On the Kirchhoff・Goeritz Matrix of a Signed Graph

鈴　木　晋　一
（早稲田大学 教育学部）

まえがき．　3次元球面$\mathbb{S}^3$内の（tameな）結び目kの正則射影図$\mathcal{P}(k)\subset\mathbb{S}^2$は，高々有限個の2重点のみを持つ閉曲線で，$\mathbb{S}^2$を有限個の（単連結な）領域に分割する。これらの領域は，チェス盤のように，2色で塗り分けられ，同色の領域は2重点でのみ交わるようにできる……即ち$\mathcal{P}(k)$をその2重点を頂点とする4-regularなgraphと看做したとき，2-map colourableである。

Goeritz [2] はこのような$\mathcal{P}(k)$から，今日Goeritz matrixと呼ばれているsymmetric integral matrix $G(\mathcal{P}(k))$を導いた。Seifert [5] は，このmatrix $G(\mathcal{P}(k))$がkで分岐する$\mathbb{S}^3$の2重分岐被覆空間$C^2(k)$の1次元ホモロジー群$H_1(C^2(k))$のrelation matrixであること，および$\pm G(\mathcal{P}(k))^{-1}$が$H_1(C^2(k))$上のlinking formのmatrixであることを示した。これらはKneser-Puppe [8] によって整理され，Kyle [4] によって絡み目にまで拡張されている．

一方，結び目（絡み目）の正則射影図$\mathcal{P}(k)\subset\mathbb{S}^2$による$\mathbb{S}^2$の2色彩色から$\mathcal{P}(k)$のgraphと呼ばれるsigned graph $\Sigma\subset\mathbb{S}^2$が得られ（Yajima-Kinoshita [7] 他），このΣから$G(\mathcal{P}(k))$を読み取ることは容易である．しかも$G(\mathcal{P}(k))$は，graph theoryにおいて"digraph"や通常の"graph"に対してKirchhoff matrix（Tutte [6]，VI4 等参照）として定義されるmatrixを，"signed graph"に対して自然に定義した

matrix であることがわかる．本稿ではこの辺の事情を一般の signed graphs を対象にして明確に述べてみたい．

1. Signed Graphs.

対象とする signed graphs については，graph theory でもあまり扱われていないので，基本的な定義から述べることにする．

1.1 定義 (1) $G=(V(G), E(G))=(V, E)$ によって vertex-set V, edge-set E の finite graph (一般に multiedges も loops も許す) を表す．写像

$$s : E \longrightarrow \{-1, +1\}$$

を G 上の sign と呼び，pair

$$\Sigma = (G, s)$$

を signed graph (略して s-graph) と呼び，$s(e)$ を $e \in E$ の sign という．この際，graph G を Σ の underlying graph ともいう．

Σ の order $\nu(\Sigma)$ = G の order $\nu(G) = \mathrm{card}(V)$,
Σ の size $\varepsilon(\Sigma)$ = G の size $\varepsilon(G) = \mathrm{card}(E)$,
Σ の連結成分の個数 $\omega(\Sigma)$ = G の連結成分の個数 $\omega(G)$

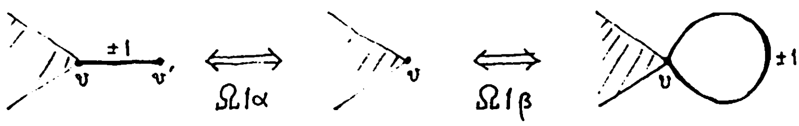
(2) s-graph $\Sigma'=(G', s')$ が s-graph $\Sigma=(G, s)$ の s-subgraph である $\Leftrightarrow$ G' が G の subgraph で，$s' = s|_{E(G')}$.

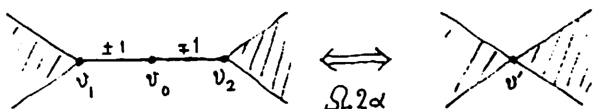
(3) s-graphs $\Sigma_1=(G_1, s_1)$ と $\Sigma_2=(G_2, s_2)$ が isomorphic である $\Leftrightarrow$ $\exists$ isomorphism $\phi : G_1 \to G_2$ ($s_1 = s_2\phi : E(G_1) \to \{-1, +1\}$).

この他，通常の graph theory で与えられる数々の定義は，自然に signed graphs に対しても定義され，相当の定理が成立する．

(4) $\mathbf{G}s$ =: s-graphs の全体．

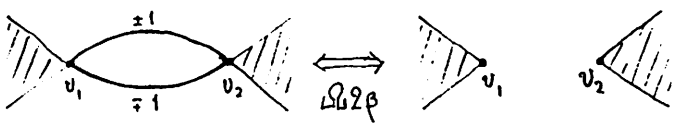
1.2 定義 次に挙げる s-graphs の変形を Reidemeister moves と呼ぶ:



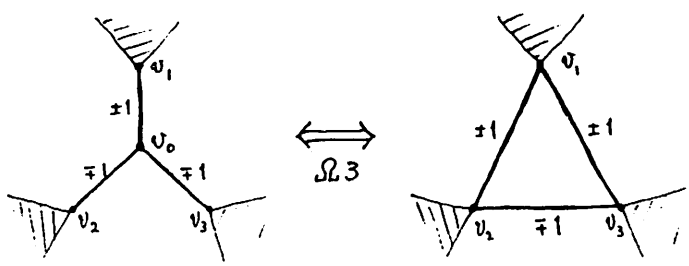


$v_1 \neq v_2$

v_0 を除去し, v_1 と v_2 を identify する.



$v_1 \neq v_2$



$v_1 \neq v_2$, $v_1 \neq v_3$ ($v_2 = v_3$ は可)

ただし, Ω2α, Ω2β, Ω3 において, edges の signs は複号同順とする.

1.3 定義(1) $\Sigma, \Sigma' \in \mathbb{G}s$ が Ω-equivalent である, $\Sigma \underset{\Omega}{\sim} \Sigma'$ で示す,

$\Longleftrightarrow$ $\mathbb{G}s$ の元の有限列

$$\Sigma = \Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_n = \Sigma'$$

が存在して, Σ_{i-1} と Σ_i は isomorphic であるか, Σ_i は Σ_{i-1} から Reidemeister moves のいずれか1つで得られる.

$\Sigma \in \mathbf{Gs}$ を代表元とする Ω-equivlance class を $[\Sigma]$ で示す.

(2) $\Sigma \in \mathbf{Gs}$ が <u>strict</u> である

$\Longleftrightarrow$ Σ には, Reidemeister moves $\Omega 1\alpha$. $\Omega 1\beta$, $\Omega 2\alpha$, $\Omega 2\beta$ の変換で, edges の数を減らす向きの変形が適用できない.

$\forall [\Sigma] \in \mathbf{Gs}/\Omega$ に対して, strict な代表元が存在する.

(3) $\omega[\Sigma] = \max\{\omega(\Sigma') \mid \Sigma' \in [\Sigma]\}$.

この $\omega[\Sigma]$ が well-defined であることの証明は 3.6 で与える.

2. Kirchhoff-Goeritz Matices

2.1 <u>定義</u> $\Sigma \in \mathbf{Gs}$, $\nu(\Sigma) = \nu$, に対して, 次のように定義される symmetric integral $(\nu\times\nu)$-matrix $KG(\Sigma) = \|a_{ij}\|$ を, Σ の <u>Kirchhoff-Goeritz matrix</u> と呼ぶ:

$$\begin{cases} a_{ij} = -\displaystyle\sum_{e = v_i v_j \in E} s(e) & (i \neq j), \\ a_{ii} = -\displaystyle\sum_{j \neq i} a_{ij} . \end{cases}$$

2.2 <u>Prop.</u> $\Sigma = (G, s) \in \mathbf{Gs}$ が $\omega(\Sigma) = \omega$ 個の連結成分 $\Sigma_1 = (G_1, s_1), \dots, \Sigma_\omega = (G_\omega, s_\omega)$, $s_i = s|E(G_i)$ $(i = 1, \dots, \omega)$ を持つとき, V の suffix を適当に選べば, 次が成立する:

$$KG(\Sigma) = \left\| \begin{matrix} KG(\Sigma_1) & & & O \\ & KG(\Sigma_2) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & KG(\Sigma_\omega) \end{matrix} \right\| .$$

2.3 定義 2つの symmetric integral matrices K と K' が Ω-equivalent であるとは，matices の有限列

$$K = K_0,\ K_1,\ K_2,\ \cdots,\ K_m = K'$$

が存在して，K_i は K_{i-1} から次に挙げる $\Omega(\mathrm{i})$, $\Omega(\mathrm{ii})$ または $\Omega(\mathrm{ii})$ の逆のいずれかによって得られるときをいい，$K \underset{\Omega}{\sim} K'$ で示す．

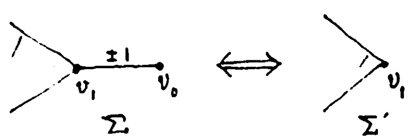
$$\Omega(\mathrm{i}):\quad S \longmapsto QSQ^T \quad (Q \text{ is unimodular integral matrix}),$$

$$\Omega(\mathrm{ii}):\quad S \longmapsto \left\| \begin{matrix} S & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{matrix} \right\|.$$

2.4 定理 $\Sigma, \Sigma' \in \mathbf{G}s$ が Ω-equivalent ; $\Sigma \underset{\Omega}{\sim} \Sigma'$

$$\Longrightarrow\ KG(\Sigma) \underset{\Omega}{\sim} KG(\Sigma').$$

証明．Σ' が Σ から，Reidemeister moves のいずれかによって得られたとしてよい。また $\Omega(\mathrm{i})$ より vertices の suffices は自由でよいことに注意する。$\Omega 1\alpha \sim \Omega 3$ について順に調べる。

$\Omega 1\alpha$: 

とすれば，

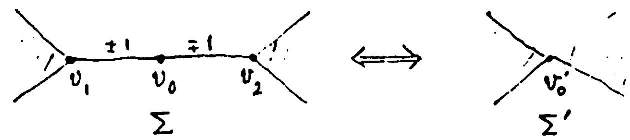
$$KG(\Sigma) = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} v_0 & v_1 & & \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} v_0 \\ v_1 \\ \\ \\ \end{matrix} & \left\| \begin{array}{c|ccc} \pm 1 & \mp 1 & 0 & \cdots \\ \hline \mp 1 & a_{11} & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \end{array} \right\| \end{array}, \qquad KG(\Sigma') = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} v_1 & \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} v_1 \\ \\ \\ \end{matrix} & \left\| \begin{matrix} a'_{11} & \cdots & \cdot \\ \vdots & & \\ \vdots & & \end{matrix} \right\| \end{array}$$

で，$a_{11} = a'_{11} \pm 1$ が成立し，その他の成分については $a_{ij} = a'_{ij}$．
従って，明らかに

$$KG(\Sigma) \underset{\Omega}{\sim} \left\| \begin{array}{c|c} \pm 1 & 0 \\ \hline 0 & KG(\Sigma') \end{array} \right\| \underset{\Omega}{\sim} KG(\Sigma').$$

$\Omega 1\beta$： 定義から $KG(\Sigma) = KG(\Sigma')$.

$\Omega 2\alpha$：



とすれば，

$$KG(\Sigma) = \begin{array}{c} \\ v_0 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & \cdots \end{array} \\ \left\| \begin{array}{c|cccc} 0 & \mp 1 & \pm 1 & 0 & \cdots \\ \hline \mp 1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ \pm 1 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array} \right\| \end{array}, \quad KG(\Sigma') = \begin{array}{c} \\ v_0' \\ v_3 \\ \vdots \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_0' & v_3 & \cdots \end{array} \\ \left\| \begin{array}{c|cc} a' & a'_{03} & \cdots \\ \hline a'_{30} & a'_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{array} \right\| \end{array}$$

で，$a_{1i} + a_{2i} = a'_{0i}\ (i \geq 3)$, $a_{i1} + a_{i2} = a'_{i0}\ (i \geq 3)$,

$a' = a_{11} + a_{22} + a_{12} + a_{21}$, $a_{jk} = a'_{jk}\ (j \geq 3,\ k \geq 3)$.

従って

$$KG(\Sigma) \underset{\Omega}{\sim} \left\| \begin{array}{cc|cc} 0 & \mp 1 & 0 & 0 \ \cdots \\ \mp 1 & a_{11} & a_{11}+a_{12} & a_{13} \ \cdots \\ \hline 0 & a_{11}+a_{21} & & \\ 0 & a_{31} & \multicolumn{2}{c}{KG(\Sigma')} \\ \vdots & \vdots & & \end{array} \right\| \underset{\Omega}{\sim} \left\| \begin{array}{cc|c} 0 & \mp 1 & 0 \\ \mp 1 & a_{11} & 0 \\ \hline 0 & 0 & KG(\Sigma') \end{array} \right\|.$$

ところで一般に a が偶数のとき，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mp\frac{a}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \mp\frac{a}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \therefore \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & a \end{pmatrix} \underset{\Omega}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

しかも

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mp 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mp 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mp 1 \end{array}\right)$$

が成立するから $\begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & a \end{pmatrix} \underset{\Omega}{\sim} \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \mp 1 \end{pmatrix}$.

a が奇数の場合にも

$$\begin{pmatrix}1&0\\ \mp\frac{a-1}{2}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\pm1\\ \pm1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\mp\frac{a-1}{2}\\ 0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\pm1\\ \pm1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\mp1&1\\ 0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\pm1\\ \pm1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mp1&0\\ 1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\ 0&1\end{pmatrix}$$

が成立するから.　$\begin{pmatrix}0&\pm1\\ \pm1&a\end{pmatrix}\underset{\Omega}{\sim}\begin{pmatrix}-1&0\\ 0&1\end{pmatrix}$.

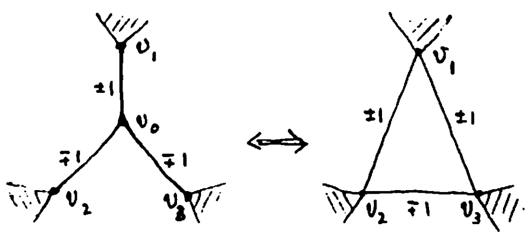
この結果, a_{11} が偶数の場合も奇数の場合も

$$KG(\Sigma)\underset{\Omega}{\sim}KG(\Sigma')$$

が成立する.

<u>$\Omega 2\beta$</u>: 定義から $KG(\Sigma)=KG(\Sigma')$.

<u>$\Omega 3$</u>:



Σ　　　　　　Σ'

とすれば,

$$KG(\Sigma)=\begin{array}{c|ccccccc|}
 & v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & \cdots \\
\hline
v_0 & \mp1 & \mp1 & \pm1 & \pm1 & 0 & \cdots \\
v_1 & \mp1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\
v_2 & \pm1 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \\
v_3 & \pm1 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\
v_4 & 0 & a_{41} & a_{42} & a_{41} & a_{44} & \cdots \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & &
\end{array},\quad
KG(\Sigma')=\begin{array}{c|ccccc|}
 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & \cdots \\
\hline
v_1 & a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} & \cdots \\
v_2 & a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} & \cdots \\
v_3 & a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} & \cdots \\
v_4 & a'_{41} & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} & \cdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

で, $a'_{11}=a_{11}\pm1$, $a'_{12}=a_{12}\mp1$, $a'_{13}=a_{13}\mp1$, $a'_{1i}=a_{1i}$ $(i\geq 4)$,
$a'_{22}=a_{22}\pm1$, $a'_{21}=a_{21}\mp1$, $a'_{23}=a_{23}\pm1$, $a'_{2i}=a_{2i}$ $(i\geq 4)$,
$a'_{33}=a_{33}\pm1$, $a'_{31}=a_{31}\mp1$, $a'_{32}=a_{32}\pm1$, $a'_{3i}=a_{3i}$ $(i\geq 4)$.

$$a_{jk} = a'_{jk} \quad (j \geq 4,\ k \geq 1).$$

従って

$$KG(\Sigma) \underset{\Omega}{\sim} \left\| \begin{array}{c|c} \mp 1 & 0 \\ \hline 0 & KG(\Sigma') \end{array} \right\| \underset{\Omega}{\sim} KG(\Sigma')$$

は容易に確かめられる. //

3. Invariants.

次に Kirchhoff-Goeritz matices から導かれる signed graphs の Ω-equivalence class の不変量について述べよう.

3.1 定義 (1) 一般に, M を可換環 $\mathcal{R}$ 上の $(p \times q)$-matrix とするとき, $\forall k \in \mathbb{Z}$ について M の the k^{th} elementary ideal $E_k(M)$ は次のようにして定義される $\mathcal{R}$ の ideal のことである:

$$E_k(M) = \begin{cases} (0) & (k < 0 \text{ または } k < q-p), \\ \mathcal{R} & (k \geq q), \\ M \text{ の } (q-k)\times(q-k) \text{ 小行列式によって} \\ \text{生成される } \mathcal{R} \text{ の ideal} & (\text{その他の場合}). \end{cases}$$

この定義から常に次が成立する:

$$(\star) \quad E_k(M) \subset E_{k+1}(M) \quad (\forall k \in \mathbb{Z}).$$

(2) $\Sigma \in \mathbf{Gs}$ について, $\mathbb{Z}$ 上の symmetric $(\nu \times \nu)$-matrix $KG(\Sigma)$ の the k^{th} elementary ideal $E_k(KG(\Sigma))$ を $E_k(\Sigma)$ と書き, Σ の the k^{th} elementary ideal と呼ぶ.

定理 2.4 と, 上の定義 3.1(1) の $(\star)$ より次が成り立つ:

3.2 定理 $\Sigma, \Sigma' \in \mathbf{Gs}$ について, $\Sigma \underset{\Omega}{\sim} \Sigma'$
$\Rightarrow E_k(\Sigma) = E_k(\Sigma') \quad (\forall k \in \mathbb{Z}).$

3.3 定義 $\Sigma \in \mathbf{G}s$ の elementary ideals の列 $\{E_k(\Sigma)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ を $[\Sigma] \in \mathbf{G}s/\Omega$ の elementary ideals の列と呼び，$E_k(\Sigma)$ を $E_k([\Sigma])$ とも書く．

3.4 定理 $\forall \Sigma \in \mathbf{G}s$ について次が成立する：

(1) $E_0(\Sigma) = (0)$.

(2) $E_1(\Sigma)$ は principal ideal.

証明．(1) は Kirchhoff-Goeritz matrix の定義 2.1 より明らか．従って (2) も自明であるが，念のために証明する．$KG(\Sigma)$ のすべての $(\nu-1)\times(\nu-1)$ 小行列式の絶対値が相等しいことを示せばよい．

$KG(\Sigma)$ の第 i 行と第 j 列を取り除いて得られる $(\nu-1)$ 次の小行列の行列式を $\square_{ij}$ で表すと，

$$\square_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,\nu} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\nu 1} & a_{\nu 2} & \cdots & a_{\nu,j-1} & a_{\nu,j+1} & \cdots & a_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

ところで $KG(\Sigma)$ の定義から，各行について

$$a_{k1} + a_{k2} + \cdots + a_{k\nu} = 0$$

$$\therefore -a_{kj} = a_{k1} + a_{k2} + \cdots + a_{k,j-1} + a_{k,j+1} + \cdots + a_{k\nu}$$

そこで，$\square_{ij}$ の第2列以後の列をすべて第1列に加えることによって次がわかる：

$$\square_{ij} = \begin{vmatrix} -a_{1j} & a_{12} & & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{i-1,j} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,\nu} \\ -a_{i+1,j} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{\nu,j} & a_{\nu 2} & \cdots & a_{\nu,j-1} & a_{\nu,j+1} & \cdots & a_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^j \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,\nu} \\ a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\nu 2} & \cdots & a_{\nu,j-1} & a_{\nu j} & a_{\nu,j+1} & \cdots & a_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^j \square_{i1} .$$

$$\therefore |\square_{i1}| = |\square_{i2}| = \cdots = |\square_{i\nu}| .$$

$KG(\Sigma)$ は symmetric であるから，同様にして

$$|\square_{1j}| = |\square_{2j}| = \cdots = |\square_{\nu j}|$$

も得られる。//

3.5 定義　$\Sigma \in \mathfrak{G}s$ について，$E_1(\Sigma)$ の生成元の絶対値，すなわち $KG(\Sigma)$ の任意の (i,j)-cofactor（余因子）の行列式の絶対値，を Σ の determinat と呼び，$\det(\Sigma)$ で示す。

注意　Knot Theory では，上の定理 3.4 の性質から，$KG(\Sigma)$ から任意の i 行目と i 列目（Σ の任意の vertex v_i に対応する行と列）を除いて得られる $(\nu-1)\times(\nu-1)$ 行列 $KG_i(\Sigma)$ を Goeritz matrix として採用することが多い。後の 3.11 を参照のこと。

定理3.4 と Prop. 2.2 より直ちに次が得られる. これは定義1.3 (3) で述べた $\omega[\Sigma]$ が well-defined であることを示す.

3.6 系 $\forall \Sigma \in \mathbf{G}s$ について次が成立する:

$$1 \leqq \omega[\Sigma] \leqq \min\{k \mid E_k(\Sigma) \neq (0)\}.$$

尚, vertex 1つだけから成る graph $\Sigma=(G, s)$, $G=(\{v\}, \phi)$, も signed graph と考える.

$$\underset{v}{\bullet} \quad \underset{\Omega 1\alpha}{\Longleftrightarrow} \quad \underset{v}{\bullet}\overset{\pm 1}{\rule[0.5ex]{3em}{0.4pt}}\underset{v'}{\bullet}$$

だから, 定理2.4より

$$KG(\underset{v}{\bullet}) \underset{\Omega}{\sim} KG(\underset{v}{\bullet}\overset{\pm 1}{\rule[0.5ex]{2em}{0.4pt}}\underset{v'}{\bullet}) = \begin{array}{c|cc|} & v & v' \\ v & \pm 1 & \mp 1 \\ v' & \mp 1 & \pm 1 \end{array}$$

そこで $KG(\bullet) = \|0\|$ ではあるが, $\det(\bullet) = 1$ と考える.

次に $\det(\Sigma)$ が s-graph Σ においてどんな意味を持つのかについて考えてみよう. 実は graph の Kirchhoff matrix の性質から次のことがわかる.

3.7 Prop. (Matrix-Tree Theorem: Tutte [6, Theorem VI.29] など graph theory の本, Burde-Zieschang [1, Appendix A, 特にA4] など参照)

(1) $\Sigma \in \mathbf{G}s$, $\Sigma = (G, s)$, について,

$s(e) = +1$ $(\forall e \in E)$ または $s(e) = -1$ $(\forall e \in E)$

$\Rightarrow$ $\det(\Sigma) = G$ に含まれる spanning trees の個数.

(2) $\Sigma \in \mathbf{G}s$ が ω 個の連結成分 $\Sigma_1 = (G_1, s_1)$, $\Sigma_2 = (G_2, s_2)$, $\cdots$, $\Sigma_\omega = (G_\omega, s_\omega)$ から成るとき, 各 $i = 1, \cdots, \omega$ について

$s_i(e) = +1$ $(\forall e \in E(G_i))$ または $s_i(e) = -1$ $(\forall e \in E(G_i))$

$\Rightarrow$ $|E_\omega(\Sigma)| = G$ に含まれる spanning forests の個数. //

3.8 <u>定義</u> $\Sigma \in \mathbf{G}s$ の s-subgraph Δ について

$$s(\Delta) = \prod_{e \in E(\Delta)} s(e)$$

と定める.

$s(\Delta) = +1$ のとき, Δ を positive,
$s(\Delta) = -1$ のとき, Δ を negative

な s-subgraph と呼ぶ.

$\Sigma = (G, s)$ の <u>spanning tree</u> $\tau = (T, t)$ とは, T が G の spanning tree で, $t = s|_{E(T)}$ なる Σ の s-subgraph をいう.

$\Sigma = (G, s)$ の spanning forests, cycles, paths 等も同様の意味で Σ の s-subgraphs を意味するものとする.

3.9 <u>Prop.</u> $\Sigma \in \mathbf{G}s$ について,

(1) $\det(\Sigma) = \Big|$ {Σ の positive spanning trees の個数} − {Σ の negative spanning trees の個数} $\Big|$.

(2) $|E_\omega(\Sigma)| = \Big|$ {Σ の positive spanning forests の個数} − {Σ の negative spanning forests の個数} $\Big|$. //

3.10 <u>Remark.</u> signed graphs に対する重要な概念として, <u>均衡</u>がある. すなわち, $\Sigma \in \mathbf{G}s$ が <u>balanced</u> (Harary et al [3])

$\Leftrightarrow$ Σ の任意の cylce C が positive ; $s(C) = +1$.

ただし balanced という条件は Ω-equivalence の不変量でない.

最後に symmetric matrix $KG(\Sigma)$ に associate する 2次形式にふれておく.

3.11 <u>定義</u> $\Sigma \in \mathbf{G}s$ の quadratic form を次のように定義する:

$$f(x_1, \cdots, x_{\nu-1}) = \hat{f}(x_1, \cdots, x_{\nu-1}, 0).$$

$$\hat{f}(x_1, \cdots, x_{\nu-1}, x_\nu) = \sum_{i,j=0}^{\nu} a_{ij} x_i x_j .$$

ここで a_{ij} は定義2.1で与えたもの。

$$e_{ij} = \sum_{e=v_iv_j\in E} s(e) = -a_{ij} \quad (i \neq j)$$

とおけば、 $\hat{f}(x_1, \ldots, x_{\nu-1}, x_\nu) = \sum_{i<j} e_{ij}(x_i - x_j)^2$

と表わされる。すなわち $\hat{f}$ は symmetric integral matrix $KG(\Sigma)$ に associate し、 f は $KG(\Sigma)$ の principal minor $KG_\nu(\Sigma)$ に associate している。

2つの quadratic forms f と f' が 同じ immediate family に属する $\Leftrightarrow$ f と f' に associate する coefficient matrices が Ω-equivalent. (Kyle [4]).

このように定めれば、 $\Sigma \in \mathbb{G}s$ の Ω-equivalence class $[\Sigma]$ に対応して、 $[KG(\Sigma)]$ から quadratic forms の immediate family が得られる。この immediate family の invariants の例が Kyle [4, §2] にあるが、詳細は省略する。

quadratic forms といえば signature, nullity, Minkowski unit などの invariants を思い出すが、定義2.3の変形 Ω(ii) は明らかに signature を変える。nullity は invariant である。上に定義した quadratic form f が Σ の何と結びつくのか、特に幾何的な意味については、残念ながら良くわからない。尚、knots・links の場合、signature 等は cobordism invariants である。

3.12 Remark. knots・links の場合に Reidemeister moves はその ambient isotoy type を保存する。そこで oriented な knots や links を考え、それらの正則射影図から signed coded digraphs を読み取ることができる。これをモデルに一般の signed coded digraphs を扱ってもよいが、graph theory としてどのような意味があるのか不明である。機会があればいずれ紹介したい。

References

[1] G.Burde and H.Zieschang : KNOTS, de Gruyter Studies in Math., Vol.5, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1985.

[2] L.Goeritz : Knoten und quadratische Formen, Math.Z., 36(1933), 647-654.

[3] F.Harary, R.Z.Norman and D.Cartwright : STRUCTURAL MODELS : An Introduction to the theory of directed graphs, John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1965.

[4] R.H.Kyle : Branched covering spaces and the quadratic form of links, Ann.of Math.(2), 59(1954), 539-548.

[5] H.Seifert : Die Verschlingungsinvarianten der zyklischen Knotenüberlagerungen, Abh.Math.Univ.Hamburg, 11(1935), 84-101.

[6] W.T.Tutte : GRAPH THEORY, Encyclopedia of Math. and its Appl., Vol.21, Addison-Wesley and Cambridge Univ.Press, 1984.

[7] T.Yajima and S.Kinoshita : On the graphs of knots, Osaka Math. J., 9(1957), 155-163.

[8] M.Kneser and D.Puppe : Quadratische Formen und Verschlingungsinvarianten von Knoten, Math.Z., 58(1953), 367-384.