HAKONE SEMINAR 16 (2000) 35-40.

Self Sharp-Equivalence of Certain Links

大阪工大　渋谷哲夫

本稿は [12] の概要を紹介するものです。

link-homotopy は Milnor により [3] で定義された。これは link の同じ成分の交叉点の上下を適当に入れ替えて移り合う有限回の変形をいう。♯-move,pass-move とは、それぞれ Fig.1(a),(b) の変形を言う [4],[2],[8]。もし4本の arcs が link の同じ成分に属するとき、この変形をそれぞれ self ♯-move,self pass-move という. (筆者の以前の論文では、これらをそれぞれ self ♯(I)-move, self ♯(II)-move と呼んでいた。) 2つの links が self ♯-equivalent (or self pass-equivalent) とは有限回の self ♯-moves (or self pass-moves) で移り合うときをいう。

Fig. 1

n-component link $\ell = k_1 \cup \ldots \cup k_n$ が proper とは linking number $Link(k_i, \ell - k_i)$ が各 i で偶数のときをいう。(knot は proper とする。) proper link ℓ に対し Arf invariant $\varphi(\ell)$ が定義でき、$\varphi(\ell) - \sum_{i=1}^{n} \varphi(k_i)$ (mod 2) を reduced Arf invariant と呼び、$\bar{\varphi}(\ell)$ で表す.

下記の結果は [11] で証明されたもので、本稿は、この結果を使い (reduced) Arf invariant を計算することにより、homotopic links in solid tori, Z_2-boundary links の self ♯-move, self pass-move による分類を試みたものである。

Proposition. 2つの n-component links $\ell = k_1 \cup \ldots \cup k_n, \ell' = k'_1 \cup \ldots \cup k'_n$ が homotopic とする。そのとき、つぎが成立する。

(1) ℓ と ℓ' が self ♯-equivalent $\Longleftrightarrow$ ℓ の任意の proper sublink $k_{i_1} \cup \ldots \cup k_{i_p}$ とそれに対応する ℓ' の proper sublink $k'_{i_1} \cup \ldots \cup k'_{i_p}$ の reduced Arf invariant が一致する。

(2) ℓ と ℓ' が self pass-equivalent $\Longleftrightarrow$ ℓ の任意の proper sublink $k_{i_1} \cup \ldots \cup k_{i_p}$ とそれに対応する ℓ' の proper sublink $k'_{i_1} \cup \ldots \cup k'_{i_p}$ の Arf invariant が一致する。

V を solid torus とし M を V の meridian disk とする。V の knot k に対し k と M の algebraic intersection number を $w(k)$ で表す.

k_i, k_i' をそれぞれ solid tori V_i, V_i' の knots とし、c_i, c_i' をそれぞれの core とする,$i = 1, ..., n$。また $\mathcal{V} = V_1 \cup ... \cup V_n$, $\mathcal{V}' = V_1' \cup ... \cup V_n'$ を互いに交わらない和集合とする。

Theorem 1. $\mathcal{V}, \Gamma = c_1 \cup ... \cup c_n, \ell = k_1 \cup ... \cup k_n$ と $\mathcal{V}', \Gamma' = c_1' \cup ... \cup c_n', \ell' = k_1' \cup ... \cup k_n'$ は上のものとする。

Γ, Γ'が homotopic で $w(k_i) = w(k_i')(= p_i), p_1 \equiv ... \equiv p_n \pmod 2$ とする。このとき

(1) Γ, Γ' が self $\sharp$-equivalent ならば、ℓ, ℓ' は self $\sharp$-equivalent である。さらに各 i で$\varphi(k_i) = \varphi(k_i')$ ならば、ℓ, ℓ' は self pass-equivalent である。

(2) p_1が奇数で ℓ, ℓ' は self $\sharp$-equivalent ならば,Γ, Γ'は self $\sharp$-equivalent である。さらに各 i で $\varphi(c_i) = \varphi(c_i')$ ならば、Γ, Γ'は self pass-equivalent である。

Theorem 1 を証明するために Arf invariant に関する以下の結果 ([7]) を使う。

$V_1^*, ..., V_n^*$を R^3の互いに交わらない n solid tori で core $c_1^*, ..., c_n^*$に対し $\Gamma^* = c_1^* \cup ... \cup c_n^*$ が trivial link になるものとする。また f を $\mathcal{V}^* = V_1^* \cup ... \cup V_n^*$ から $\mathcal{V}$ への orientation preserving homeomorphism で $f_i(= f$ の V_i^*への制限) が V_i^*から V_iへ faithful,[6] とする。V_i^*の link $L_i^*, L^* = L_1^* \cup ... \cup L_n^*$ に対し $L_i = f(L_i^*), L = L_1 \cup ... \cup L_n$ で表す。

Lemma 1.([7]). $L^*, L, \Gamma = f(\Gamma^*)$ は上のものとする。各 i, j で $w(L_i) \equiv w(L_j)(= p) \pmod 4$ とし q をΓの total linking number とする。もし L^*, Γ が proper ならば L も proper で、

(1) $\varphi(L) \equiv \varphi(L^*) + \varphi(\Gamma) \pmod 2$ (p が奇数のとき)

(2)$\varphi(L) = \varphi(L^*)$ (p, q が偶数または q が奇数で $p = 4m$ のとき)

$\equiv \varphi(L^*)+1 \pmod 2$ (q が奇数で $p = 4m + 2$ のとき)。

link ℓ に含まれる knot k に対し k の orientation を逆にしたものを$\bar{k}$とし $L = \bar{k} \cup (\ell - k)$ とする。

Lemma 2.([7]). ℓ, L を上のものとする。ℓ が proper ならば L も proper で、

$\varphi(L) = \varphi(\ell)$ ($Link(k, \ell - k) \equiv 0 \pmod 4$ のとき)

$\equiv \varphi(\ell)+1 \pmod 2$ ($Link(k, \ell - k) \equiv 2 \pmod 4$ のとき).

Sketch of Proof of Theorem 1. Γ, Γ'が homotopic で $w(k_i) = w(k_i')$ だから ℓ, ℓ' も homotopic である。

Case 1. 各 p_iが奇数のとき。

もし ℓ が proper ならば (ℓ が proper でないときは、ℓ の sublink で proper である link をとる). 各 p_iが奇数より Γ, ℓ'も proper になる。

最初に $p_i \equiv p_1 \pmod 4$, $i = 1, \ldots, n$ の場合を考える。このとき, Lemma 1 より

$\varphi(\ell) \equiv \varphi(\ell^*) + \varphi(\Gamma) \equiv \sum_{i=1}^{n} \varphi(k_i^*) + \varphi(\Gamma) \pmod 2$

$\varphi(k_i) \equiv \varphi(k_i^*) + \varphi(c_i) \pmod 2$,

ここで $\ell^* = k_1^* \cup \ldots \cup k_n^* (\subset \mathcal{V}^*)$ である。Proposition (1) より,Γ, Γ'が self $\sharp$-equivalent ならば, $\bar{\varphi}(\Gamma) = \bar{\varphi}(\Gamma')$ だから、$\bar{\varphi}(\ell) = \bar{\varphi}(\Gamma)$ である。また同様にして $\bar{\varphi}(\ell') = \bar{\varphi}(\Gamma')$ を得る. ℓ の proper sublink についても同じ議論が出来て,Proposition (1) より ℓ, ℓ' は self $\sharp$-equivalent である。

さらに各 i で $\varphi(k_i) = \varphi(k_i')$ ならば、Proposition (2) より ℓ, ℓ' は self pass-equivalent である。

つぎにある i で $p_i \not\equiv p_1 \pmod 4$ の場合を考える。このようなすべての i について V_i^*に 2-component link, $2c_i^*$で表す、で k_i^*と split するように取り $k_i (\subset V_i)$ の代りに $k_i \cup 2c_i$ を考えると、$w(k_i \cup 2c_i) \equiv p_1 \pmod 4$ になる。そこで $L(= \ell \cup (\cup 2c_i)), L'(= \ell' \cup (\cup 2c_i'))$ に対し Lemma 1 を適用し、同様に $\bar{\varphi}(L) = \bar{\varphi}(L')$ を得る。また c_i, c_i'の方向を逆にしたものを$\tilde{c}_i, \tilde{c}_i'$ とし $\tilde{L} = \ell \cup (\cup(c_i \cup \tilde{c}_i')), \tilde{L}' = \ell' \cup (\cup(c_i \cup \tilde{c}_i'))$ で表すと、Lemma 2 より $\bar{\varphi}(\tilde{L}) = \bar{\varphi}(\tilde{L}')$ が示され、$\tilde{L}$ と $\ell, \tilde{L}'$と ℓ'はそれぞれ related,[5], だから、$\varphi(\tilde{L}) = \varphi(\ell)$, $\varphi(\tilde{L}') = \varphi(\ell')$ となり、これより $\bar{\varphi}(\ell) = \bar{\varphi}(\ell')$ を得る。故に Proposition (1) より ℓ, ℓ' は self $\sharp$-equivalent になり、さらに各 i で、$\varphi(k_i) = \varphi(k_i')$ ならば Proposition (2) より、ℓ, ℓ' は self pass-equivalent になる。

Case 2. 各 p_iが偶数のとき。

このとき ℓ, ℓ' は proper になる。

まず、$p_i \equiv p_1 \pmod 4$,$i = 1, \ldots, n$ の場合は、Lemma 2 の p, q のそれぞれの場合分けを考える。いずれの時も $\bar{\varphi}(\ell) = \bar{\varphi}(\ell')$ が簡単に示される。ℓ, ℓ' の proper sublink についても全く同様である。故に Proposition (1) より ℓ, ℓ' は self $\sharp$-equivalent になる。

つぎに $p_i \not\equiv p_1 \pmod 4$ の場合は Case 1 と同様に k_iの代りに $k_i \cup 2c_i$を考えて, Case 1 と同様の議論で、$\bar{\varphi}(\ell) = \bar{\varphi}(\ell')$ を得る。proper sublink についても同様の結果が得られ、Proposition (1) より、ℓ, ℓ' は self $\sharp$-equivalent になる。さらに各 i について $\varphi(k_i) = \varphi(k_i')$ ならば Proposition 2 より ℓ, ℓ' は self pass-equivalent になる。

Remark. (1) Theorem 1(1) で $p_i \not\equiv p_j \pmod 2$ ならば self $\sharp$-equivalent でない例がある。たとえば, $\Gamma(= \Gamma')$ を Hopf link とし、ℓ, ℓ' を Fig. 2 のそれとすると, $\bar{\varphi}(\ell) \neq \bar{\varphi}(\ell')$ となり、ℓ, ℓ' は self $\sharp$-equivalent でない。

Fig. 2

(2) Theorem 1(2) は p_iが偶数ならば, 成立しない。たとえば Whitehead link Γの (2,1)-cable link ℓ は self $\sharp$-equivalent to trivial であるが、$\bar{\varphi}(\Gamma)=1$ よりΓは self $\sharp$-equivalent to trivial でない。

link の F-isotopy は [13] で定義されている。下記は [10] で幾何的に証明されているが、Theorem 1 より簡単に得られる。

Corollary. $\ell = k_1 \cup \ldots \cup k_n, \ell' = k'_1 \cup \ldots \cup k'_n$ が F-isotopic ならば、それらは、self $\sharp$-equivalent である。さらに各 i で $\varphi(k_i) = \varphi(k'_i)$ ならば、それらは self pass- equivalent である。

Proof. ℓ, ℓ' が simply F-isotopic,[13], ならば、$\Gamma = \Gamma'$ で $w(k_i) = w(k'_i)$ $=\pm 1$ であり、したがって Theorem 1(1) より、ℓ, ℓ' は self $\sharp$-equivalent である。これより Corollary を得る。

Z_2-(homology) boundary link は [1] で定義され、その Arf invariant は [9] でつぎのようになる。

Lemma 3. $\ell = k_1 \cup \ldots \cup k_n$ を Z_2-(homology) boundary link とすると、ℓの total linking number は $4p$（ただし p は整数）で $\bar{\varphi}(\ell) \equiv p \pmod 2$ である。

Proof of Theorem 2. ℓ を Z_2-boundary link で homotopic to trivial とする。そのとき ℓ の任意の sublink ℓ_r は proper で Z_2-boundary link で homotopic to trivial である。故に ℓ_rの total linking number は 0 で Lemma 3 より $\bar{\varphi}(\ell_r)=0$ である。故に Proposition (1) より ℓ は self $\sharp$-equivalent to trivial となる。さらに各 i で$\varphi(k_i)=0$ ならば、Proposition (2) より ℓ は self pass-equivalent to trivial となる。

References

[1] J.A. Hillman: Alexander ideals of links, Lect. Notes in Math. **895** (1981), Springer.

[2] L.H. Kauffman: Formal knot theory, Math. Notes, **30** (1983), Princeton Univ. Press.

[3] J.W. Milnor: Link group, Ann. Math., **59** (1954), 177-195.

[4] H. Murakami: Some metrics on classical knots, Math. Ann., **270** (1985), 35-45.

[5] R.A. Robertello: An invariant of knot cobordism, Comm. Pure and Appl. Math., **18** (1965), 543-555.

[6] D. Rolfsen: Knots and links, (1976), Berkeley CA, Publish or Perish Inc.

[7] T. Shibuya: The Arf invariant of proper links in solid tori, Osaka J. Math., **26** (1989), 483-490.

[8] T. Shibuya: Self $\sharp$-unknotting operation of links, Osaka Insti. Tech., **34** (1989), 9-17.

[9] T. Shibuya: Two self $\sharp$-equivalences of links in solid tori, Osaka Insti. Tech., **35** (1990), 13-24.

[10] T. Shibuya: Arf invariant of Z_2-homology boundary links, Osaka Insti. Tech., **37** (1992), 1-5.

[11] T. Shibuya: Self $\sharp$-equivalence of F-isotopic links, Osaka Insti. Tech., **40** (1995), 1-8.

[12] T. Shibuya and A Yasuhara: Classification of links up to self $\sharp$-move, pre-print.

[13] N. Smythe: Topological invariant of isotopy of links, I, Amer. J. Math., **92** (1970), 86-98.

Department of Mathematics Osaka Institute of Technology Asahi Osaka 535-8585, Japan

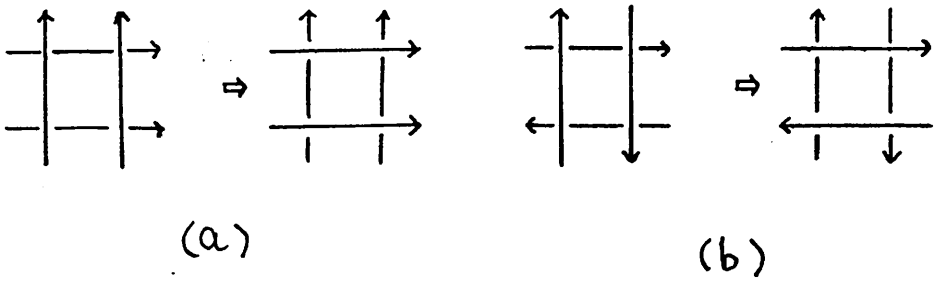

Fig. 1

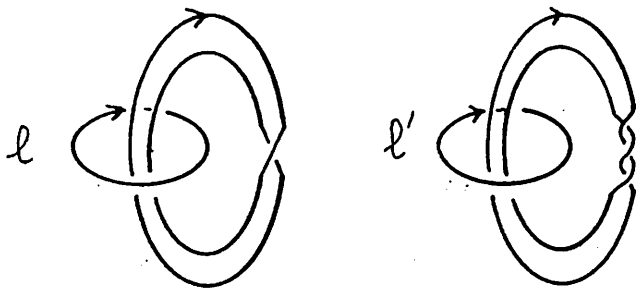

Fig. 2