') = \frac{1}{4}\nu(G) - 2$$

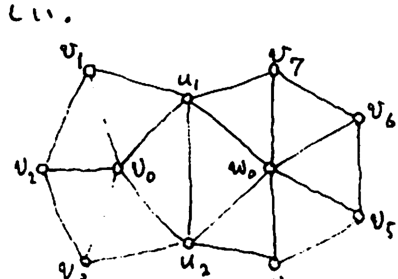
を満す。$v_2 = v_5 \notin S'$ の場合も $v_2 = v_5 \in S'$ の場合も、$S = S' \cup \{v_0, w_0\}$ は G の acyclic independent set となり、$\tilde{\alpha}(G) \geq |S'| \geq \frac{1}{4}\nu(G)$ が成り立つ。

これですべての Cases について Theorem 2.3 が成り立つことが示されたので、(4.3) の証明が完了した。

最後に Lemma 2.5 (2) の図 2 の状態を考察する。場合わけがさらに多くなるが、基本的には (4.3) と同じである。

(4.4) Lemma 2.5 (2) の図 2 の状態を満す 2つの vertices v_0, w_0 が存在するとき、Theorem 2.3 は正しい。

証



Case 1. $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ がすべて互いに相異なる場合：
この case をさらに 3つの subcases に分けて証明する。

Subcase 1. v_5 と v_7（または v_4 と v_6）が adjacent の場合：このとき v_4 と v_6 は adjacent でないことに注意する。ここで

$$G' = G - \{v_0, w_0, u_1, u_2, v_1, v_3, v_5, v_7\}$$

とおけば、G' は v_4 を含む成分（これを G_1 とする）と v_6 を含む成分（これを G_2 とおく）に分かれる。この後は (4.1) の証明と同

じであるが，念のために反復する．帰納法の仮定から，G_1, G_2 の acyclic independent sets S_1, S_2 が存在し，

$$\tilde{\alpha}(G_1)=|S_1| \geq \frac{1}{4}\nu(G_1), \quad \tilde{\alpha}(G_2)=|S_2| \geq \frac{1}{4}\nu(G_2)$$

を満す．$v_2 \notin S_1$, $v_2 \in S_1$, $v_4 \notin S_1$, $v_4 \in S_1$, $v_6 \notin S_2$, $v_6 \in S_2$ いずれの場合も，$S = S_1 \cup S_2 \cup \{v_0, w_0\}$ は G の acyclic independent set となることがわかり，次式が得られる：

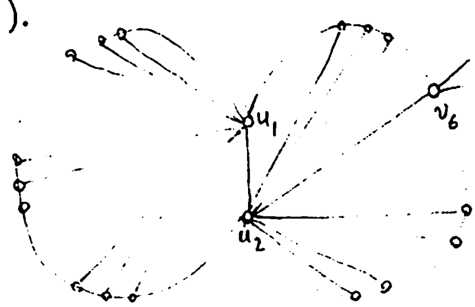
$$\tilde{\alpha}(G) \geq |S| \geq \frac{1}{4}\nu(G_1)+\frac{1}{4}\nu(G_2)+2 = \frac{1}{4}\nu(G).$$

<u>Subcase 2</u>. u_2 と v_5（または u_1 と v_6）が adjacent の場合：このとき，v_4 と v_6 は必然的に adjacent でないことに注意すると，上の subcase 1 と全く同じようにして証明ができる．

<u>Subcase 3</u>. 上の2つの subcases 以外の場合：

$$G_0 = G - \{v_0, w_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_7\}$$

とおく．G_0 において，$N(v_1)\cup N(v_2)\cup N(v_3)$ の各 vertex と u_1 を結ぶ edges と，$N(v_4)\cup N(v_5)\cup N(v_7)\cup\{v_6\}$ の各 vertex と u_2 を結ぶ edges を G_0 に加えて得られる graph を G' とする（下図参照）．



$\nu(G') = \nu(G) - 8$ に注意する．帰納法の仮定から，G' の acyclic independent set S' が存在して

$$\tilde{\alpha}(G')=|S'| \geq \frac{1}{4}\nu(G') = \frac{1}{4}\nu(G)-2$$

を満たす．そこで

(イ) $u_1, u_2 \notin S' \Rightarrow S = S' \cup \{v_0, w_0\}$.

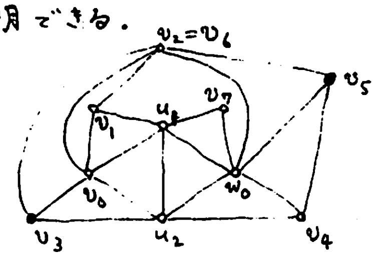
(ロ) $u_1 \notin S'$, $u_2 \in S' \Rightarrow S = S' - \{u_2\} \cup \{v_0, v_5, v_7\}$,
(ハ) $u_1 \in S'$, $u_2 \notin S' \Rightarrow S = S' - \{u_1\} \cup \{v_1, v_3, w_0\}$,
(ニ) $u_1, u_2 \in S' \Rightarrow S = S' - \{u_1, u_2\} \cup \{v_1, v_3, v_5, v_7\}$
とおくと，S はいずれも G の acyclic independent set となり．

$$\tilde{\alpha}(G) \geq |S| \geq \frac{1}{4}\nu(G') + 2 = \frac{1}{4}\nu(G).$$

Case 2. $v_1 = v_4$（または $v_3 = v_7$）の場合：
edge $u_2v_4 = u_2v_1$（または $u_1v_7 = u_1v_3$）が存在することになり．
degree 5 の vertex v_0 の neighbour について (4.1) の条件を満す．

Case 3. $v_2 = v_7$（または $v_2 = v_4$）の場合：
edge $u_1v_7 = u_1v_2$（または $u_2v_4 = u_2v_2$）が存在することになり，
degree 5 の vertex v_0 の neighbour について (4.1) の条件を満す．

Case 4. $v_1 = v_7$（または $v_3 = v_4$）
$v_1 = v_6$（または $v_3 = v_5$）
$v_1 = v_5$（または $v_3 = v_6$）
$v_2 = v_6$（または $v_2 = v_5$）
の各場合：
いずれの場合も $N(v_0) \cup N(w_0)$ の元は 8 個となり，(4.3) の Case 1 の証明と全く同様にして証明できる．
例として $v_2 = v_6$ の場合を示す．



$G' = G - \{v_0, w_0, u_1, u_2, v_1, v_2, v_4, v_7\}$
とすると，帰納法の仮定から，G' の acyclic independent set S' が存在し，

$$\tilde{\alpha}(G') = |S'| \geq \frac{1}{4}\nu(G') = \frac{1}{4}\nu(G) - 2$$

を満す．$S = S' \cup \{v_0, w_0\}$ とおけば，v_0, v_5 が S' に属する場合もそうでない場合も，G の acyclic independent set となり

$$\tilde{\alpha}(G) \geq |S| \geq \frac{1}{4}\nu(G)$$

を満す．残りの場合は読者に委ねる．

引用文献

[A_1] M.O. Albertson : A lower bound for the independence number of a planar graph, J. Combinatorial Theory B20 (1976), 84-93.

[A_2] M.O. Albertson : Finding an independent set in a planar graph, In Graphs and Combinatorics, Lecture Notes in Math. #406, Springer, New York, 1974, pp. 173-179.

[B] C. Berge : Graphes et Hypergraphes, Dunod, Paris, 1970

[B-M] J. A. Bondy & U.S.R. Murty : Graph Theory with Applications, North Holland, New York, 1976.

[H] W. Haken : An existence theorem for planar maps, J. Combinatorial Theory B13.(1973), 180-184.

追記：その後 証明が改良されて，$\tilde{\alpha}(G) \geq \frac{1}{3}\nu(G)$ が証明できた．詳しくは 早稲田大学教育学部学術研究(1986年版)に載せる予定である．