

# On Local Moves for Links of Genus Zero

渋谷哲夫 (大阪工大)

## 1 Introduction.

本稿は「5」を要約したものです。

「1」で J.W. Milnor は link homotopy という絡み目の局所変形概念を導入した。この論文の中に以下のような興味深い例がある (Fig. 1)。すなわち種数 0 の絡み目  $\ell = k_1 \cup k_2 \cup k_3 \cup k_4$  について  $L = k_1 \cup k_2$  は homotopic to 0 (すなわち有限回の homotopy の変形で自明になる) になるが  $\ell$  は homotopic to 0 ではないというものである。

Fig. 1

その後、最近まで様々な絡み目の局所変形が導入されているが、本稿ではそのうち、 $\sharp$ -move, pass-move,  $\Delta$ -move について扱う (Fig. 2)。特にこれらの変形で Fig. 2 の arcs が絡み目の 1 つの成分に含まれる場合、これらの変形を self  $\sharp$ -move, self pass-move, self  $\Delta$ -move ということにする。

Fig. 2

2 つの絡み目  $\ell, \ell'$  において  $\ell$  に適当な有限回の self  $\sharp$ -moves (or self pass-move, self  $\Delta$ -move) を施して  $\ell'$  に ambient isotopic になるとき  $\ell$  は  $\ell'$  に (又は  $\ell$  と  $\ell'$  は) self  $\sharp$  (resp. self pass, self  $\Delta$ )-equivalent という。

これらの局所変形では以下のような強弱関係が知られている。

Table

本稿では、種数 0 の絡み目の局所変形の性質として以下を示す。

**定理.**  $F_i (i = 1, \dots, n)$  を種数0の向き付け可能な曲面で  $F_i \cap F_j = \emptyset (i \neq j)$  とし  $\partial F_i = k_{i0} \cup \dots \cup k_{im_i}$ , また  $\mathcal{F} = F_1 \cup \dots \cup F_n$  に対し  $\partial \mathcal{F} = \ell, L_0 = k_{10} \cup \dots \cup k_{n0}$  とする。

もし  $\ell - L_0$  が自明な絡み目に self  $\Delta$ -equivalent で  $Link(k_{i0}, k_{ij}) = 0 (i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m_i)$  ならば、 $\ell$  は自明な絡み目に self  $\#$ -equivalent である。さらに各  $i, j$  で Arf invariant  $\varphi(k_{ij}) = 0$  ならば  $\ell$  は自明な絡み目に self pass-equivalent になる。

## 2 Proof of Theorem.

$\Delta$ -move の3本の arcs のうち少なくとも2本が絡み目の同じ成分に含まれるとき、その変形を quasi self  $\Delta$ -move という。

**補題 1.** ([2]) 1回の quasi self  $\Delta$ -move は有限回の homotopy の変形で実現できる。逆に1回の homotopy の変形は有限回の quasi self  $\Delta$ -move で実現できる。

$n$ -成分絡み目  $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$  が proper とは各  $i (= 1, \dots, n)$  で  $Link(K_i, L - K_i) (= \sum_{j \neq i} Link(K_i, K_j))$  が偶数のときをいう。  $L$  が proper のとき  $\varphi(L)$  が定義 ([3]), さらに  $\Phi(L) \equiv \sum_{i=1}^n \varphi(K_i) \pmod{2}$  で表すとき、reduced Arf invariant  $\bar{\varphi}(L) \equiv \varphi(L) - \Phi(L) \pmod{2}$  が定義される。

[6] においてつぎが示されている。

**補題 2.**  $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$  と  $L' = K'_1 \cup \dots \cup K'_n$  を homotopic な  $n$ -成分絡み目とする。

(1)  $L$  と  $L'$  が self  $\#$ -equivalent  $\iff L$  の任意の proper sublink  $\mathcal{L}$  とこれに対応する  $L'$  の sublink  $\mathcal{L}'$  について  $\bar{\varphi}(\mathcal{L}) = \bar{\varphi}(\mathcal{L}')$ .

(2)  $L$  と  $L'$  が self pass-equivalent  $\iff L$  の任意の proper sublink  $\mathcal{L}$  とこれに対応する  $L'$  の sublink  $\mathcal{L}'$  について  $\varphi(\mathcal{L}) = \varphi(\mathcal{L}')$ .

1回の  $\Delta$ -move は1個の Borromean rings を適当に band sum して得られ、また self  $\Delta$ -equivalence ならば self  $\#$ -equivalence なので [4] の定理3より次を得る。

**補題 3.** 絡み目  $L$  が自明な絡み目に self  $\Delta$ -equivalent ならば  $\bar{\varphi}(L) = 0$  である。

以下で定理の特別な場合を証明する。

**補題 4.**  $\mathcal{A} = A_1 \cup \dots \cup A_n$  を  $n$  個の non-twisted annulus  $A_i$  with  $\partial A_i = k_i \cup k'_i$  の disjoint union とする。もし  $L (= k_1 \cup \dots \cup k_n)$  が自明な絡み目に self  $\Delta$ -equivalent ならば、 $\ell (= \partial \mathcal{A})$  は自明な絡み目に self  $\#$ -equivalent になる。

さらに各  $i$  について  $\varphi(k_i) = 0$  ならば、 $\ell$  は自明な絡み目に self pass-equivalent になる。

**証明** 1 回の  $\Delta$ -move は 1 回の Fig. 3 の局所変形で実現できまた逆も真である。

Fig. 3

したがって Fig. 4(a) のように  $\partial A_i$  の一部の arcs を Fig. 4(d) に変形するには Fig. 4(b),(c) のようにすれば 8 回の quasi self  $\Delta$ -moves で実現できる。故に  $A_i$  が non-twisted で  $L$  が自明な絡み目に self  $\Delta$ -equivalent ならば、補題 1 より  $\ell$  は自明な絡み目に homotopic になる。

Fig. 4

故に  $\ell$  が自明な絡み目に self  $\#$ -equivalent であることを示すには補題 2 より  $\ell$  の任意の sublink  $\ell'$  で proper であるものに対し  $\varphi(\ell') = 0$  を示せば良い。 $\ell'$  が  $L$  に含まれるならば、 $\ell'$  も自明な絡み目に self  $\Delta$ -equivalent になり、補題 3 より、 $\bar{\varphi}(\ell') = 0$  である。次に  $\ell'$  が  $L$  に含まれない場合を考える。そのとき  $\ell'$  が  $k'_i$  を含む。もし  $\ell'$  が  $k_i$  を含めば、 $A_i$  が annulus で  $A_i \cap (\ell' - k_i - k'_i) = \emptyset$  だから明かに  $\varphi(\ell') = \varphi(\ell' - k_i - k'_i)$ ,  $\varphi(k_i) = \varphi(k'_i)$  であり、したがって  $\bar{\varphi}(\ell') = \bar{\varphi}(\ell' - k_i - k'_i)$  である。故に  $\ell'$  は  $k'_i$  を含むならば、 $\ell'$  は  $k_i$  を含まない場合を考えれば良い。このとき、相異なる整数  $i_1, \dots, i_q$  で  $\ell' = k_{i_1} \cup \dots \cup k_{i_p} \cup k'_{i_{p+1}} \cup \dots \cup k'_{i_q}$  と書ける。 $\ell' \cap (\text{interior of } \mathcal{A}) = \emptyset$  だから  $\ell'$  は  $\ell'' (= k_{i_1} \cup \dots \cup k_{i_p} \cup k_{i_{p+1}} \cup \dots \cup k_{i_q})$  に ambient isotopic で  $\ell''$  は  $L$  に含まれるので trivial link に self  $\Delta$ -equivalent になり、したがって  $\ell'$  も trivial link に self  $\Delta$ -equivalent で補題 3 より  $\bar{\varphi}(\ell') = 0$  になる。

故に補題 2 より  $\ell$  は trivial link に self  $\#$ -equivalent になる。さらに各  $j (= 1, \dots, q)$  で  $\varphi(k_{i_j}) = 0$  ならば  $\varphi(\ell') = 0$  で補題 2 より、 $\ell$  は trivial link に self pass-equivalent になる。

2 つの  $n$ -成分絡み目  $\ell_i \subset R^3[i], i = 0, 1$  が  $\#$ -cobordant であるとは、 $R^3[0, 1]$  において互いに交わらない annuli の union  $\mathcal{A} (= A_1 \cup \dots \cup A_n)$  で  $\partial \mathcal{A} \cap R^3[0] = \ell_0, \partial \mathcal{A} \cap R^3[1] = -\ell_1, \partial A_j \cap R^3[i] \neq \emptyset, j = 1, \dots, n$  でこれら

が有限個の  $A$  の内点、たとえば  $P_1, \dots, P_m$  で、これらを除くと局所的平坦で  $(\partial N(P_r : R^3[0, 1]), \partial N(P_r : A))$  が Fig. 5 の絡み目になるものが存在する時を言う。

Fig. 5

以下は [4] で示されている。

**補題 4.**  $\ell_0$  と  $\ell_1$  が  $\#$ -cobordant ならば、それらは self  $\#$ -equivalent である。

**定理の証明.**  $\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{im_i-1}$  を  $F_i$  上の互いに交わらない単純曲線で各  $\alpha_{ij}$  は  $k_{i0}$  の 2 点を結び  $cl(F_i - \bigcup_{j=1}^{m_i-1} N(\alpha_{ij} : F_i))$  が  $m_i$  個の annuli, 例えば  $A_{i1}, \dots, A_{im_i}$ , で  $\partial A_{ij} \supset k_{ij} (i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m_i)$  になるように取る。

定理の仮定で  $Link(k_{i0}, k_{ij}) = 0 (i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m_i)$  と  $\ell - L_0$  が trivial link に self  $\Delta$ -equivalent (したがって  $\ell - L_0$  の任意の 2-成分間の linking number は 0) より各  $A_{ij}$  は non-twisted であることが示される。故に補題 4 より  $\bigcup_{ij} \partial A_{ij}$  は trivial link に self  $\#$ -equivalent で、すなわち  $\ell$  は trivial link に  $\#$ -cobordant になる。したがって補題 5 より  $\ell$  は trivial link に self  $\#$ -equivalent になる。

さらに  $\varphi(k_{ij}) = 0 (i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m_i)$  ならば  $g(F_i) = 0$  で  $\partial F_i - k_{i0} (\subset \ell)$  は trivial link に self  $\#$ -equivalent だから  $\varphi(k_{i0}) = 0$  を得る。したがって補題 2 より  $\ell$  は trivial link に self pass-equivalent になる。

以下は [4] で証明済みであるが、定理を使うことにより簡単に示される。

**系.**  $\ell = k_1 \cup \dots \cup k_n$  がリボン絡み目とすると、 $\ell$  は trivial link に self pass-equivalent になる。

**証明.**  $\ell$  がリボン絡み目とすると、互いに交わらない disks の和集合  $\mathcal{D} (= \bigcup_{i=1}^n \mathcal{D}_i, \mathcal{D}_i = \bigcup_{j=0}^{m_i} D_{ij})$  と互いに交わらない bands の和集合  $\mathcal{B} (= \bigcup_{i=1}^n \mathcal{B}_i, \mathcal{B}_i = \bigcup_{j=1}^{m_i} B_{ij})$  で  $\partial(\mathcal{D} \cup \mathcal{B}) = \ell, \partial(\mathcal{D}_i \cup \mathcal{B}_i) = k_i$  で  $\mathcal{D} \cap \mathcal{B}$  の singularity が互いに交わらないリボンタイプのみとなるものが存在する。したがって  $\mathcal{F} (= N(\partial \mathcal{D} : \mathcal{D}) \cup \mathcal{B})$  は  $n$  個の互いに交わらない種数 0 の曲面の和集合で  $\partial \mathcal{F} - \ell$  は自明な絡み目で  $\partial \mathcal{F} - \ell$  の各成分  $K$  について  $Link(k_i, K) = 0$  である。故に定理より、 $\partial \mathcal{F}$  は自明な絡み目に self  $\#$ -equivalent になる。 $\ell$  は  $\partial \mathcal{F}$  の部分絡み目なので  $\ell$  も自明な絡み目に self  $\#$ -equivalent になる。

さらに各  $\varphi(k_i) = 0$  だから、補題 2 より、 $\ell$  は自明な絡み目に self pass-equivalent になる。

### References

- [1] J.W. Milnor: Link groups, *Ann. of Math.* 59(1954), 177-195.
- [2] Y. Nakanishi and T. Shibuya: Link homotopy and quasi self delta-equivalence for links, *J. of Knot Theory and its Ramification*, 9(2000), 683-691.
- [3] R.A. Robertello: An invariant of knot cobordism, *Comm. Pure and Appl. Math.* 18(1965), 543-555.
- [4] T. Shibuya: Self  $\sharp$ -unknotting operation of links, *Memo. Osaka Insti. Tech.* 34(1989), 9-17.
- [5] T. Shibuya: On local moves for links of genus zero, *Memo. Osaka Insti. Tech.*, to appear.
- [6] T. Shibuya and A. Yasuhara: Classification of links up to self pass-move, *J. Math. Soc. Japan*, to appear.

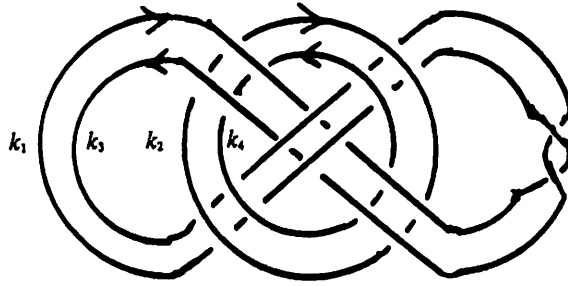


Fig. 1

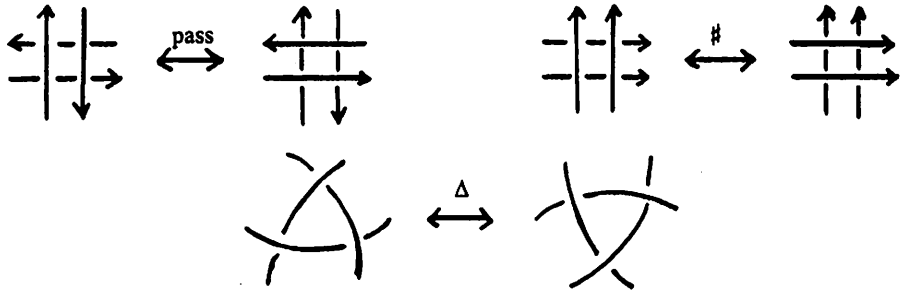
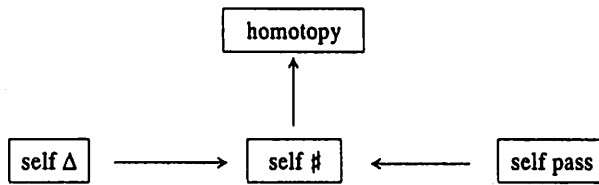


Fig. 2



Table

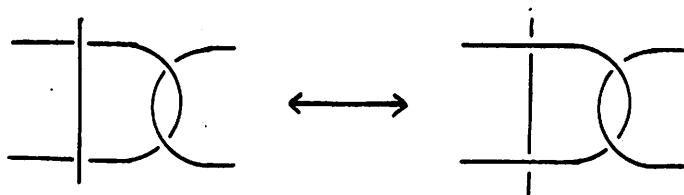


Fig. 3

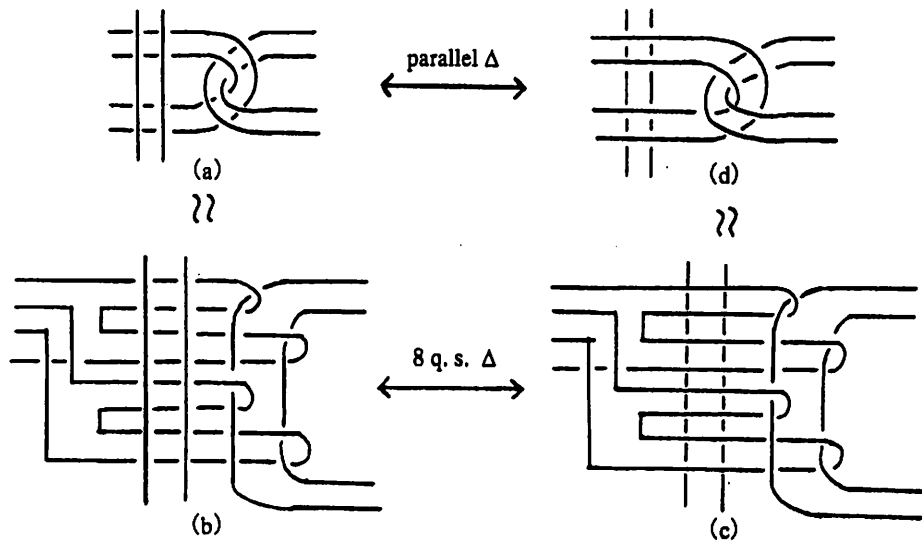


Fig. 4

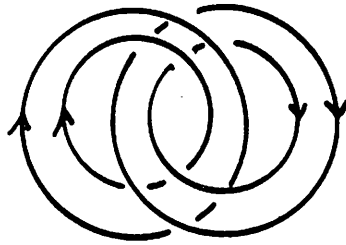


Fig. 5