HAKONE SEMINAR 23 (2007) 27-33.

# Delta-cobordism and weak self delta-equivalence for links

Tetsuo SHIBUYA(Osaka Institute of Technology)

## 1 Introduction.

本稿は References の [14],[15] の要約です。

$R^3$ の 2 つの $n$-component links $\ell = k_1 \cup \ldots \cup k_n, \ell' = k'_1 \cup \ldots \cup k'_n$ が $\Delta$-*cobordant* とは $a < b$ として、$\ell(\subset R^3[a])$ と $\ell'(\subset R^3[b])$ の間に a union of mutually disjoint annuli $\mathcal{A} = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ で有限個の点（それらは各 $A_i$ の特異点になり、その集合を $\mathcal{S}(A_i)$ で表す）を除き locally flat で $\mathcal{S}(A_i)$ の各点 $P$ に対し $(\partial N(P : R^3[a,b]) : \partial N(P : A_i))$ が a Borromean rings となるものが $R^3[a,b]$ に張れるときをいう。そのとき $\mathcal{A}$ を $\ell$ と $\ell'$ の間の $\Delta$-annuli という。ここで各 $A_i$ は $k_i$ と $k'_i$ の間の $\Delta$-annulus である。さらに各 $\mathcal{S}(A_i) = \emptyset$ のとき $\ell$ と $\ell'$ は *cobordant* といい $\ell \sim \ell'$ で表す。$\ell$ と $\ell'$ が cobordant でさらに各 $A_i$ が minimal(or maximal) point,[5], を含まないとき $\ell$(resp. $\ell'$) は $\ell'$(resp. $\ell$) に *ribbon cobordant* といい $\ell \geq \ell'$ (resp. $\ell' \geq \ell$) で表す。

link の局所変形に関しては最近、様々な研究がなされている。ここでは link の ($\Delta$-)cobordism と self $\sharp$-move, self $\Delta$-move について考える。link homotopy は [6] により定義されている。また以下の変形を $\sharp$-move,$\Delta$-move (Fig. 1) という。

Fig. 1

特にこれらの変形を link の 1 つの成分で行うとき、それぞれ self $\sharp$-move,self $\Delta$-move という。これらの変形は homotopy で実現でき以下の強弱関係が成立する,[8]。

$$\text{homotopy} \longleftarrow \text{self } \sharp\text{-move} \longleftarrow \text{self } \Delta\text{-move}$$

2 つの links が有限回の self $\sharp$-moves,self $\Delta$-moves で移り合うとき、それらをそれぞれ *self $\sharp$-equivalent,self $\Delta$-equivalent* という。

cobordant links については以下が知られている。

**Proposition.**([2],[3],[12]).
(1) *Two cobordant links are link homotopic.*
(2) *Two cobordant links are self $\sharp$-equivalent.*

self $\Delta$-equivalence に関しては [9],[10] で cobordant であるが self $\Delta$-equivalent でない例が知られている。しかし最近、安原氏の [16] により cobordant to a trivial link $\mathcal{O}$ である link は self $\Delta$-equivalent to $\mathcal{O}$ であることが示された。

[14],[15] では self $\Delta$-equivalence より弱い weak self $\Delta$-equivalence という概念を定義し、これと ($\Delta$-)cobordism,self $\sharp$- and self $\Delta$-equivalences との関係について調べている。

# 2 $\Delta$-cobordism and weak self $\Delta$-equivalence for links.

一般には cobordism と self $\Delta$-equivalence の概念の間には強弱関係は成立しないが,2-component links で各成分の linking number が 0 のときは以下が成立する。

**Theorem 1.**([14]Lemma 2.4.) *If $\ell = k_1 \cup k_2$ and $\ell' = k_1' \cup k_2'$ are cobordant and $Link(k_1, k_2) = 0$, then $\ell$ and $\ell'$ are self $\Delta$-equivalent.*

**Proof.** $\ell \sim \ell'$ で $Link(k_1, k_2) = 0$ なので [1] より $a_3(\ell) = a_3(\ell')$, ここで $a_i$ は Conway polynomial の $i$ 次の係数。また $a_1(\ell) = Link(k_1, k_2) = 0$ だから [7] より $\ell$ と $\ell'$ は self $\Delta$-equivalent になる。

2-component link で $Link(k_1, k_2) \neq 0$ ならば Theorem 1 が成立しない例がある,Fig.2(a),[9],[10]。また 3-component link では cobordant で各 $Link(k_i, k_j) = 0$ でも self $\Delta$-equivalent でない link がある,Fig.2(b),[10]。

Fig. 2

2 つの split した $n$-component links $\ell = k_1 \cup \ldots \cup k_n, \ell' = k_1' \cup \ldots \cup k_n'$ が *weakly self $\Delta$-equivalent* であるとは、$\ell \circ (-\ell')$ のある product fusion の bands の union $\mathcal{B} = B_1 \cup \ldots \cup B_n$ で得られる link (それを $\ell \sharp_{\mathcal{B}} (-\ell')$ 又は簡単に $\ell \sharp (-\ell')$

で表す。）が trivial link に self $\Delta$-equivalent になるときをいう。ここで $B_i$ は $k_i$ と $-k'_i$ を fusion する band で $\ell \circ (-\ell')$ は $\ell$ と $-\ell'$ が split していることを意味し $-\ell'$ は $\ell'$ の reflective inverse である。

**Lemma 1.**([14]Lemma 3.1) *Weak self $\Delta$-equivalence for links is an equivalence relation.*

**Sketch of proof.** $\ell \circ (-\ell)$ の symmetric product fusion で得られる link は ribbon link,[4], になりそれは [13] により self $\Delta$-equivalent to trivial になる。故に $\ell$ と $\ell$ は weakly self $\Delta$-equivalent である。

つぎに $\ell$ と $\ell'$ が weakly self $\Delta$-equivalent ならば明らかに $\ell'$ と $\ell$ は weakly self $\Delta$-equivalent である。

$\ell$ と $\ell'$,$\ell'$ と $\ell''$ が weakly self $\Delta$-equivalent ならば $\ell$ と $\ell''$ が weakly self $\Delta$-equivalent になる証明は少し複雑でここでは省略するが成立する。([14]Lemma 3.1 を参照。)

以上より weak self $\Delta$-equivalence は link の an equivalence relation になる。

weak self $\Delta$-equivalence と self $\sharp$-, self $\Delta$-equivalences の間の強弱関係は Theorems 2,3 である。

**Theorem 2.**([14]Theorem 2.6.) *If $\ell$ and $\ell'$ are weakly self $\Delta$-equivalent, they are self $\sharp$-equivalent.*

**Sketch of proof.** 仮定より明らかに $\ell(\subset R^3[0])$ と $\ell'(\subset R^3[3])$ の間に $\Delta$-annuli $\mathcal{A}_0$ が張れることが分かる。ここで [11] の Lemma 1.17 の証明と同じ手法で $\mathcal{A}_0$ から以下の条件をみたす $\ell$ と $\ell'$ の間の $\Delta$-annli $\mathcal{A}$ が得られる。

(1) $L(=\mathcal{A} \cap R^3[1]) \geq \ell, L'(=\mathcal{A} \cap R^3[2]) \geq \ell'$.

(2) $L$ と $L'$ は self $\Delta$-equivalent である。

ここで Proposition(2) より $L$ と $\ell$,$L'$ と $\ell'$ は self $\sharp$-equivalent で self $\Delta$-equivalence ならば self $\sharp$-equivalence,[8], なので、Theorem 2 を得る。

Fig. 3 は Theorem 2 の逆が成立しない例である。この例は [8] では self $\Delta$-equivalent to trivial でない例として挙げられているが以下の Theorem 4 より weakly self $\Delta$-equivalent to trivial にもならない。

Fig. 3

Theorem 3 を証明するために以下を準備する。

**Lemma 2.**([14]Lemma 3.2.) *If $\ell \geq \ell'$, $\ell$ and $\ell'$ are weakly self $\Delta$-equivalent.*

**Sketch of proof.** $\ell \geq \ell'$ なので $\ell(\subset R^3[0])$ と $\ell'(\subset R^3[1])$ の間に minimal point を持たない mutually disjoint locally flat annuli $\mathcal{A}$ が存在する。$\mathcal{A}$ の各 maximal point を level preserving arc に沿って $R^3[2]$ まで移動したものを $\mathcal{A}'$ で表すと、$\mathcal{A}' \cap R^3[1] = \ell' \circ$(a trivial link $\mathcal{O}$) である。そこで $\ell' \circ \mathcal{O}$ と split した $-\ell'$ をとり $\ell' \circ (-\ell')$ の symmetric product fusion の bands $\mathcal{B}$ を $\mathcal{B} \cap \mathcal{D} = \emptyset$ になるようにとる、ここで $\mathcal{D}$ は $\mathcal{O}$ に張る mutually disjoint disks で $\mathcal{D} \cap (\ell' \circ (-\ell')) = \emptyset$ にとる。この結果 $\ell' \sharp (-\ell') \cup \mathcal{O} \approx \ell' \sharp (-\ell') \circ \mathcal{O}$ でこれは ribbon link である,[4]。この $\mathcal{B}$ よりある product fusion of $\ell \circ (-\ell')$ の bands $\mathcal{B}_0$ が存在してこの $\mathcal{B}_0$ により得られる link $\ell \sharp (-\ell')$ が ribbon link になり [13] より $\ell \sharp (-\ell')$ は self $\Delta$-equivalent to trivial になる。すなわち $\ell$ と $\ell'$ は weakly self $\Delta$-equivalent になる。

**Theorem 3.**([14]Theorem 2.3.) *If $\ell$ and $\ell'$ are self $\Delta$-equivalent, they are weakly self $\Delta$-equivalent.*

**Sketch of proof.** $\ell(\subset R^3[0])$ と $\ell'(\subset R^3[2])$ が self $\Delta$-equivalent だから $R^3[0,2]$ でこれらの間に level preserving $\Delta$-annuli $\mathcal{A}_0$ が張れる。$\mathcal{S}(\mathcal{A}_0)$ の各点を level preserving arc に沿って $R^3[3]$ まで移動したものを $\mathcal{A}$ で表すと、$\mathcal{F}(= \mathcal{A} \cap R^3[0,2])$ は mutually disjoint locally flat non-singular orientable surface of genus 0 which has neither minimal nor maximal points で $\mathcal{F} \cap R^3[0] = \ell, \mathcal{F} \cap R^3[2] = (-\ell') \circ$(有限個の Borromean rings $\mathcal{L}$) になる。そこで $R^3[2]$ の 3-ball $B^3$ で $B^3 \cap (\mathcal{F} \cap R^3[2]) = \mathcal{L}$ をとる。このとき、$\ell' \circ (-\ell')(\subset R^3[2] - B^3)$ の symmetric product fusion の bands $\mathcal{B}$ を $\mathcal{B} \cap B^3 = \emptyset$ となるようにとると、$\ell' \sharp (-\ell')$ は ribbon link になり self $\Delta$-equivalent to a trivial link $\mathcal{O}(\subset R^3[3])$ になる。この $\mathcal{B}$ を用いると、$\ell \sharp (-\ell')(\subset R^3[0])$ と $\mathcal{O}$ の間に $\Delta$-annuli $\mathcal{A}'$ $(\subset R^3[0,3])$ で minimal point を持たないものが構成できる。したがって Theorem 2 の証明と同様で $\mathcal{A}'$ からさらに以下の条件をみたす $\Delta$-annuli $\mathcal{A}^*$ を構成できる。

(1) $L(= \mathcal{A}^* \cap R^3[1]) \geq \mathcal{O}$ である。

(2) $\mathcal{A}^* \cap R^3[0,1]$ は level preserving $\Delta$-annuli, すなわち $\ell \sharp (-\ell')$ と $L$ は self $\Delta$-equivalent である。

(1) より $L$ は ribbon link になるので $L$ は self $\Delta$-equivalent to $\mathcal{O}$ になる。したがって $\ell \sharp (-\ell')$ は self $\Delta$-equivalent to $\mathcal{O}$ になり $\ell$ と $\ell'$ は weakly self $\Delta$-equivalent になる。

Fig. 2 の links はそれぞれ a (2,p)-torus link, a Borromean rings に weakly self $\Delta$-equivalent であることが明らかに分かるので Theorem 3 の逆は成立しない。しかし 2-component link で linking number が 0 のときは以下で Theorem 3 の逆が成立する。

**Theorem 4.**([14]Theorem 2.5.) *For two 2-component links $\ell(= k_1 \cup k_2), \ell' = k_1' \cup k_2'$ with $Link(k_1, k_2) = 0$, if $\ell$ and $\ell'$ are weakly self $\Delta$-equivalent, then they are self $\Delta$-equivalent.*

**Sketch of proof.** 仮定より $\ell(\subset R^3[0])$ と $\ell'(\subset R^3[3])$ の間に $\Delta$-annuli $\mathcal{A}_0$ が $R^3[0,3]$ で張れることは明らかである。このとき Theorem 2 の証明の条件 (1),(2) をみたす $\mathcal{A}(= A_1 \cup A_2), L, L'$ が存在する。さらに $Link(k_1, k_2) = 0$ だから $Link(k_1', k_2') = 0$ となり Theorem 1 より $L$ と $\ell, L'$ と $\ell'$ はそれぞれ self $\Delta$-equivalent になる。故に $\ell$ と $\ell'$ は self $\Delta$-equivalent になる。

**Theorem 5.**([15]Theorem) *Two n-component links are $\Delta$-cobordant if and only if they are weakly self $\Delta$-equivalent.*

**Sketch of proof.** $\ell(\subset R^3[0])$ と $\ell'(\subset R^3[3])$ が $\Delta$-cobordant とすると Theorem 2 の証明の条件をみたす $\Delta$-annuli $\mathcal{A}(= A_1 \cup ... \cup A_n)$ と $L, L'$ が存在する。そのとき Lemma 2 より $L$ と $\ell, L'$ と $\ell'$ はそれぞれ weakly self $\Delta$-equivalent で Theorem 3 より $L$ と $L'$ は weakly self $\Delta$-equivalent になる。故に Lemma 1 より $\ell$ と $\ell'$ は weakly self $\Delta$-equivalent になる。

逆は明らかである。

これより次を得る。

**Corollary 1.**([14]Theorem 3.3.) *If $\ell \sim \ell'$, they are weakly self $\Delta$-equivalent.*

また Theorems 4,5 より次を得る。これは Theorem 1 の拡張になる。

**Corollary 2.** *For two 2-component links $\ell(= k_1 \cup k_2), \ell'$ with $Link(k_1, k_2) = 0$, if $\ell$ and $\ell'$ are $\Delta$-cobordant, then they are self $\Delta$-equivalent.*

## References

[1] T.D. Cochran: Concordance invariance of coefficient of Conway's link polynomial, Invent.Math.**82**(1985),527-541.

[2] C.H. Giffen: Link concordance implies link homotopy, Math. Scand.**45** (1979),243-254.

[3] D.L. Goldsmith: Concordance implies homotopy for classical links in $M^3$, Comm.Math.Helv.**54**(1979),347-355.

[4] F. Hosokawa: A concept of cobordism between links, Ann. Math.**86** (1967),362-373.

[5] A. Kawauchi, T. Shibuya and S. Suzuki: Descriptions on surfaces in four-space,I, Math.Sem.Notes, Kobe Univ.**10**(1982), 75-125.

[6] J.W. Milnor: Link group, Ann.Math.**59**(1954),177-195.

[7] Y. Nakanishi and Y. Ohyama: Delta link homotopy for two component links,III, J.Math.Soc.Japan **55**(2003),641-654.

[8] Y. Nakanishi and T. Shibuya: Relations among self delta- and self sharp-equivalences for links, Proc. of Knots in Hellas 1998, ed. J.H. Przytycki, World Sci. Publ. Singapore,353-360.

[9] Y. Nakanishi and T. Shibuya: Link homotopy and quasi self delta-equivalence for links, J.Knot Theory Ramification **9**(2000),683-691.

[10] Y. Nakanishi, T. Shibuya and A. Yasuhara: Self delta-equivalence of cobordant links, Proc.Amer.Math.Soc. **134**(2006), 2465-2472.

[11] T. Shibuya: On the cobordism of links in 3-space, Kobe J. Math.**1** (1984),119-131.

[12] T. Shibuya: Self $\sharp$-unknotting operation for links, Memo.Osaka Insti. Tech. **34**(1989),9-17.

[13] T. Shibuya: Self $\Delta$-equivalence of ribbon links, Osaka J.Math. **31** (1996),751-760.

[14] T. Shibuya: Weak self delta-equivalence for links, Kobe J.Math. **24** (2007),41-52.

[15] T. Shibuya: Delta cobordism and weak self delta-equivalence for links, Memo.Osaka Insti.Tech. **52**(2007),5-9.

[16] A. Yasuhara: Self delta-equivalence for links whose Milnor's isotopy invariants vanish, preprint.

Department of Mathematics
Osaka Institute of Technology
Asahi, Osaka 535-8585, Japan
E-mail: shibuya@ge.oit.ac.jp

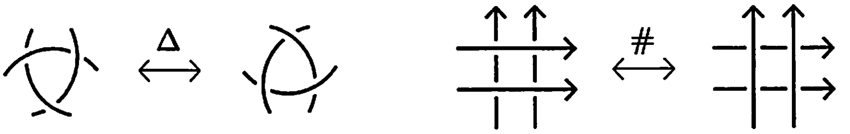


Figure 1.

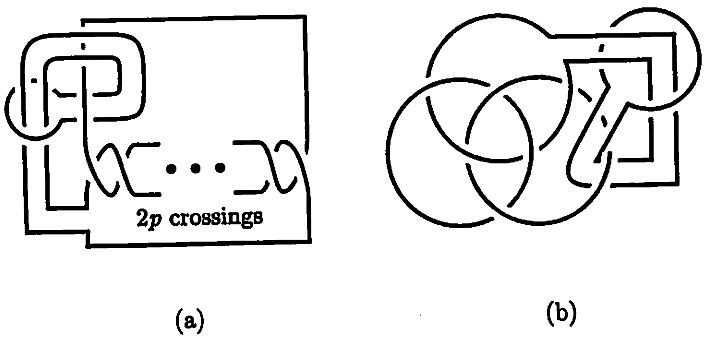


Figure 2.

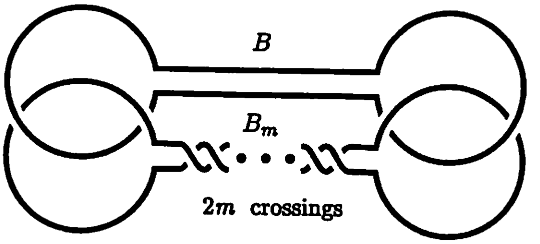


Figure 3.