HAKONE SEMINAR 15(1999)45-55.

Local Moves and 4-Genus of Knots

渋谷哲夫（大阪工大）

§0. Introduction

3-space R^3 の knot k の 4-genus, $g^*(k)$ で表す，とは $k(\subset R^3[0])$ に対し R^4_+ で locally flat orientable surface を張るとき，その surfaces の最小種数をいう。

§1 では $g^*(k)$ と k に R^4_+ で張る disk の singularity の個数，$c^*_H(k)$ で表す，との関係を調べる。すなわち，k に (singular) disk D を R^4_+ で singularity of D, $\mathcal{S}(D)$ で表す，が Int.D の有限個の点から成り，$D-\mathcal{S}(D)$ は locally flat で $\mathcal{S}(D)\ni {}^\forall p_i$ に対し $(\partial N(p_i:R^4_+), \partial N(p_i:D))$ が Fig.1 の

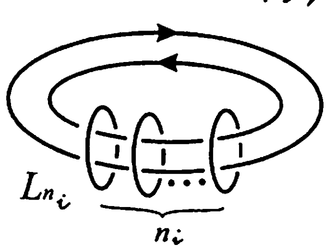


Fig.1

n_i+2-comp. link $\mathcal{L}_{n_i}$ であるように張る。そのとき，この disks の $\mathcal{S}(D)$ の最小数を $c^*_H(k)$ とする。そのとき，

<u>Theorem 1.</u> R^3 の knot k に対し, $g^*(k)=c^*_H(k)$ である。

§2 では Fig. 2 の 3つの local moves, Γ_p-, Γ_0'-, Γ_1''-move

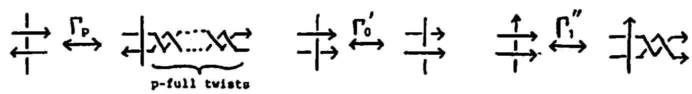


Fig. 2

を定義し，これらに関する knot の unknotting number, $u^{\Gamma_p}(k)$, $u^{\Gamma_0'}(k)$, $u^{\Gamma_1''}(k)$ で表す，と $g^*(k)$ の関係を調べて，つぎを証明する。(ただし $u^X(k)$ とは，k に有限回の X-move を操作して trivial knot を得るときの最小回数を表す。ここで，Γ_{2q}-, Γ_0'-moves は unknotting operation であるが，Γ_{2q+1}-, Γ_1''-moves は knot の Arf invariant $\varphi(\ )$ を変えないので u. op. ではない。$\varphi(k)=1$ のときは，$u^{\Gamma_{2q+1}}(k)=u^{\Gamma_1''}(k)=\infty$ と定義する。)

<u>Theorem 2.</u> R^3 の knot k に対し, $g^*(k)\leq u^X(k)$ for $X=\Gamma_p, \Gamma_0', \Gamma_1''$ である。

最近，[1], [8] で 9, 10-交点の knots の 4-genus のうちで

9_{48}, 10_{117}, 10_{144}, 10_{145}, 10_{154}, 10_{161} のそれらが決定された。これにより 9-交点の knot の 4-genus はすべて決定され，10-交点の knot に関しては，8 個の knot の 4-genus がまだ知られていなかったが，Theorem 2 より，このうちつぎの 5 個の 4-genus が決定される。すなわち，

<u>Theorem 3.</u> 10_{54}, 10_{70}, 10_{97}, 10_{148}, 10_{151} の 4-genus は 1 である。

本稿は §1 については [7]，§2 は [6] の内容を要約したものです。

§1. A characterization of 4-genus of knots

knot k の 4-dim. clasp number $C^*(k)$ と $g^*(k)$ の間には $g^*(k) \leqq C^*(k)$ が成立し，[4] により 8_{16} は等号が成立しない ($g^*(8_{16})=1$ で．$C^*(8_{16})=2$) 例として示されている。

しかし $C^*_H(k)$ については Theorem 1 が成立する。

<u>Proof of Theorem 1.</u> (1) $g^*(k) \leqq C^*_H(k)$ の証明

$R^3[0]$ の knot k に対し R^4_+ で $C^*_H(k)$ 個の singularity をもつ disk D を張る。各 singularity に対応する link に対し Fig.3 の fusion をほどこすことにより，trivial link が得られる。すなわち genus を 1 だけ増やすことにより，1個の singularity を解消できる。

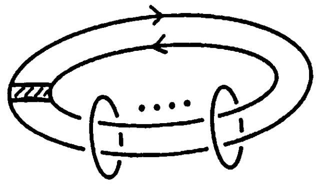


Fig. 3

(2) $C^*_H(k) \leqq g^*(k)$ の証明

$k(\subset R^3[0])$ に R^4_+ で locally flat orientable surface $\tilde{F}$ で $g(\tilde{F})=g^*(k)(=r)$ になるものを張り，$\tilde{F}$ を ambient isotopy で動かして，$p: R^4_+ \longrightarrow R^3[0]$ の正射影に対し $F=p(\tilde{F})$ をつぎのようになるとしてよい，Fig.4，ここで $F=E\cup\mathfrak{B}\cup\mathfrak{D}^*\cup\mathfrak{B}^*$，$\partial E$ は

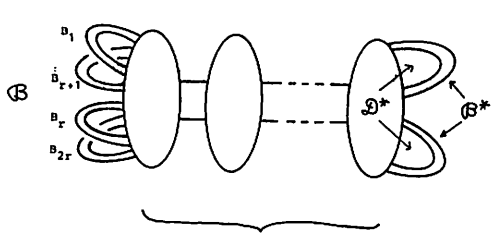


Fig. 4

ribbon knot, $\mathcal{B}=B_1\cup\cdots\cup B_{2r}$ は mutually disjoint bands associated to the genus of $\tilde{F}$, $\mathcal{D}^*$ は mutually disjoint disks associated to the minimal points of $\tilde{F}$, $\mathcal{B}^*$ は mutually disjoint bands associated to the minimal points of $\tilde{F}$ とする。

このFから R^4_+ で singularity が $r(=g^*(k))$ 個の disk を構成する。

(1) $k\cup\mathcal{D}^*\subset R^3[0]$

(2) $(k\cup\partial\mathcal{D}^*)\times[0,1]\subset R^3[0,1]$

(3) $R^3[1]$ で $B_i\times\{1\}$ $(1\leqq i\leqq r)$ に対し Fig. 5 の fission を行ない、各 B_i^0 が non-twist で $\bigcup_{i=1}^{n}$ (core of B_i^0) が trivial link になるようにする。この fission によりできる link $\mathcal{L}_{n_i}$ を1点につぶす。

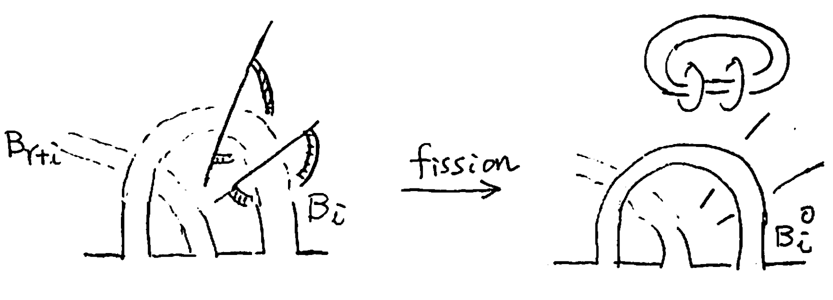


Fig. 5

(4) (3)の結果得られるlinkは$\partial(E \cup B^*)$とambient isotopicで∂Eはribbon knotである。

以上より、求めるsingular diskをR^4_+でkに張ることができる。

§2. Local moves and 4-genus of knots

§2ではTheorems 2, 3を証明する。

<u>Proof of Theorem 2.</u> Γ_p^-, $\Gamma_0'^-$, $\Gamma_1''^-$-moveはそれぞれ、Fig. 6のlinksをfusionすることにより実現でき、それらのlinksは図のように1回fusionするとtrivial linkになるのでTheorem 2を得る。

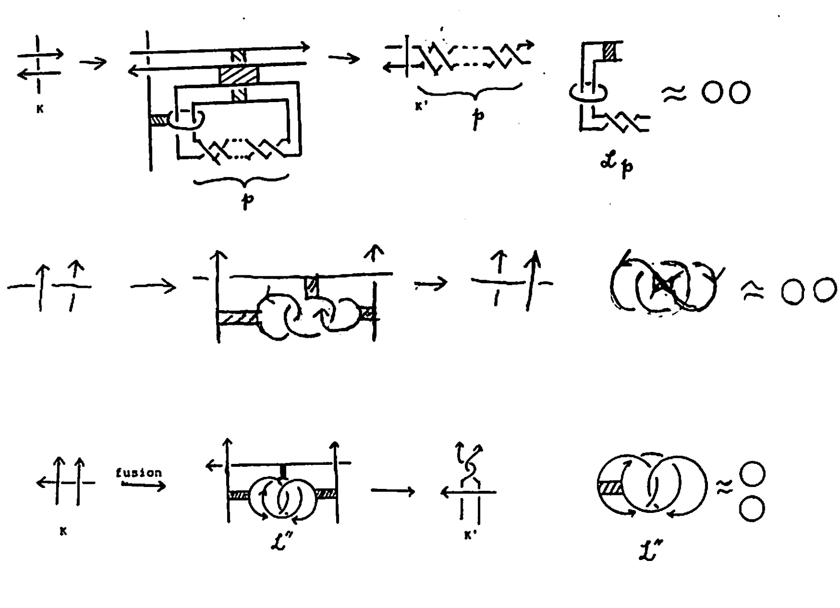


Fig. 6

<u>Remark</u> (1) つぎの変形 (generalized Γ_0-move と呼ぶ) も1回の Γ_0-move で実現できる。

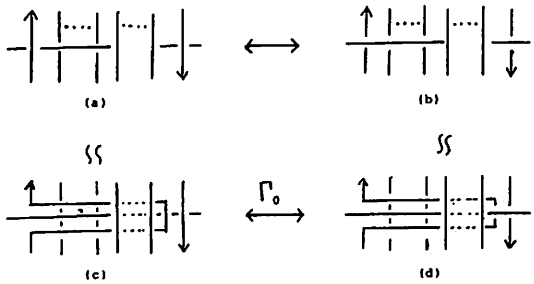


Fig. 7

(2) Δ-move は unknotting operation である, [3], ので Δ-unknotting number $u^{\Delta}(k)$ が定義されるが Fig. 8 により $u^{\Gamma_0}(k) \leqq u^{\Delta}(k)$ である。

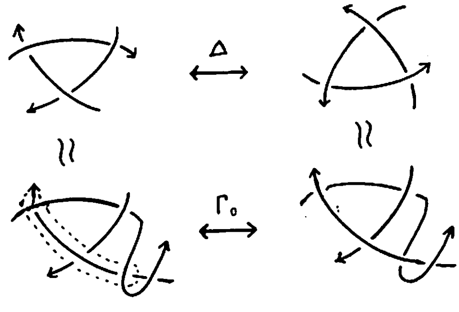


Fig. 8

(3) 任意の自然数 p に対し, knot k_p で $u^{\Gamma_0}(k_p)=1$ で $u^{\Delta}(k_p)=p$ なるものがある。たとえば Fig. 9 の knot を k_p とすると, 図により $u^{\Gamma_0}(k_p)=1$ であるが, [5] により $u^{\Delta}(k_p)=p$ である。

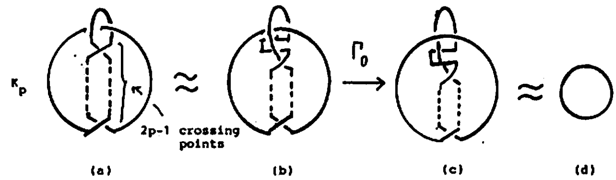
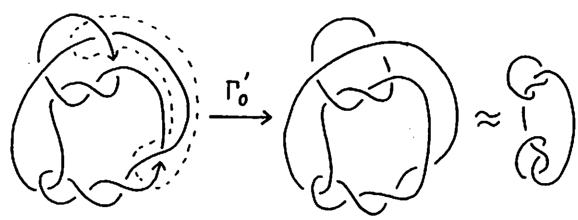


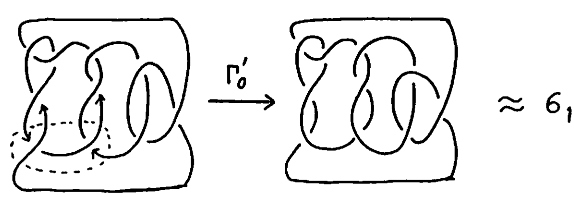
Fig. 9

<u>Proof of Theorem 3.</u> 10_{54}, 10_{70}, 10_{97}, 10_{148}, 10_{151}にΓ_0-, Γ_1-, Γ_0'-, Γ_1''-moveのいずれかを1回適用すると，trivial knot 又は slice knot を得るので，Theorem 2より，これらの4-genusは1である。

10_{54}



10_{70}



10_{97}

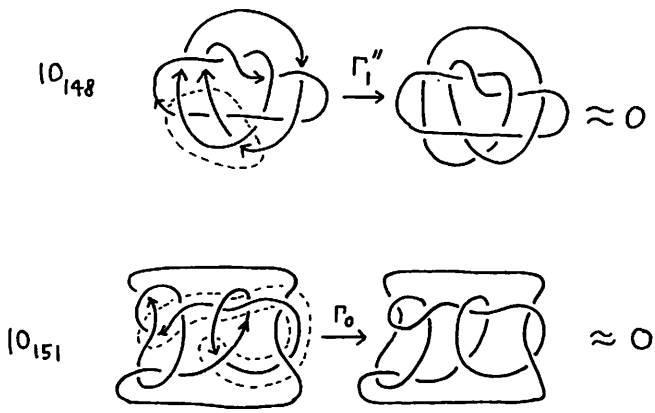


Fig.

<u>Appendix.</u> 10交点以下のknotの4-genusとunknotting numberのlist, [2], の修正版を掲げる。10交点以下では残り10_{51}, 10_{139}, 10_{152}の4-genusがまだ知られていないことになる。ここで A: 1 or 2, B: 1, 2 or 3, X: 2 or 3, Z: 3 or 4。

References

[1] Y. Fujino, Y. Miyazawa and K. Nakajima: H(n)-unknotting number of a knot, Report of Knots and Low-Dimensional manifolds, (1997), 72-85.

[2] A. Kawauchi: A Survey of Knot Theory (1996), Birkhauser.

[3] H. Murakami and Y. Nakanishi: On a certain move generating link-homology, Math. Ann. 284 (1989), 75-89.

[4] H. Murakami and A. Yasuhara: Four-genus and four-dimensional clasp number of a knot, pre-print.

[5] M. Okada: Delta-unknotting operation and second coefficient of the Conway polynomial, J. Math. Soc. J. 42 (1990), 713-717.

[6] T. Shibuya: Local moves and 4-genus of knots, pre-print.

[7] T. Shibuya and A. Yasuhara: A characterization of four-genus of knots, pre-print.

[8] T. Tanaka: Unknotting number of quasipositive knots, Report of Knots and Low Dimensional Manifolds, (1997), 61-71.

	u	g*
3_1	1	1
4_1	1	1
5_1	2	2
5_2	1	1
6_1	1	0
6_2	1	1
6_3	1	1
7_1	3	3
7_2	1	1
7_3	2	2
7_4	2	1
7_5	2	2
7_6	1	1
7_7	1	1
8_1	1	1
8_2	2	2
8_3	2	1
8_4	2	1
8_5	2	2
8_6	2	1
8_7	1	1
8_8	2	0
8_9	1	0
8_{10}	A	1
8_{11}	1	1
8_{12}	2	1
8_{13}	1	1
8_{14}	1	1
8_{15}	2	2
8_{16}	2	1
8_{17}	1	1
8_{18}	2	1
8_{19}	3	3
8_{20}	1	0
8_{21}	1	1
9_1	4	4

	u	g*
9_2	1	1
9_3	3	3
9_4	2	2
9_5	2	1
9_6	3	3
9_7	2	2
9_8	2	1
9_9	3	3
9_{10}	X	2
9_{11}	2	2
9_{12}	1	1
9_{13}	X	2
9_{14}	1	1
9_{15}	2	1
9_{16}	3	3
9_{17}	A	Y
9_{18}	2	2
9_{19}	1	1
9_{20}	2	2
9_{21}	1	1
9_{22}	1	1
9_{23}	2	2
9_{24}	1	1
9_{25}	2	1
9_{26}	1	1
9_{27}	1	0
9_{28}	1	1
9_{29}	A	1
9_{30}	1	1
9_{31}	2	1
9_{32}	A	1
9_{33}	1	1
9_{34}	1	1
9_{35}	X	1
9_{36}	2	2
9_{37}	2	1

	u	g*
9_{38}	X	2
9_{39}	1	1
9_{40}	2	1
9_{41}	2	0
9_{42}	1	1
9_{43}	2	2
9_{44}	1	1
9_{45}	1	1
9_{46}	2	0
9_{47}	2	1
9_{48}	2	1
9_{49}	X	2
10_1	1	1
10_2	3	3
10_3	2	0
10_4	2	1
10_5	2	2
10_6	3	2
10_7	1	1
10_8	2	2
10_9	1	1
10_{10}	1	1
10_{11}	X	1
10_{12}	2	1
10_{13}	2	1
10_{14}	2	2
10_{15}	2	1
10_{16}	2	1
10_{17}	1	1
10_{18}	1	1
10_{19}	2	1
10_{20}	2	1
10_{21}	2	2
10_{22}	2	0
10_{23}	1	1
10_{24}	2	1

	u	g*
10_{25}	2	2
10_{26}	1	1
10_{27}	1	1
10_{28}	2	1
10_{29}	2	1
10_{30}	1	1
10_{31}	1	1
10_{32}	1	1
10_{33}	1	1
10_{34}	2	1
10_{35}	2	0
10_{36}	2	1
10_{37}	2	1
10_{38}	2	1
10_{39}	2	2
10_{40}	2	1
10_{41}	2	1
10_{42}	1	0
10_{43}	2	1
10_{44}	1	1
10_{45}	2	1
10_{46}	3	3
10_{47}	X	2
10_{48}	A	0
10_{49}	3	3
10_{50}	2	2
10_{51}	B	A
10_{52}	A	1
10_{53}	X	2
10_{54}	B	1
10_{55}	2	2
10_{56}	2	2
10_{57}	A	1
10_{58}	A	1
10_{59}	1	1
10_{60}	1	1

	u	g*
10_{61}	X	2
10_{62}	2	2
10_{63}	2	2
10_{64}	A	1
10_{65}	2	1
10_{66}	3	3
10_{67}	A	1
10_{68}	A	1
10_{69}	2	1
10_{70}	A	1
10_{71}	1	1
10_{72}	2	2
10_{73}	1	1
10_{74}	2	1
10_{75}	2	0
10_{76}	X	2
10_{77}	B	1
10_{78}	2	2
10_{79}	B	1
10_{80}	3	3
10_{81}	A	1
10_{82}	1	1
10_{83}	A	1
10_{84}	1	1
10_{85}	2	2
10_{86}	A	1
10_{87}	A	0
10_{88}	1	1
10_{89}	2	1
10_{90}	A	1
10_{91}	1	1
10_{92}	2	2
10_{93}	A	1
10_{94}	A	1
10_{95}	1	1
10_{96}	A	1

	u	g*
10_{97}	2	1
10_{98}	2	2
10_{99}	2	0
10_{100}	X	2
10_{101}	X	2
10_{102}	1	1
10_{103}	X	1
10_{104}	1	1
10_{105}	A	1
10_{106}	A	1
10_{107}	1	1
10_{108}	2	1
10_{109}	A	1
10_{110}	A	1
10_{111}	2	2
10_{112}	A	1
10_{113}	1	1
10_{114}	1	1
10_{115}	2	1
10_{116}	A	1
10_{117}	A	1
10_{118}	1	1
10_{119}	1	1
10_{120}	X	2
10_{121}	A	1
10_{122}	2	1
10_{123}	2	0
10_{124}	4	4
10_{125}	A	1
10_{126}	A	1
10_{127}	2	2
10_{128}	3	3
10_{129}	1	0
10_{130}	A	1
10_{131}	A	1
10_{132}	1	1

	u	g*
10_{133}	1	1
10_{134}	3	3
10_{135}	A	1
10_{136}	1	1
10_{137}	1	0
10_{138}	A	1
10_{139}	4	X
10_{140}	2	0
10_{141}	1	1
10_{142}	3	3
10_{143}	1	1
10_{144}	2	1
10_{145}	2	2
10_{146}	1	1
10_{147}	1	1
10_{148}	A	1
10_{149}	2	2
10_{150}	2	2
10_{151}	A	1
10_{152}	4	X
10_{153}	A	0
10_{154}	3	3
10_{155}	2	0
10_{156}	1	1
10_{157}	2	2
10_{158}	A	1
10_{159}	1	1
10_{160}	2	2
10_{161}	3	3
10_{162}	A	1
10_{163}	A	1
10_{164}	1	1
10_{165}	2	1